１６章－１　方程式

問題

【1】$(x^n)' = nx^{n-1}$ より，与えられた $f_n(x)$ について明らかに

$$f_n{}'(x) = f_{n-1}(x) \quad \cdots\cdots ①$$

まず，方程式 $f_1(x) = 1 + x = 0$ はただ 1 つの負の解 -1 をもつ．そこで奇数次の方程式

$$f_{2k-1}(x) = 0$$

がただ 1 つの負の解 α をもつと仮定すると

$$x \to \pm\infty \text{ のとき } f_{2k}(x) \to +\infty$$

であり，かつ①により，

$$f_{2k}{}'(x) = 0$$

がただ 1 つの負の解 α をもつから，$f_{2k}(x)$ は $x = \alpha$ で極小となる．

関数 $f_{2k}(x)$ について，与えられた定義式から

$$f_{2k}(x) = f_{2k-1}(x) + \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

が成り立つ．よって $f_{2k-1}(\alpha) = 0$，$\alpha \fallingdotseq 0$ から

$$f_{2k}(\alpha) = f_{2k-1}(\alpha) + \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} = \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} > 0, \quad \therefore \quad f_{2k}(x) > 0.$$

これを①と合わせれば

$$f_{2k+1}{}'(x) > 0$$

であるから，$f_{2k+1}(x)$ は増加関数である．よって，

$$x \to -\infty \text{ のとき } f_{2k+1}(x) \to -\infty$$

であり，また

$$f_{2k+1}(0) = 1 > 0$$

より，方程式 $f_{2k+1}(x) = 0$ はただ 1 つの負の解をもつ．

以上から数学的帰納法により，任意の正整数 k に対して，方程式 $f_{2k-1}(x) = 0$ はただ 1 つの負の解をもち，また $f_{2k}(x) > 0$ が任意の実数 x で成り立つから，方程式 $f_{2k}(x) = 0$ は実数解をもたない．

すなわち，題意は証明された．〔証明終〕

【2】x の 4 次方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

において，$x^2=X$ とおくと，X の 2 次方程式

$$X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0 \quad \text{かつ} \quad X \geqq 0 \quad \cdots\cdots(**)$$

となる．

$(**)$ において

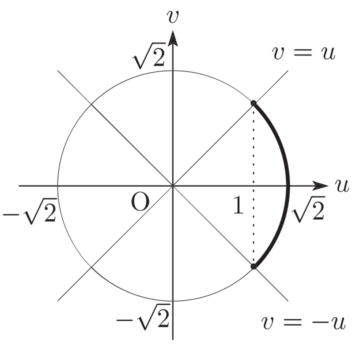
$$\begin{cases} \text{(判別式)} & : \ (s+t)^2-(s-t)^2=4st \geqq 0 \\ \text{(2 解の和)} & : \ 2(s+t) \geqq 0 \\ \text{(2 解の積)} & : \ (s-t)^2 \geqq 0 \end{cases}$$

より，X の 2 次方程式 $(**)$ は非負の 2 つの実数解をもつので，x の 4 次方程式 $(**)$ は 4 つの実数解をもつ．

ここで，$s+t=u$, $s-t=v$ とおくと

$$\begin{cases} s=\dfrac{u+v}{2} \geqq 0 \\ t=\dfrac{u-v}{2} \geqq 0 \\ s^2+t^2=\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2+\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2=1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} v \geqq -u \\ v \leqq u \\ u^2+v^2=2 \quad \cdots\cdots ① \end{cases}$$



$(u,\ v)$ の存在する範囲は右図の太実線部になるから，u の存在する範囲は

$$1 \leqq u \leqq \sqrt{2} \quad \cdots\cdots ②$$

また

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^4-2ux^2+(2-u^2)=0 \quad (\because \ ①) \\ &\Longleftrightarrow \quad u^2+2x^2u-x^4-2=0 \quad \cdots\cdots(\star) \end{aligned}$$

と表される．

したがって，u の 2 次方程式 $(\star)$ が ② の範囲に実数解をもつ条件を求めればよく

$$f(u)=u^2+2x^2u-x^4-2=(u+x^2)^2-2x^4-2$$

とおくと，$f(u)$ の軸の方程式は $u=-x^2 \leqq 0$ であるから

$$\begin{cases} f(1) \leqq 0 \\ f(\sqrt{2}) \geqq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -(x^2-1)^2 \leqq 0 \\ -x^2(x^2-2\sqrt{2}) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{-\sqrt[4]{8} \leqq x \leqq \sqrt[4]{8}} \qquad \text{(答)}$$

＜別解 1 ＞

$$f(x)=x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2$$

とすると

$$f'(x)=4x^3-4(s+t)x=4x(x+\sqrt{s+t})(x-\sqrt{s+t})$$

より，増減表は次のようになる．

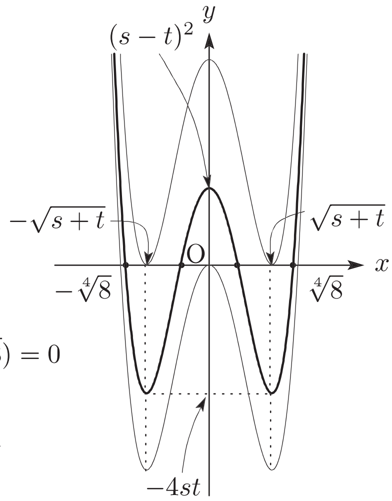
x		$-\sqrt{s+t}$		0		$\sqrt{s+t}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-4st$	↗	$(s-t)^2$	↘	$-4st$	↗

ここで

$$f(\pm\sqrt{s+t})=-4st \leqq 0 \qquad (\because \ s \geqq 0,\ t \geqq 0)$$

$f(0)=(s-t)^2 \geqq 0$

であるから，グラフは右図のようになる．



グラフは y 軸対称であり，x 軸との交点の x 座標の絶対値が最大となるのは

$(s-t)^2=0$

のときであり，$s^2+t^2=1$ かつ $s \geqq 0$ かつ $t \geqq 0$ であるから

$s=t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これを代入すると

$x^4-2\sqrt{2}x^2=0 \iff x^2(x+\sqrt[4]{8})(x-\sqrt[4]{8})=0$

である．$s,\ t$ が条件をみたしながら動くとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点は $x=-\sqrt[4]{8}$ と $x=\sqrt[4]{8}$ の間にくまなく存在するから，とりうる x の値の範囲は

$\boldsymbol{-\sqrt[4]{8} \leqq x \leqq \sqrt[4]{8}}$ (答)

＜別解 2 ＞

$x^2=X$ とおくと

$X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0 \quad \cdots\cdots(a)$

となる．判別式の条件より

$(s+t)^2-(s-t)^2=4st \geqq 0 \qquad (\because \ \ s \geqq 0,\ t \geqq 0)$

であるから，X の方程式 (a) は実数解をもち

$X=(s+t)\pm 2\sqrt{st}=\left(\sqrt{s}\pm\sqrt{t}\right)^2 \ (\geqq 0)$

より，$x^2=X$ であるから

$x=\pm\left(\sqrt{s}\pm\sqrt{t}\right)$ (複号任意)

これより，解のとる値の範囲は

$-\left(\sqrt{s}+\sqrt{t}\right) \leqq x \leqq \sqrt{s}+\sqrt{t} \quad \cdots\cdots(b)$

である．$s^2+t^2=1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$ をみたす $s,\ t$ を

$\sqrt{s}+\sqrt{t}=k$

として，k のとりうる値の範囲を調べると，$(s,\ t)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき最大となり，その値は

$\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}+\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{8}$

よって，(b) より，$\boldsymbol{-\sqrt[4]{8} \leqq x \leqq \sqrt[4]{8}}$ (答)

【3】(1) $\cos 3\theta = -\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　　$0 \leqq 3\theta < 6\pi$ であるから

$3\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi,\ \dfrac{10}{3}\pi,\ \dfrac{14}{3}\pi,\ \dfrac{16}{3}\pi$

$\therefore\ \ \theta = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}\pi,\ \dfrac{4}{9}\pi,\ \dfrac{8}{9}\pi,\ \dfrac{10}{9}\pi,\ \dfrac{14}{9}\pi,\ \dfrac{16}{9}\pi}$　(答)

(2) $\theta_1 = \dfrac{2}{9}\pi$ は $\cos 3\theta_1 = -\dfrac{1}{2}$ をみたすから

$4\cos^3\theta_1 - 3\cos\theta_1 = -\dfrac{1}{2}$

が成り立つ．これに $\cos\theta_1 = \dfrac{\alpha}{2}$ を代入すると

$4\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^3 - 3 \times \dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$\alpha^3 - 3\alpha = -1$

よって，$\boldsymbol{x^3 - 3x + 1 = 0}$ が求める方程式の 1 つである．　(答)

(3) $\theta_2 = \dfrac{4}{9}\pi$ ，$\theta_3 = \dfrac{8}{9}\pi$ とすると，これらは

$\cos 3\theta_2 = -\dfrac{1}{2},\ \cos 3\theta_3 = -\dfrac{1}{2}$

をみたすので，$2\cos\theta_2$ ，$2\cos\theta_3$ も $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解となる．

$\cos\dfrac{8}{9}\pi < \cos\dfrac{4}{9}\pi < \cos\dfrac{2}{9}\pi$

であるから，$x^3 - 3x + 1 = 0$ は 3 つの異なる実数解

$x = 2\cos\theta_1,\ 2\cos\theta_2,\ 2\cos\theta_3$

をもつことになり，$\beta > \gamma$ より

$\beta = 2\cos\theta_2,\ \gamma = 2\cos\theta_3$

である．$\theta_2 = 2\theta_1$ より

$\boldsymbol{\beta = 2\cos 2\theta_1 = 4\cos^2\theta_1 - 2 = \alpha^2 - 2}$　(答)

また，解と係数の関係より $\alpha + \beta + \gamma = 0$ であるから

$\boldsymbol{\gamma = -\alpha - \beta = -\alpha^2 - \alpha + 2}$　(答)

(4) $\theta_3 = 2\theta_2$ より

$\gamma = 2\cos 2\theta_2 = 4\cos^2\theta_2 - 2 = \beta^2 - 2$

また，

$\alpha = 2\cos\dfrac{2}{9}\pi = 2\cos\dfrac{16}{9}\pi = 2\cos 2\theta_3 = 4\cos^2\theta_3 - 2 = \gamma^2 - 2$

さらに，解と係数の関係より $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3$ であるから

$\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha$

$= (\beta + 2)\beta + (\gamma + 2)\gamma + (\alpha + 2)\alpha$

$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)$

$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 2(\alpha + \beta + \gamma)$

$= \boldsymbol{6}$　(答)

問題

【1】(1)

$$a_{n+1}^2=2+a_n$$
$$\iff a_{n+1}^2-1=a_n+1$$
$$\iff (a_{n+1}-1)(a_{n+1}+1)=a_n+1 \quad \cdots\cdots ①$$

$a_1=\sqrt{2}$ と与漸化式より，帰納的にすべての自然数 n について $a_n \geqq \sqrt{2}>1$ だから，①より

$$\log(a_{n+1}-1)+\log(a_{n+1}+1)=\log(a_n+1)$$
$$\therefore\quad \log(a_{n+1}-1)=-\log(a_{n+1}+1)+\log(a_n+1)$$

よって，$N \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\log(a_n-1)&=\log(a_1-1)+\sum_{n=2}^{N}\{\log(a_{n-1}+1)-\log(a_n+1)\}\\&=\log(a_1-1)+\log(a_1+1)-\log(a_N+1)\\&=\log(a_1^2-1)-\log(a_N+1)\\&=\log 1-\log(a_N+1)\\&=-\log(a_N+1)\end{aligned}$$

これより

$$\log(a_1-1)+\log(a_2-1)+\log(a_3-1)=-\log(a_3+1)$$
$$\therefore\quad \log(a_1-1)+\log(a_2-1)+\log(a_3-1)+\log(a_3+1)=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(i) $n=1$ のとき，$1<a_1=\sqrt{2}<2$ より

$$0<2-a_1<1\left(=\frac{1}{2^0}\right)$$

よって $n=1$ のとき成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，与式が成り立つと仮定すると

$$2-a_{k+1}=2-\sqrt{2+a_k}$$
$$=\frac{2^2-(2+a_k)}{2+\sqrt{2+a_k}}=\frac{2-a_k}{2+\sqrt{2+a_k}}$$

であり

$$0<\frac{2-a_k}{2+\sqrt{2+a_k}}<\frac{1}{2}(2-a_k)<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2^k}$$

だから

$$0<2-a_{k+1}<\frac{1}{2^k}$$

よって $n=k+1$ のときも与式は成り立つ．

以上，(i)，(ii) より題意は成り立つ．　〔証明終〕

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(a_n-1)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\log(a_n-1)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\{-\log(a_N+1)\} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，(2) より

$$2-\frac{1}{2^{N-1}}<a_N<2$$

であり

$$\lim_{N\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{N-1}}\right)=2$$

だから，はさみうちの原理より

$$\lim_{N\to\infty}a_N=2$$

よって ② は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(a_n-1)=\boldsymbol{-\log 3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

【2】(1) 9^{k-1} が m 桁だとすると

$$10^{m-1}\leqq 9^{k-1}<10^m$$

が成り立つ．

これより

$$m-1\leqq (k-1)\log_{10}9<m$$

$$\therefore\quad (m-1)+\log_{10}9\leqq k\log_{10}9<m+\log_{10}9$$

ここで

$$0<\log_{10}9<1$$

だから

$$m-1<k\log_{10}9<m+1 \qquad \therefore\quad 10^{m-1}<9^k<10^{m+1}$$

だから，9^k は m 桁か $(m+1)$ 桁である．

よって題意は示された．　〔証明終〕

(2) 9 をかけるごとに桁が上がるとすると 9^n の桁数は n 桁になる．

ところが同じ桁のものが a_n 個あるから，実際は

$\boldsymbol{(n-a_n)}$ **桁**　$\cdots\cdots$(答)

となる．

(3) 9^n が l 桁とすると

$$10^{l-1}\leqq 9^n<10^l \qquad \therefore\quad l-1\leqq n\log_{10}9<l$$

ここで (2) より

$$l=n-a_n$$

だから

$$n-a_n-1\leqq n\log_{10}9<n-a_n$$

$$\therefore\quad n-1-n\log_{10}9\leqq a_n<n-n\log_{10}9$$

$$\therefore\quad 1-\frac{1}{n}-\log_{10}9\leqq\frac{a_n}{n}<1-\log_{10}9$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1-\log_{10}9=\boldsymbol{1-2\log_{10}3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

【3】

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \Big[2\sqrt{x} \Big]_1^{n+1} = 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\infty} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また，$\sqrt{2k} < \sqrt{2k+1} < \sqrt{2(k+1)}$ より

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < b_n < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{j}} &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{j}} - 1 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= a_n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

だから，① は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < b_n < \frac{1}{\sqrt{2}} a_n$$

となり，これより

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n\sqrt{n+1}} \right) < \frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ だから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

【4】 $x+y+z=n$ より $z=n-x-y$ だから

$$\begin{aligned} & x+y+z=n,\ x \leqq y+z,\ y \leqq z+x,\ z \leqq x+y \\ \iff & z = n-(x+y),\ x \leqq n-x,\ y \leqq n-y,\ n-(x+y) \leqq x+y \\ \iff & z = n-(x+y),\ x \leqq \frac{n}{2},\ y \leqq \frac{n}{2},\ x+y \geqq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

そして，$x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1$ に注意すると，N は

$$1 \leqq x \leqq \frac{n}{2},\ 1 \leqq y \leqq \frac{n}{2},\ \frac{n}{2} \leqq x+y \leqq n-1,\ z = n-(x+y)$$

をみたす $(x,\ y,\ z)$ の個数に他ならないから，これを数える.

(i) n が偶数のとき，図 1 のようになるから

$$\begin{aligned}N &= 2+3+4+\cdots\cdots+\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)\\ &= 1+2+3+\cdots\cdots+\frac{n}{2}-1+\left(\frac{n}{2}-1\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{n}{2}-2\\ &= \frac{n^2}{8}+\frac{3n}{4}-2\end{aligned}$$

(ii) n が奇数のとき，図 2 のようになるから

$$\begin{aligned}N &= 1+2+3+\cdots\cdots+\frac{n-1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\\ &= \frac{1}{8}(n^2-1)\end{aligned}$$

よって，

n が偶数のとき

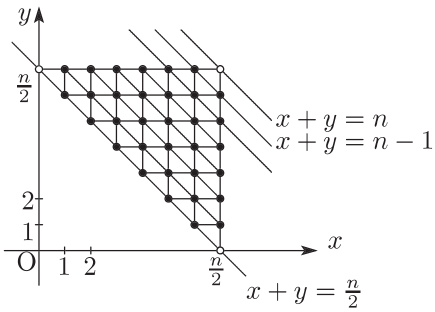
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{N}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{4n}-\frac{2}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

n が奇数のとき

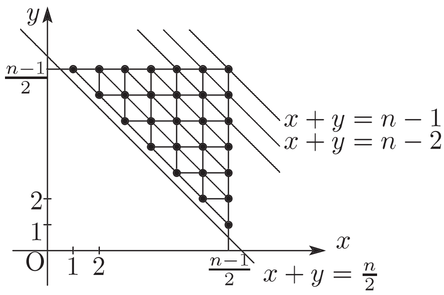
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{N}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8n^2}\right)\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

となり，これらは一致するから，求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N}{n^2}=\mathbf{\frac{1}{8}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$



〔図 1〕



〔図 2〕

添削課題

【1】不等式が成り立つためには明らかに

$1-a>0, \quad 1-d>0 \quad \cdots\cdots ①$

よって，条件は

$$\begin{cases} t<\dfrac{1-a}{b}s \\ t>\dfrac{c}{1-d}s \end{cases}$$

である．

st 平面で 2 直線 $t=\dfrac{1-a}{b}s$, $t=\dfrac{c}{1-d}s$ を考える．上の不等式をみたす $(s,\ t)$ が第 1 象限にとれるためには，2 直線の傾きの大小を比較して

$$\frac{1-a}{b}>\frac{c}{1-d}$$

でなければならない．

つまり

$(1-a)(1-d)-bc>0 \quad \cdots\cdots ② \qquad (\because \ ①)$

ここで，$f(x)=x^2-(a+d)x+(ad-bc)$ とおく．$f(x)=0$ の判別式を D とすると，題意をみたすことは

$D>0,\ f(-1)>0,\ f(1)>0,\ -1<$ 軸 $<1 \quad \cdots\cdots(*)$

と同値である．ところが

$$\begin{cases} D=(a+d)^2-4(ad-bc)=(a-d)^2+4bc>0 \\ f(1)=1-(a+d)+(ad-bc)=(1-a)(1-d)-bc>0 \quad (\because \ ②) \\ f(-1)>f(1)>0 \\ \dfrac{a+d}{2}>0 \\ 1-\dfrac{a+d}{2}=\dfrac{(1-a)+(1-d)}{2}>0 \quad (\because \ ①) \end{cases}$$

であり，$(*)$ はすべてみたされている．

よって，題意が示された．　〔証明終〕

M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学Ⅰ Ａ Ⅱ Ｂ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

Z-KAI

会員番号		氏　名	