１５章－１　数の理論（２）

問題

【1】(1) $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ より $\dfrac{1}{a_1} \geqq \dfrac{1}{a_2} \geqq \dfrac{1}{a_3}$ だから

$$\frac{3}{a_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} \geqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$$

$\therefore \quad a_1 \leqq 3$

また，$1 - \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} > 0$ より $a_1 > 1$ だから

$a_1 = 2,\ 3$

(i) $a_1 = 2$ のとき

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{a_2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} \geqq \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \quad a_2 \leqq 4$

また，$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{1}{a_3} > 0$ より $a_2 > 2$ だから

$a_2 = 3,\ 4$

$a_2 = 3$ のとき，$\dfrac{1}{a_3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ より

$a_3 = 6$

$a_2 = 4$ のとき，$\dfrac{1}{a_3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$ より

$a_3 = 4$

(ii) $a_1 = 3$ のとき

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{a_2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} \geqq \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{2}{3}$$

このとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq 3$ より

$a_2 = 3$

$\dfrac{1}{a_3} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ より

$a_3 = 3$

以上より，$\boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ a_3) = (2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)}$　（答）

(2) $r = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3}$ かつ $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$　…………………………①

自然数 $a_1,\ a_2,\ a_3$ に対して $\dfrac{1}{a_1} \leqq 1,\ \dfrac{1}{a_2} \leqq 1,\ \dfrac{1}{a_3} \leqq 1$ であるから

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leqq 3$$

よって，$r > 3$ ならば①をみたす自然数の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は存在しない．

以下，$0 < r \leqq 3$ で $a_1,\ a_2,\ a_3$ が①をみたすとする．

$\dfrac{1}{a_1} \geqq \dfrac{1}{a_2} \geqq \dfrac{1}{a_3}$ より

$$\frac{3}{a_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} \geqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = r$$

また，$r-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}>0$ であるから

$$\frac{1}{r}<a_1 \leqq \frac{3}{r}$$

$\dfrac{1}{r}$ より大きく $\dfrac{3}{r}$ 以下で最小の整数を m とし，最大の整数を M とすれば

$$m \leqq a_1 \leqq M \quad \cdots\cdots ②$$

$\dfrac{2}{a_2}=\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_2} \geqq \dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=r-\dfrac{1}{a_1}>0$ より

$$a_2 \leqq \frac{2}{r-\frac{1}{a_1}}=\frac{2a_1}{a_1r-1}$$

また，$r-\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{a_3}>0$ より

$$r-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{a_2}$$

$$a_2>\frac{1}{r-\frac{1}{a_1}}=\frac{a_1}{a_1r-1}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_1r-1}<a_2 \leqq \frac{2a_1}{a_1r-1} \quad \cdots\cdots ③$$

a_1 を定めたとき「③かつ $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ 」をみたす自然数 a_2 の個数を $n(a_1)$ とする．

③のとき $a_1a_2r-a_1-a_2>0$ であるから，a_1，a_2 を定めれば

$$a_3=\frac{a_1a_2}{a_1a_2r-a_1-a_2}$$

によって，正の数 a_3 が 1 つ定まる．

これは整数になる場合とそうでない場合があるが，いずれにしても①をみたす自然数の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の個数は②，③より $\displaystyle\sum_{a_1=m}^{M} n(a_1)$ 個以下であり，有限個である．

〔証明終〕

【2】(1) $a^2=1+2b^2$ より a^2 は奇数．よって，a も奇数である．　〔証明終〕

$a=2n+1$ (n は整数) とおくと

$$(2n+1)^2=1+2b^2 \iff 4n^2+4n=2b^2$$

$$\therefore \quad b^2=2n(n+1)$$

よって，b^2 は偶数となり，b も偶数となる．　〔証明終〕

(2) $a^2-2b^2=1$ において，$a=2n+1$，$b=2m$ とおくと

$$(2n+1)^2-2(2m)^2=1 \iff 4n^2+4n-8m^2=0$$
$$\iff n(n+1)=2m^2$$

したがって

$$m^2=\frac{n(n+1)}{2}=1+2+\cdots\cdots+n$$

ここで，左辺は平方数を表し，右辺は三角数を示す．また，$m^2=\dfrac{b^2}{4}$ であることに注目すると，自然数 a，b が $a^2-2b^2=1$ をみたすとき

$\boldsymbol{\dfrac{b^2}{4}}$　(答)

は平方三角数である．

(3) 自然数 k に対して

$$a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^{k+1}=(3+2\sqrt{2})^k(3+2\sqrt{2})$$
$$=(a_k+b_k\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$$
$$=(3a_k+4b_k)+(2a_k+3b_k)\sqrt{2}$$

ここで，a_k，b_k，a_{k+1}，b_{k+1} はすべて自然数なので

$$a_{k+1}=3a_k+4b_k,\quad b_{k+1}=2a_k+3b_k\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ．よって

$$a_{k+1}{}^2-2b_{k+1}{}^2=(3a_k+4b_k)^2-2(2a_k+3b_k)^2=a_k{}^2-2b_k{}^2$$

これより，すべての自然数 k に対して，$a_k{}^2-2b_k{}^2$ は一定の値となるから

$$\begin{aligned}a_k{}^2-2b_k{}^2&=a_1{}^2-2b_1{}^2\\&=3^2-2\cdot2^2\quad(\because\ a_1=3,\ \ b_1=2)\\&=9-8\\&=1\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\end{aligned}$$

〔証明終〕

(4) ① より

$$b_{k+1}-b_k=2a_k+2b_k>0\qquad(\because\ \ a_k,\ \ b_k\ \text{は自然数})$$

が成り立つから

$$b_1<b_2<b_3<\cdots\cdots\quad\cdots\cdots②$$

一方，(2), (3) の結果より

$$\frac{1}{4}b_k{}^2\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

はすべて平方三角数であるから，② とから，平方三角数は無数に存在する．

〔証明終〕

【3】「反射」を「直進」にするには与えられた図形の折り返しを作ることにより解決できる．

図 1

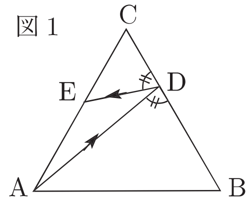
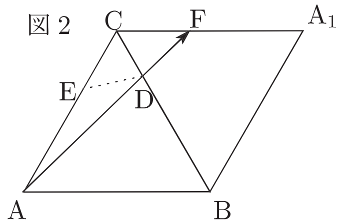


図 2



A から出た光が辺 BC で反射して CA に到るときは次のようになる．

図 1 で A → D → E は，図 2 では A → D → F となる．図 2 は，BC を対称の軸として，△ ABC を折り返した図になっている．また，F は BC に対する E の対称点である．

このようにして

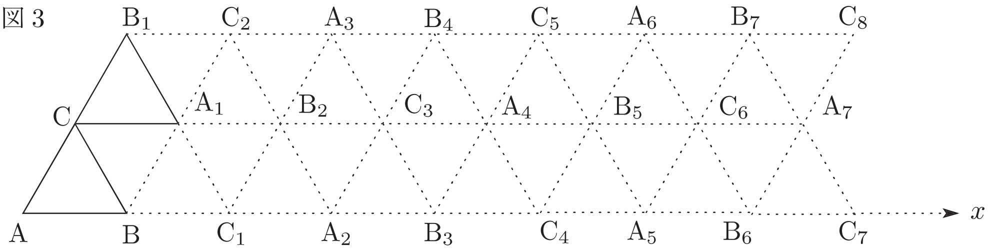
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

とするとき，xy 平面内の任意の点 P は，m，n を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}=m\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2m+n\\\sqrt{3}n\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots(*)$$

で表すことができる．

図 3



$\angle\mathrm{PAB} = \theta$ とすると

$$\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}n}{\frac{2m+n}{2}} = \frac{\sqrt{3}n}{2m+n} \quad \cdots\cdots(**)$$

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき，$(**)$ より

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}n}{2m+n} \qquad \therefore\ \ 2m = 3n \quad \cdots\cdots①$$

ここで，折り返された頂点に到達するのは，m, n が正の整数となるときである．

① で 2 と 3 は互いに素より，この式の値は 2 と 3 の最小公倍数のとき，最小となる．よって

$$2m = 3n = 6 \qquad \therefore\ \ (m,\ n) = (3,\ 2)$$

このときの P を P_0 とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}_0} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

x 軸上では，図 3 のように $\mathrm{A}(3l,\ 0)$, $\mathrm{B}(3l+1,\ 0)$, $\mathrm{C}(3l+2,\ 0)$ (ただし，l は負でない整数) となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}_2} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_4} = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

であるから，$(*)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}_2} + \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_4} = \overrightarrow{\mathrm{AB}_4}$$

よって，初めて通過する頂点は B_4 であるから

B 　(答)

に至る．

(2) (1) と同様にして，$(**)$ より

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}n}{2m+n} = \frac{\sqrt{3}}{6k+2} \iff 6kn + 2n = 2m + n \iff 2m = (6k+1)n$$

2 と $6k+1$ は互いに素より，この式の値は，この 2 数の最小公倍数のとき最小となる．

よって

$$2m = (6k+1)n = 2(6k+1) \qquad \therefore\ \ (m,\ n) = (6k+1,\ 2)$$

このときの P を P_1 とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}_1} = (6k+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (6k+1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

(1) と同様に

$$(6k+1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{AB}_{6k}},\qquad 2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{B}_{6k}\mathrm{C}_{6k+2}}$$

であるから，$(*)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}_1}=\overrightarrow{\mathrm{AB}_{6k}}+\overrightarrow{\mathrm{B}_{6k}\mathrm{C}_{6k+2}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}_{6k+2}}$$

よって，光線は

C (答)

に至る．

A から C_{6k+2} に到達するまでに，水平方向の辺，右上方向の辺，左上方向の辺とそれぞれ

$$n-1=1\ (\text{回}),\quad m-1=6k\ (\text{回}),\quad m+n-1=6k+2\ (\text{回})$$

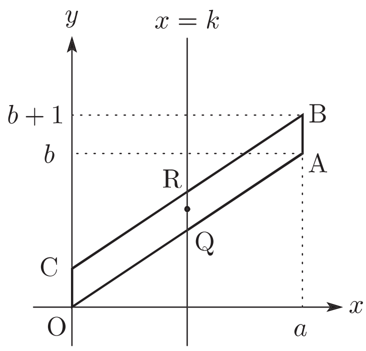
交わるから，反射の回数は

$$1+6k+(6k+2)=\boldsymbol{12k+3}\ (\textbf{回})\qquad(\text{答})$$

【4】(1) 直線 OA, CB の方程式はそれぞれ

$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=\frac{b}{a}x+1$$

である．



$1\leqq k\leqq a-1$ をみたす整数 k に対して，直線 $x=k$ と OA, CB との交点をそれぞれ，Q, R とすると

$$\mathrm{Q}\left(k,\ \frac{bk}{a}\right),\quad \mathrm{R}\left(k,\ \frac{bk}{a}+1\right)$$

いま，a と b が互いに素であり，また，$1\leqq k\leqq a-1$ より

$$\frac{bk}{a}\ \text{は整数ではない}$$

よって，線分 QR(端点をのぞく) 上に格子点が 1 つ存在するから，平行四辺形 OABC の内部の格子点の個数は

$$\boldsymbol{(a-1)}\ \textbf{個}\qquad(\text{答})$$

(2) OABC の内部の格子点を $\mathrm{P}_i(p_i,\ q_i)$ とおくと，$\triangle\,\mathrm{OP}_i\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}\left|aq_i-bp_i\right|$ である．

$\mathrm{P}_i(p_i,\ q_i)$ は領域 $y>\dfrac{b}{a}x$ にある格子点なので，$aq_i-bp_i\geqq 1$ である．

したがって

$$\triangle\,\mathrm{OP}_i\mathrm{A}\geqq\frac{1}{2}$$

である．ここで，等号が成立する i が存在することを示す．

まず，$\mathrm{P}_i(p_i,\ q_i)$ に対し，aq_i-bp_i がすべて異なることを示す．

$0<i<j<a$ に対して $aq_i-bp_i=aq_j-bp_j$ ならば

$$a(q_j-q_i)=b(p_j-p_i)$$

となる．a と b が互いに素であるから，p_j-p_i は a の倍数でなければならない．

ところが，$0<p_i<p_j<a$ より

$$0<p_j-p_i<a$$

である．したがって，p_j-p_i が a の倍数になることはない．つまり，aq_i-bp_i

はすべて異なる．

よって，集合 $\{aq_i - bp_i\}$ の要素の個数は $a-1$ である．

一方

$\dfrac{b}{a}p_i < q_i < \dfrac{b}{a}p_i + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < aq_i - bp_i < a$

なので，集合 $\{aq_i - bp_i\}$ は集合 $\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ a-1\}$ に含まれ，かつ，要素の個数が一致する．したがって，2 つの集合は一致し，必ず $aq_i - bp_i = 1$ となる番号 i がある．よって，求める最小値は

$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ (答)

＜別解＞

$aq_i - bp_i = 1$ をみたす $(p_i,\ q_i)$ が存在することの別証

$J = \{aq - bp \mid (p,\ q)$ はすべての格子点 $\}$

とする．J の要素のうち正で最小のものを $aq_0 - bp_0$ とする．

任意の J の要素 $aq - bp$ を $aq_0 - bp_0$ で割ると，Q を整数として

$aq - bp = (aq_0 - bp_0)Q + r, \quad 0 \leqq r < aq_0 - bp_0$

ここで，$r = a(q - q_0Q) - b(p - p_0Q) \in J$ であるから

$r = 0$

したがって

$aq - bp = (aq_0 - bp_0)Q$

となり，$aq - bp$ は $aq_0 - bp_0$ の倍数である．

ところが

$a = a \cdot 1 - b \cdot 0 \in J, \quad b = a \cdot 0 - b \cdot (-1) \in J$

より

$aq_0 - bp_0$ は a と b の約数

となり，a と b が互いに素であるから

$aq_0 - bp_0 = 1$

この $(p_0,\ q_0)$ に対して整数 n を用いて

$p_1 = p_0 + an, \quad q_1 = q_0 + bn$

とおくと，$aq_1 - bp_1 = 1$ であり，n を適当にとると，$0 < p_1 < a$ にできる．

このとき，$q_1 = \dfrac{b}{a}p_1 + \dfrac{1}{a}$ より

$\dfrac{b}{a}p_1 < q_1 < \dfrac{b}{a}p_1 + 1$

となるので，$(p_1,\ q_1)$ は，OABC の内部にある．

＜コメント＞

以上の証明の一部に，a と b が互いに素なとき

$ax + by = 1$

に整数解が存在することの証明が含まれている．

１５章－２　複素数平面（２）

問題

【1】(1) $\big||\alpha|^n - |\alpha|^{-n}\big| \leqq |\alpha^n + \alpha^{-n}| = |a_n| < 2$ より，

$$-2 < |\alpha|^n - |\alpha|^{-n} < 2$$

がすべての自然数で成立していなければならない．

ところが，もし $|\alpha| > 1$ なら，$\lim_{n\to\infty} |\alpha|^n = +\infty$，$\lim_{n\to\infty} |\alpha|^{-n} = 0$ より，

$$\lim_{n\to\infty} \left(|\alpha|^n - |\alpha|^{-n}\right) = +\infty$$

同様に，$|\alpha| < 1$ なら，

$$\lim_{n\to\infty} (|\alpha|^n - |\alpha|^{-n}) = -\infty$$

よって，

$$|\alpha| = 1$$

〔証明終〕

(2) (1) より，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ とおける．

$$\begin{aligned} a_m &= \alpha^m + \alpha^{-m} = \cos m\theta + i\sin m\theta + \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \\ &= \cos m\theta + i\sin m\theta + \cos m\theta - i\sin m\theta \\ &= 2\cos m\theta \end{aligned}$$

もし，$|2\cos\theta| > 1$ なら，

$$|a_1| = |2\cos\theta| > 1$$

$|2\cos\theta| < 1$ なら，

$$\begin{aligned} |a_2| &= |2\cos 2\theta| \\ &= |4\cos^2\theta - 2| \\ &= |2 - (2\cos\theta)^2| \ \geqq\ 2 - |2\cos\theta|^2 \ >\ 1 \end{aligned}$$

$|2\cos\theta| = 1$ なら，$\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$，$\pm\dfrac{2\pi}{3}$ より，

$$|a_3| = |2\cos 3\theta| = 2$$

となるが，これはすべての自然数 n について $|a_n| < 2$ であることに反する．したがって，$|2\cos\theta| = 1$ となることはない．

よって，$|a_1|$，$|a_2|$ のいずれかは 1 より大きく，$|a_m| > 1$ となる自然数 m が存在する．

〔証明終〕

【2】 $$w = \frac{20z}{5-(2-i)z} \iff z = \frac{5w}{20+(2-i)w}$$

z の条件より

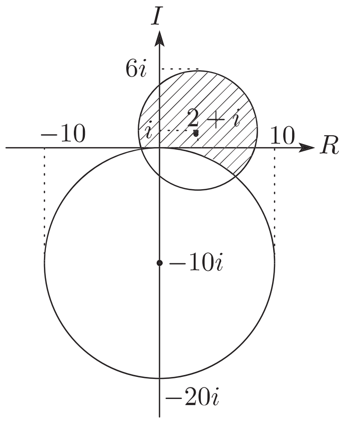
$$\begin{cases} |z| < 1 & \cdots ① \\ \dfrac{z-\bar{z}}{2i} > 0 & \cdots ② \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} ① &\iff \frac{5w}{20+(2-i)w} \cdot \frac{5\bar{w}}{20+(2+i)\bar{w}} < 1 \\ &\iff 25w\bar{w} < 20^2 + 20(2-i)w + 20(2+i)\bar{w} + 5w\bar{w} \\ &\iff w\bar{w} - (2+i)\bar{w} - (2-i)w < 20 \\ &\iff \{w-(2+i)\}\{\bar{w}-(2-i)\} < 25 \\ &\iff |w-(2+i)| < 5 \end{aligned}$$

$$② \iff \dfrac{\dfrac{5w}{20+(2-i)w} - \dfrac{5\bar{w}}{20+(2+i)\bar{w}}}{2i} > 0$$
$$\iff w\bar{w} + 10i\bar{w} - 10iw > 0$$
$$\iff (w+10i)(\bar{w}-10i) > 100$$
$$\iff |w+10i| > 10$$

これを図示すると，図の斜線部分になる．ただし，境界は含まない．



【3】(1) 点 P_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を表す複素数を z_n とおくと

$z_0 = 0,\quad z_1 = 1$

次に, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ を r 倍拡大し, 60° 回転させたものであるから, 複素数 α を

$\alpha = r(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

で定めると

$z_{n+2} - z_{n+1} = \alpha(z_{n+1} - z_n)$

よって, $w_n = z_{n+1} - z_n$ とおけば, 数列 $\{w_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ は

初項 $w_0 = z_1 - z_0 = 1,\quad$ 公比 α の等比数列

であるから

$w_n = \alpha^n$

これより, $n \geqq 1$ のとき

$$z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1} - z_k) \ = \ z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} w_k$$
$$= 0 + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k \ = \ 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}$$

である．したがって, 点 P_3 を表す複素数は

$$z_3 = 1 + \alpha + \alpha^2$$
$$= 1 + r(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) + r^2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$$
$$= 1 + r\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + r^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= \boldsymbol{\left(1 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r^2\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}r^2\right)i} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\alpha \fallingdotseq 1$ であるから

$$z_n = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

であり, $z_0 = 0$ なのでこれは $n=0$ のときを含めて成り立つ. よって

$$z_{6n} = \frac{1-\alpha^{6n}}{1-\alpha}$$

ここで

$$\alpha^{6n} = r^{6n}\{\cos(360^\circ n) + i\sin(360^\circ n)\} = r^{6n}$$

だから

$$z_{6n} = \frac{1-r^{6n}}{1-r\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$= \frac{(1-r^{6n})\left\{\left(1-\dfrac{r}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{3}r}{2}i\right\}}{\left(1-\dfrac{r}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{(1-r^{6n})\{(2-r)+\sqrt{3}ri\}}{2(1-r+r^2)}$$

よって

$$a = \boldsymbol{\frac{(1-r^{6n})(2-r)}{2(1-r+r^2)}},\quad \boldsymbol{b = \frac{\sqrt{3}r(1-r^{6n})}{2(1-r+r^2)}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 条件 2 より

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 1$$

つまりこの正三角形の重心は 1 で, 正三角形の重心と外心は一致するから, $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$ は原点を外接円の中心とする正三角形である.

$\omega = \cos(\pm 120^\circ) + i\sin(\pm 120^\circ)$ とすると,

$$\beta - 1 = \omega(\alpha-1),\quad \gamma - 1 = \omega^2(\alpha - 1)$$

である.

つまり,

$$\beta = \boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}z+1},\quad \gamma = \boldsymbol{\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}z+1} \ \text{(複号同順)}$$

(2) 条件 1 より正三角形の高さは $\dfrac{3}{2}$ である. よって, 重心と頂点の距離は 1 となるから, $|z|=1$ である.

他方,

$$\alpha\beta\gamma = (z+1)(\omega z+1)(\omega^2 z+1) = z^3+1$$

より, $|z^3+1| = 1$. $|z^3| = 1$ でもある. よって,

$$(z^3+1)(\bar{z}^3+1) = 1,\ z^3\bar{z}^3 = 1$$

つまり, $z^3+\bar{z}^3 = -1$, $z^3\bar{z}^3 = 1$ となり z^3, $\bar{z}^3$ は $t^2+t+1=0$ の 2 解である. 条件 3 より,

$$z^3 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

よって, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ と置くと,

$3\theta = 120° + 360° \times k$

これから $\theta = 40°,\ 160°,\ 280°$ を得る. よって, $0° \leqq \arg(\alpha) \leqq \arg(\beta) \leqq \arg(\gamma) < 360°$ および

$$\begin{cases} \cos 40° + i\sin 40° + 1 = 2\cos 20°(\cos 20° + i\sin 20°) \\ \cos 160° + i\sin 160° + 1 = 2\cos 80°(\cos 80° + i\sin 80°) \\ \cos 280° + i\sin 280° + 1 = -2\cos 140°(\cos 320° + i\sin 320°) \end{cases}$$

より, $\arg(\alpha) = \mathbf{20°}$, $\arg(\beta) = \mathbf{80°}$, $\arg(\gamma) = \mathbf{320°}$ である.　　(答)

添削課題

【1】(1) $ax^2-2x+a=0$ の判別式を考えて

$$D/4=1-a^2<0 \quad (\because a>1)$$

より, この方程式の解は虚数解で A(α), B($\bar{\alpha}$) とおける.

解と係数の関係より

$$\alpha+\bar{\alpha}=\frac{2}{a}, \quad \alpha\bar{\alpha}=1 \quad \cdots ①$$

ここに, $a>1$ より

$$0<\alpha+\bar{\alpha}<2,\ |\alpha|=1$$

$$\Longleftrightarrow 0<\mathrm{Re}(\alpha)<1,\ |\alpha|=1$$

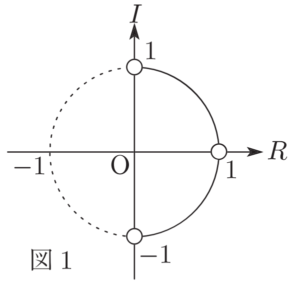


図 1

これが, A(α), B($\bar{\alpha}$) の描く図形でこれを図示すると図 1 のようになる.

(2) $x^2-2ax+1=0$ の判別式を考えて

$$D/4=a^2-1>0$$

より, C(β), D(γ) は実軸上の点で, 解と係数の関係より

$$\beta+\gamma=2a, \quad \beta\gamma=1 \quad \cdots ②$$

ここに, α, $\bar{\alpha}$ は実軸対称だから, ABCD が同一円周上にあるとすると, CD がこの円の直径となる (図 2). したがって

$$\angle\mathrm{CAD}=90^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma} \text{ が純虚数}$$

を示せばよい.

ここに, $\alpha \fallingdotseq \beta$, $\alpha \fallingdotseq \gamma$ だから

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}+\frac{\bar{\alpha}-\beta}{\bar{\alpha}-\gamma}=0 \quad (\because \beta,\ \gamma\text{は実数})$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\bar{\alpha}-\beta)=0 \quad \cdots (*)$$

を示せばよい.

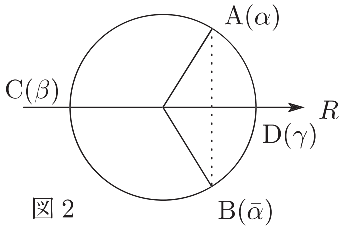


図 2

$$\begin{aligned}(*) \text{ の左辺} &= 2\alpha\bar{\alpha}-(\beta+\gamma)(\alpha+\bar{\alpha})+2\beta\gamma \\ &= 2-2a\cdot\frac{2}{a}+2 \quad (\because ①,\ ②) \\ &= 0 \ = \ \text{右辺}\end{aligned}$$

よって, 示された. 〔証明終〕