P2J

本科2期9月度

解答

Z会東大進学教室

高2東大物理

１４章　円運動（１）

問題

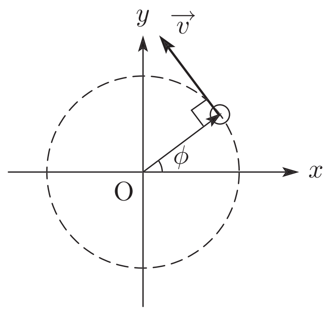
■演習

【1】

《解答》

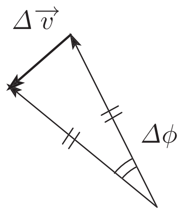
(1) $\Delta s = 2 \times r \sin \dfrac{\Delta \phi}{2}$

(2) Δs を Δt で割って，Δt を 0 に近付けることにより，



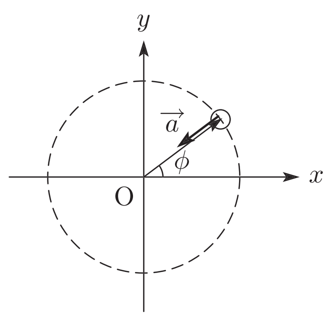
$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 2r \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 2r \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\frac{\Delta \phi}{2}} \cdot \frac{\frac{\Delta \phi}{2}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} r \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\frac{\Delta \phi}{2}} \\ &= r\omega \cdot 1 \end{aligned}$$

(3) 始点を一致させて，時間 Δt だけ経過する前後における速度ベクトルを図示すると，右図のようになるので，



$$|\Delta \vec{v}| = 2 \times v \sin \frac{\Delta \phi}{2}$$

(4) $|\Delta \vec{v}|$ を Δt で割って，Δt を 0 に近付けることにより，



$$\begin{aligned} a &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 2v \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 2v \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\frac{\Delta \phi}{2}} \cdot \frac{\frac{\Delta \phi}{2}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} v \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\frac{\Delta \phi}{2}} \\ &= v\omega \cdot 1 \\ &= r\omega^2 \end{aligned}$$

【2】

《解答》

(1) $R = 3h\tan\dfrac{\pi}{4} + h = 4h$

(2) 向心方向の運動方程式は,

$$m \times 4h \cdot \omega^2 = T\sin\frac{\pi}{4} \qquad \therefore \quad T = 4\sqrt{2}mh\omega^2$$

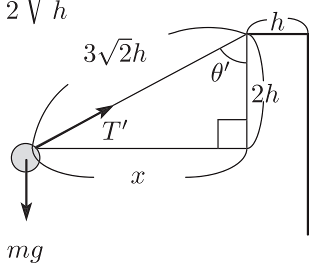
鉛直方向の力のつりあいより,

$$0 = N + T\cos\frac{\pi}{4} - mg \qquad \therefore \quad N = mg - 4mh\omega^2$$

(3) $\omega = \omega_0$ のとき, $N = 0$ となって離れるので,

$$0 = mg - 4mh{\omega_0}^2 \qquad \therefore \quad \omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

(4) 高さ h で円運動するとき, 右図のようになるので,



$$x = \sqrt{(3\sqrt{2}h)^2 - (2h)^2} = \sqrt{14}h$$

このとき, 糸の傾き角度を θ' とすると,

$$\begin{cases} \sin\theta' = \dfrac{\sqrt{14}h}{3\sqrt{2}h} = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \\ \cos\theta' = \dfrac{2h}{3\sqrt{2}h} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

また, 糸の張力の大きさを T' として, 鉛直方向の力のつりあいより,

$$0 = T' \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} - mg \qquad \therefore \quad T' = \frac{3}{\sqrt{2}}mg$$

向心方向の運動方程式は,

$$m \times (\sqrt{14} + 1)h \cdot \omega^2 = T' \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}$$

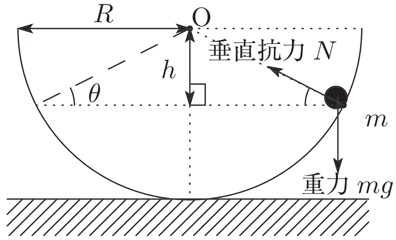
これらより, T' を消去すると,

$$(\sqrt{14} + 1)mh\omega^2 = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}mg \qquad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{7}g}{(2\sqrt{7} + \sqrt{2})h}}$$

【3】

《解答》

(1) 小球は右図のように重力と垂直抗力を受けている.



(2) 角度 θ を図のように設定すると,

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{h}{R} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{R^2-h^2}}{R} \end{cases}$$

鉛直方向の力のつりあいより,

$$0 = N\sin\theta - mg \qquad \therefore \quad N = \frac{R}{h}mg$$

半径は $\sqrt{R^2-h^2}$ なので, 向心方向の運動方程式は,

$$m\cdot\frac{{V_0}^2}{\sqrt{R^2-h^2}} = N\cos\theta$$

これらより,

$$m\cdot\frac{{V_0}^2}{\sqrt{R^2-h^2}} = \frac{R}{h}mg\cdot\frac{\sqrt{R^2-h^2}}{R} \qquad \therefore \quad V_0 = \sqrt{\frac{g(R^2-h^2)}{h}}$$

(3) (2) の V_0 をふまえると,

$$T = \frac{2\pi\sqrt{R^2-h^2}}{V_0} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

(4) 力学的エネルギーの保存より,

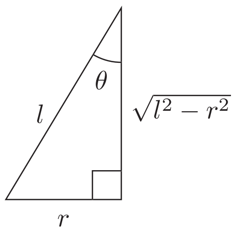
$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + mgh \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{{v_0}^2 - 2gh}$$

【4】

《解答》

(a) $F_{\mathrm{C}} = mr\omega^2$

(b) 右図で $\sin\theta = \dfrac{r}{l}$ なので，



$$F_{\mathrm{H}} = K(l - l_0)\sin\theta = K(l - l_0)\cdot\frac{r}{l}$$

(c) 右図で $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l}$ をふまえると，

$$0 = K(l - l_0)\cdot\frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l} - mg$$

(d) (a)，(b) より，向心方向の運動方程式は，

$$mr\omega^2 = K(l - l_0)\cdot\frac{r}{l} \qquad \therefore \quad l = \frac{Kl_0}{K - m\omega^2}$$

また，(c) を書き換えると，

$$\sqrt{l^2 - r^2} = \frac{mgl}{K(l - l_0)} \qquad \therefore \quad r = \sqrt{l^2 - \left\{\frac{mgl}{K(l - l_0)}\right\}^2}$$

l を代入して整理すると，

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{Kl_0}{K - m\omega^2}\right)^2 - \left(\frac{mg}{K}\cdot\frac{Kl_0}{m\omega^2 l_0}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{Kl_0}{K - m\omega^2}\right)^2 - \frac{g^2}{\omega^4}} \end{aligned}$$

(e) $l > 0$ なので，

$$\frac{Kl_0}{K - m\omega^2} > 0 \qquad \therefore \quad \omega < \sqrt{\frac{K}{m}}$$

(f) $r^2 > 0$ より，

$$\left(\frac{Kl_0}{K - m\omega^2}\right)^2 - \frac{g^2}{\omega^4} > 0 \qquad \therefore \quad \omega > \sqrt{\frac{Kg}{mg + Kl_0}}$$

１５章　円運動（２）

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) 点 P の高さは $l - l\cos\theta$ なので, 位置エネルギーは,

$$U = mg \cdot l(1-\cos\theta)$$

(2) 力学的エネルギーの保存より,

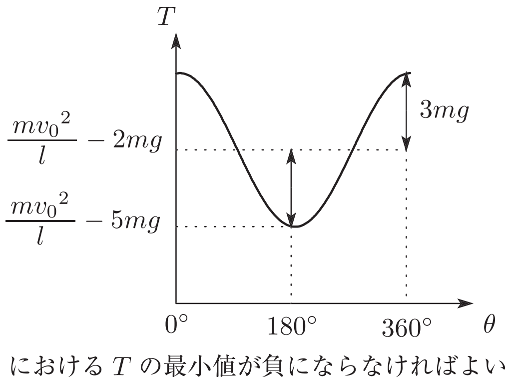
$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta) \qquad \therefore \quad v = \sqrt{{v_0}^2 - 2gl(1-\cos\theta)}$$

(3) $m\dfrac{v^2}{l} = T - mg\cos\theta$

(4) (2), (3) より v を消去すると,

$$\begin{aligned} T &= mg\cos\theta + \frac{m}{l}\{{v_0}^2 - 2gl(1-\cos\theta)\} \\ &= \left(\frac{m{v_0}^2}{l} - 2mg\right) + 3mg\cos\theta \end{aligned}$$

これを図示すると下図のようになる.



(5) $\theta = 180°$ における T の最小値が負にならなければよいので,

$$\frac{m{v_0}^2}{l} - 5mg \geqq 0 \qquad \therefore \quad v_0 \geqq \sqrt{5gl}$$

【2】

《解答》

(イ) P 点における速さを v_1 とし，点 O を重力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mga = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + mga\cos\theta_1 \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{v^2 + 2ga(1-\cos\theta_1)}$$

(ロ) M が球面から受ける力を f とすると，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{{v_1}^2}{a} = mg\cos\theta_1 - f$$

これと (イ) より，

$$m\cdot\frac{v^2 + 2ga(1-\cos\theta_1)}{a} = mg\cos\theta_1 - f$$

$$\therefore \quad f = 3mg\cos\theta_1 - \left(\frac{mv^2}{a} + 2mg\right)$$

(ハ) (ロ) で $\theta_1 = \theta_2$ のとき，$f = 0$ となるので，

$$3mg\cos\theta_2 - \left(\frac{mv^2}{a} + 2mg\right) = 0 \qquad \therefore \quad \cos\theta_2 = \frac{v^2 + 2ag}{3ag}$$

(ニ) B 点において，接線方向の力のつり合いより，

$$0 = mg\sin 30^\circ - F \qquad \therefore \quad F = \frac{1}{2}mg$$

(ホ) B 点において，向心方向の力のつり合いより，

$$0 = mg\cos 30^\circ - N \qquad \therefore \quad N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

(ヘ) B 点では $F = \mu N$ となっているので，

$$\frac{1}{2}mg = \mu\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}mg \qquad \therefore \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ト) C 点において，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{V^2}{a} = mg\cos 60^\circ \qquad \therefore \quad V = \sqrt{\frac{1}{2}ga}$$

【3】

《解答》

(ア) 小球の速さを v とし，点 A を重力の位置エネルギーの基準として, 力学的エネルギーの保存より，

$$0+0=\frac{1}{2}mv^2+mg\cdot(-R\sin\theta) \qquad \therefore \quad v=\sqrt{2gR\sin\theta}$$

(イ) 小球について，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{R}=N-mg\sin\theta$$

これと (ア) より，

$$m\cdot\frac{2gR\sin\theta}{R}=N-mg\sin\theta \qquad \therefore \quad N=3mg\sin\theta$$

(ウ) 台について，鉛直方向の力のつりあいより，

$$0=N'-Mg-N\sin\theta \qquad \therefore \quad N'=Mg+N\sin\theta$$

(エ) 台について，水平方向の力のつりあいより，

$$0=f'-N\cos\phi \qquad \therefore \quad f'=N\cos\phi$$

(オ) $\theta=\phi$ において，台がすべり出さないための条件 $f'\leqq\mu N'$ より，

$$3mg\sin\phi\cdot\cos\phi\leqq\mu(Mg+3mg\sin\phi\cdot\sin\phi)$$

$$\therefore \quad \frac{M}{m}\geqq\frac{3\sin\phi(\cos\phi-\mu\sin\phi)}{\mu}$$

【4】

《解答》

(1) $\dfrac{1}{2}kx^2$

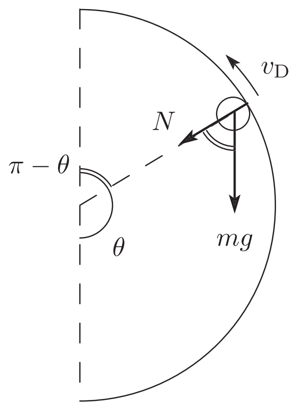
(2) 力学的エネルギーの保存より,

$$0+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2+0 \qquad \therefore \quad v_0=x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(3) 点 C を重力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より,

$$0+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2+mg\cdot 2r \qquad \therefore \quad v=\sqrt{\frac{kx^2}{m}-4gr}$$

(4) 点 D における速さを v_{D} とし，点 C を重力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より,



$$0+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{D}}}^2+mg\{r+r\cos(\pi-\theta)\}$$

$$\therefore \quad v_{\mathrm{D}}=\sqrt{\frac{kx^2}{m}-2gr(1-\cos\theta)}$$

また，向心方向の運動方程式は,

$$m\frac{{v_{\mathrm{D}}}^2}{r}=N+mg\cos(\pi-\theta)$$

これらより v_{D} を消去すると,

$$\frac{m}{r}\left\{\frac{kx^2}{m}-2gr(1-\cos\theta)\right\}=N-mg\cos\theta$$

$$\therefore \quad N=\left(\frac{kx^2}{r}-2mg\right)+3mg\cos\theta$$

(5) $\theta=\pi$ における N の最小値が負にならなければよいので,

$$\frac{kx^2}{r}-5mg\geqq 0 \qquad \therefore \quad x\geqq\sqrt{\frac{5mgr}{k}}$$

添削課題

《解答》

(1) 点 O を重力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgr = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{p}}^2 + mg \cdot r\cos\theta \quad \cdots ①$$

点 p における向心方向の運動方程式は,

$$m\frac{{v_\mathrm{p}}^2}{r} = mg\cos\theta - 0 \quad \cdots ②$$

①，②より，v_p を消去すると，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgr = \frac{1}{2}m \cdot gr\cos\theta + mgr\cos\theta \qquad \therefore \quad \cos\theta = \frac{{v_0}^2 + 2gr}{3gr}$$

(2) 点 O を重力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{u_0}^2 + mg \cdot (-r) = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{q}}^2 + mg \cdot r\cos\phi \quad \cdots ③$$

点 q における向心方向の運動方程式は,

$$m\frac{{v_\mathrm{q}}^2}{r} = mg\cos\phi - 0 \quad \cdots ④$$

③，④より，v_q を消去すると，

$$\frac{1}{2}m{u_0}^2 - mgr = \frac{1}{2}m \cdot gr\cos\phi + mgr\cos\phi \qquad \therefore \quad \cos\phi = \frac{{u_0}^2 - 2gr}{3gr}$$

点 p と点 q が一致するときは，$\cos\theta = \cos\phi$ なので,

$$\frac{{v_0}^2 + 2gr}{3gr} = \frac{{u_0}^2 - 2gr}{3gr} \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgr = \frac{1}{2}m{u_0}^2 - mgr$$

すなわち，小物体 P と小物体 Q の力学的エネルギーは一致している必要がある．

配点

(1)，(2) 各 50 点

《解説》

(2) は，次のように，もっと簡単に示すこともできる．

点 p と点 q が一致して $\theta = \phi$ となるとき，②，④より，v_p と v_q は等しいことが分かる．同じ位置で速さが等しく，P と Q は質量も等しいので，P と Q は力学的エネルギーが一致している．

１６章　万有引力（１）

問題

■演習

【1】

《解答》

(ア) $f = \dfrac{GMm}{l^2}$

(イ) $a = \dfrac{V^2}{l}$

(ウ) $m\dfrac{V^2}{l} = \dfrac{GMm}{l^2}$

(エ) $V = \sqrt{\dfrac{GM}{l}}$

(オ) $T = \dfrac{2\pi l}{V} = 2\pi l\sqrt{\dfrac{l}{GM}}$

(カ) (オ) の式を 2 乗すると，T の 2 乗は l の 3 乗に比例している．

(キ) $m'g = \dfrac{GMm'}{R^2}$

(ク) (キ) より $MG = gR^2$ と表せるので，これを (オ) の式に代入すると，

$$T = 2\pi l\sqrt{\frac{l}{gR^2}} = \frac{2\pi l}{R}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(ケ) (ク) の式に $l = 60R$ を代入すると，

$$T = \frac{2\pi \cdot 60R}{R}\sqrt{\frac{60R}{g}} = 120\pi\sqrt{\frac{60R}{g}}$$

与えられた数値を代入すると，

$$T = 120 \times 3.1 \times \frac{7.7 \times (2.5 \times 10^3)}{3.1} = 2.31 \times 10^6 [\mathrm{s}]$$

1[日]=24×3600[s] をふまえると，

$$T = \frac{2.31 \times 10^6}{24 \times 3600} \fallingdotseq 27\text{ 日}$$

【2】

《解答》

(ア) $F=\dfrac{GMm}{r^2}$

(イ) $\dfrac{2\pi}{T}$

(ウ) $r\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2=\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$

(エ) (ア), (ウ) をふまえると，運動方程式は,

$$m\cdot\frac{4\pi^2 r}{T^2}=\frac{GMm}{r^2}\qquad\therefore\quad T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

(オ) 速さは $r\cdot\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi r}{T}$ なので，運動エネルギーは,

$$K=\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2=\frac{2\pi^2 mr^2}{T^2}$$

(カ) (エ), (オ) より,

$$K=\frac{2\pi^2 mr^2}{\dfrac{4\pi^2}{GM}r^3}=\frac{GMm}{2r}$$

(キ) $U=-\dfrac{GMm}{r}$

(ク) (カ), (キ) より,

$$K+U=\frac{GMm}{2r}+\frac{-GMm}{r}=-\frac{GMm}{2r}$$

【3】

《解答》

(1) (ア) 接線方向

(a) $v\Delta t$

(b) $\Delta S = \dfrac{1}{2}R \cdot v\Delta t$

(c) $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}Rv$

(イ) 等速円運動

(2) (ウ) 太陽

(d) $\dfrac{v^2}{R}$

(e) $F = m\dfrac{v^2}{R}$

(f) $T = \dfrac{2\pi R}{v}$

(g) 問題文の③，④ 式より，v を消去すると，

$$F = \frac{m}{R}\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$$

(h) 問題文の ⑤，⑥ 式より，T^2 を消去すると，

$$F = \frac{4\pi^2 mR}{R^3/k} = \frac{4\pi^2 km}{R^2}$$

(3) (エ) 二

(オ) 反比例

(カ) 比例

(キ) 引力

(ク) 万有引力

【4】

《解答》

(1) (a) $F=\dfrac{GMm}{R^2}$

(b) (a) の F が重力 mg なので，

$$mg=\frac{GMm}{R^2}\qquad \therefore\quad g=\frac{GM}{R^2}$$

(2) (c) $U_{\mathrm{R}}=-\dfrac{GMm}{R}$

(d) 力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{-GMm}{R}=0+\frac{-GMm}{2R}\qquad \therefore\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

(e) 無限遠点で速さが 0 に収束する場合について，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{R}}}^2+\frac{-GMm}{R}=0+0\qquad \therefore\quad v_{\mathrm{R}}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

ここで (b) より $GM=gR^2$ と表せるので，

$$v_{\mathrm{R}}=\sqrt{\frac{2\cdot gR^2}{R}}=\sqrt{2gR}$$

与えられた数値を代入すると，

$$\begin{aligned}v_{\mathrm{R}}&=\sqrt{2\times 9.8\times 6.4\times 10^6}\\&=112\times 10^2\\&\fallingdotseq 1.1\times 10^4[\mathrm{m/s}]\end{aligned}$$

P2J
高２東大物理

Z-KAI

会員番号		氏　名	