本科 2 期 9 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

東大物理

１４章　直流回路論（１）

問題

■演習

【１】

《解答》

A (1)　電場の大きさを E とすると，

$$E = \frac{V}{L}$$

(2)　$|(-e) \cdot E| = \dfrac{eV}{L}$

(3)　一定の速度で移動するとき，電子の運動方程式は，

$$0 = \frac{eV}{L} - ku \qquad \therefore \quad u = \frac{eV}{kL}$$

(4)　時間 t の間に通過する電子数は，

$$N = n \times S \cdot ut \qquad \therefore \quad \frac{N}{t} = nS \times u$$

(5)　時間 t の間に通過する電気量の大きさは，

$$Q = |(-e) \cdot N| = enSut$$

電流の定義より，

$$I = \frac{Q}{t} = enS \times u$$

(6)　(3)，(5) より，

$$I = enS \cdot \frac{eV}{kL} = \frac{e^2 nS}{kL} \times V$$

(7)　(6) とオームの法則より，電気抵抗を R とすると，

$$R = \frac{V}{I} = \frac{k}{e^2 n} \cdot \frac{L}{S}$$

(8)　抵抗率を ρ とすると，

$$\rho = \frac{k}{e^2 n}$$

(9)　$\dfrac{eV}{L} \cdot ut = \dfrac{eVt}{L} \times u$

(10)　$ku \cdot ut = kt \times u^2$

(11)　$n \cdot SL$

(12)　(10)，(11) より，時間 t の間に電流がする仕事を W とすると，

$$W = ku^2 t \cdot nSL = knSL \times u^2 t$$

B (1)　図 1 で右向き，$E = \dfrac{V}{l}$

(2)　図 1 で左向き，$F = \dfrac{eV}{l}$

(3)　金属の陽イオン (正イオン) が熱振動していて，電子がこの陽イオン (正イオン) に衝突することにより運動を妨げられるため．

(4)　一定の平均の速さ v で運動する電子の運動方程式は，

$$m \cdot 0 = e\frac{V}{l} - kv \qquad \therefore \quad v = \frac{eV}{kl}$$

(5)　体積 vS に含まれる自由電子が 1 秒間に通過するので，

$$n \times vS = nvS$$

(6)　通過する電子数が等しいので，

$$n_1 v_1 S = n_2 v_2 S \qquad \therefore \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

(7)　E_1，E_2 の定義より，

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\dfrac{1}{2}m{v_2}^2 \times n_2 v_2 S}{\dfrac{1}{2}m{v_1}^2 \times n_1 v_1 S} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 \times \frac{n_2}{n_1}$$

ここで，(6) をふまえると，

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^3 \times \frac{n_2}{n_1} = \frac{{n_1}^2}{{n_2}^2}$$

(8)　電子が移動する向きは図 2 で左向きなので，単位時間あたりでは，

$$\begin{cases} \text{A と B の接続断面} \;\cdots\; \text{右から } E_2 \text{が運び込まれて左へ } E_1 \text{が運び出される．} \\ \text{B と C の接続断面} \;\cdots\; \text{右から } E_1 \text{が運び込まれて左へ } E_2 \text{が運び出される．} \end{cases}$$

(7) より，$n_1 > n_2$ のとき $E_2 > E_1$ なので，単位時間につき，

$$\begin{cases} \text{A と B の接続断面} \;\cdots\; E_2 - E_1 \text{のエネルギーを熱として放出する．} \\ \text{B と C の接続断面} \;\cdots\; E_2 - E_1 \text{のエネルギーを熱として吸収する．} \end{cases}$$

【2】

《解答》

(あ) I_1+I_2

(い) 回路の方程式は，

$$E_2=2RI_2+2R(I_1+I_2)\qquad\therefore\quad E_2=2RI_1+4RI_2\ \cdots①$$

(う) 回路の方程式は，

$$E_1-E_2=2RI_1+RI_1-2RI_2\qquad\therefore\quad E_1=3RI_1-2RI_2+E_2\ \cdots②$$

(え) ①，② より，I_2 を消去すると，

$$\frac{E_2-2RI_1}{4R}=\frac{E_2-E_1+3RI_1}{2R}\qquad\therefore\quad I_1=\frac{2E_1-E_2}{8R}$$

よって，求める電圧は，

$$V=E_1-2RI_1=\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{4}E_2$$

(a) 4

(お) $I_1+I_2+I_3$

(か) 回路の方程式は，

$$\begin{cases}E_3=2RI_3+2R(I_1+I_2+I_3)\\E_2=2RI_2+R(I_1+I_2)+2R(I_1+I_2+I_3)\\E_1=3RI_1+R(I_1+I_2)+2R(I_1+I_2+I_3)\end{cases}$$

これらより，I_2，I_3 を消去して，

$$I_1=\frac{4E_1-2E_2-E_3}{16R}$$

よって，求める電圧は，

$$V=E_1-2RI_1=\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{4}E_2+\frac{1}{8}E_3$$

$E_3=E$，$E_1=E_2=0$ のときは，

$$V=\frac{1}{8}E$$

(b) 8

【3】

《解答》

(ア) $S = 2.2 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^2$ で $l = 1.0\,\mathrm{m}$ のとき，抵抗値が $20\,\Omega$ なので，

$$20\,\Omega = \rho \cdot \frac{1.0\,\mathrm{m}}{2.2 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^2} \qquad \therefore \quad \rho = 4.4 \times 10^{-7}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$$

(イ) 回路の方程式は，

$$6.0\,\mathrm{V} = (20\,\Omega + R) \times 0.10\,\mathrm{A} \qquad \therefore \quad R = 40\,\Omega$$

(ウ) XY 全体での電位差は，$20\,\Omega \times 0.10\,\mathrm{A} = 2.0\,\mathrm{V}$ なので，E_1 の起電力と等しい $1.5\,\mathrm{V}$ を XP で生じるときは，

$$\frac{\mathrm{XP}}{100\,\mathrm{cm}} = \frac{1.5\,\mathrm{V}}{2.0\,\mathrm{V}} \qquad \therefore \quad \mathrm{XP} = 75\,\mathrm{cm}$$

(エ) (ウ) と同様に立式すると，

$$\frac{80\,\mathrm{cm}}{100\,\mathrm{cm}} = \frac{E_2}{2.0\,\mathrm{V}} \qquad \therefore \quad E_2 = 1.6\,\mathrm{V}$$

(オ) $\mathrm{XP} = 50\,\mathrm{cm}$ で E_1 の起電力と等しい $1.5\,\mathrm{V}$ を生じたので，

$$1.5\,\mathrm{V} = 10\,\Omega \times I \qquad \therefore \quad I = 0.15\,\mathrm{A}$$

(カ) XY 全体での電位差は，$20\,\Omega \times 0.15\,\mathrm{A} = 3.0\,\mathrm{V}$ なので，

$$\frac{80\,\mathrm{cm}}{100\,\mathrm{cm}} = \frac{E_3}{3.0\,\mathrm{V}} \qquad \therefore \quad E_3 = 2.4\,\mathrm{V}$$

【4】

《解答》

(1) コンデンサーの電荷を Q，電流を I とすると，

$$I = \frac{\varDelta Q}{\varDelta t} = C\frac{\varDelta E}{\varDelta t}$$

数値を代入すると，

$$5.0\times10^{-6}\,\mathrm{A} = C\times2.0\,\mathrm{V/s} \qquad \therefore\quad C = 2.5\times10^{-6}\,\mathrm{F}$$

(2) 回路の方程式は，

$$\begin{cases} E_1 = 1.0r_1 + 1.0\times10 \\ E_1 = 0.60r_1 + 0.60\times18 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} E_1 = 12\,\mathrm{V} \\ r_1 = 2.0\,\Omega \end{cases}$$

(3) 並列接続の合成抵抗は各抵抗の抵抗値よりも小さいので，

$$\begin{cases} r_\mathrm{a} + r_\mathrm{b} > 6.0 \quad \cdots ① \\ r_\mathrm{c} > 6.0 \quad \cdots ② \end{cases}$$

また，$r = 6.0\,\Omega$ のとき，

$$\frac{1}{r_\mathrm{a}+r_\mathrm{b}} + \frac{1}{r_\mathrm{c}} = \frac{1}{6.0} \quad \cdots ③$$

条件 ② より，r_c=$10\,\Omega$ または $12\,\Omega$ に限定される．

(i) r_c=$10\,\Omega$ のとき，③ 式より $r_\mathrm{a}+r_\mathrm{b}$=$15\,\Omega$ となるが，これを満たす組み合わせは存在しない．

(ii) r_c=$12\,\Omega$ のとき，③ 式より $r_\mathrm{a}+r_\mathrm{b}$=$12\,\Omega$ となり，これを満たす組み合わせは $2.0\,\Omega$ と $10\,\Omega$．これは条件 ① も満たしている．以上より，

$$\begin{cases} r_\mathrm{a} = 2.0\,\Omega, \quad r_\mathrm{b} = 10\,\Omega, \quad r_\mathrm{c} = 12\,\Omega \\ r_\mathrm{a} = 10\,\Omega, \quad r_\mathrm{b} = 2.0\,\Omega, \quad r_\mathrm{c} = 12\,\Omega \end{cases}$$

(4) 電流計を流れる電流を I とすると，回路の方程式は，

$$\begin{cases} E_2 = r_\mathrm{s}I + R_\mathrm{m}I \\ E_2 = r_0I + R_0I \end{cases}$$

これらより，

$$(r_\mathrm{s}+R_\mathrm{m})I = (r_0+R_0)I \qquad \therefore \quad R_0 = R_\mathrm{m} + r_\mathrm{s} - r_0 \quad \cdots(*)$$

ここで，$r_0 = 1.1r_\mathrm{s}$ なので，

$$R_0 = R_\mathrm{m} + r_\mathrm{s} - 1.1r_\mathrm{s} = R_\mathrm{m} - 0.1r_\mathrm{s}$$

(5) $(*)$ より，

$$R_0 - R_\mathrm{m} = r_\mathrm{s} - r_0 \qquad \therefore \quad |R_\mathrm{m} - R_0| = |r_\mathrm{s} - r_0|$$

r_s，R_m の相対誤差の条件より，

$$\begin{cases} \left|\dfrac{r_\mathrm{s} - r_0}{r_\mathrm{s}}\right| \times 100 = 10 \\ \left|\dfrac{R_\mathrm{m} - R_0}{R_\mathrm{m}}\right| \times 100 \leqq 0.1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} |r_\mathrm{s} - r_0| = \dfrac{r_\mathrm{s}}{10} \\ |R_\mathrm{m} - R_0| \leqq \dfrac{R_\mathrm{m}}{1000} \end{cases}$$

以上より，

$$\frac{r_\mathrm{s}}{10} \leqq \frac{R_\mathrm{m}}{1000} \qquad \therefore \quad \frac{r_\mathrm{s}}{R_\mathrm{m}} \leqq \frac{1}{100}$$

添削課題

《解答》

(1) キルヒホッフの法則より，

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 & \cdots ① \\ rI_1 + 3rI_3 = E_1 & \cdots ② \\ 2rI_2 + 3rI_3 = E_2 & \cdots ③ \end{cases}$$

以上より，

$$I_1 = \frac{5E_1 - 3E_2}{11r}, \quad I_2 = \frac{4E_2 - 3E_1}{11r}, \quad I_3 = \frac{2E_1 + E_2}{11r}$$

(2) $I_1 > 0$ かつ $I_2 > 0$ より，

$$\begin{cases} 5E_1 - 3E_2 > 0 \\ 4E_2 - 3E_1 > 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \frac{3}{5}E_2 < E_1 < \frac{4}{3}E_2$$

(3) S を閉じてⒶに電流が流れていないとき $I_3 = I_1$ となるので，回路の方程式は

$$\begin{cases} rI_1 + 3rI_1 = E_1 & \text{(右側のループで時計回りを正)} \\ 2rI_2 + RI_2 = 2E_1 & \text{(左側のループで反時計回りを正)} \\ 2rI_2 - rI_1 = 2E_1 - E_1 & \text{(中央のループで時計回りを正)} \end{cases}$$

これらより I_1，I_2 を消去すると，

$$2r \cdot \frac{2E_1}{2r + R} - r \cdot \frac{E_1}{4r} = 2E_1 - E_1 \qquad \therefore \quad R = \frac{6}{5}r$$

《解説》

(1) の計算では，①～③のすべてに含まれている I_3 を先に求めるのがよい．求めた I_3 を②，③に代入することで I_1，I_2 が求められる．

配点

100 点

(1)60 点

(2),(3) 各 20 点

１５章　直流回路論（2）

問題

■演習

【1】

《解答》

I

(a) リン P やヒ素 As

(b) アルミニウム Al やインジウム In

(c) ダイオード

(d) 整流作用

(e) 逆方向電流

(f) コンデンサーの充電が完了して $I[\mathrm{A}] = 0\,\mathrm{A}$ となったとき，$V[\mathrm{V}] = 1.7\,\mathrm{V}$ となる．このとき，コンデンサーに蓄えられる電荷を $Q_1[\mathrm{C}]$ とすると，

$$Q_1[\mathrm{C}] = 5000 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} \times 1.7\,\mathrm{V} = 8.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{C}$$

(g) $R[\Omega] = 0\,\Omega$ のとき，$V[\mathrm{V}] = 0\,\mathrm{V}$ となるので，$I[\mathrm{A}] = 0.85\,\mathrm{A}$ が流れる．このとき，抵抗 r の電流は 0 A なので，求める電流を $I_\mathrm{R}[\mathrm{A}]$ とすると，

$$I_\mathrm{R} + 0 = I \qquad \therefore \quad I_\mathrm{R}[\mathrm{A}] = 0.85\,\mathrm{A}$$

(h) コンデンサーの電圧が 0 V なので，蓄えられた電荷は 0 C.

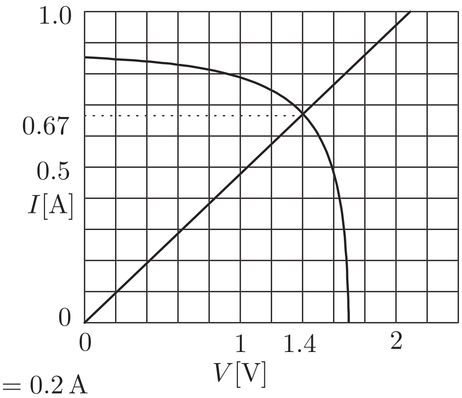
(i) 抵抗 r と可変抵抗 R の電流の和が，太陽電池の電流と一致するので，

$$\frac{V}{3} + \frac{V}{7} = I \qquad \therefore \quad I = \frac{10}{21}V$$

これを図 1 に記入して，特性曲線との交点を求めると，

$$V[\mathrm{V}] = 1.4\,\mathrm{V},\ I[\mathrm{A}] = 0.67\,\mathrm{A}$$

このとき，可変抵抗 R を流れる電流は，



$$I_\mathrm{R}[\mathrm{A}] = \frac{1.4\,\mathrm{V}}{7\,\Omega} = 0.2\,\mathrm{A}$$

(j) コンデンサーの電圧が 1.4 V なので，蓄えられた電荷を $Q_2[\mathrm{C}]$ とすると，

$$Q_2[\mathrm{C}] = 5000 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} \times 1.4\,\mathrm{V} = 7.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{C}$$

II

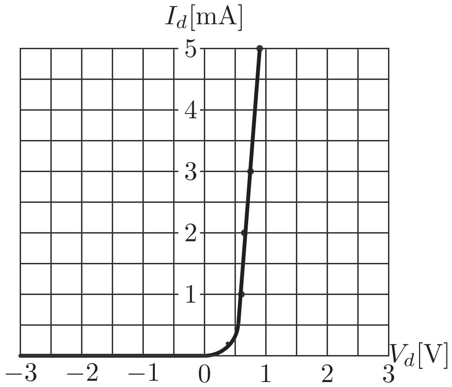
(1) (a) ダイオード D と抵抗の全体で電圧が V なので，

$$V = V_d + rI \qquad \therefore \quad V_d = V - rI$$

(b) I の単位に注意して，(a) の式に数値を代入すると，

$$\begin{aligned}(\text{イの } V_d) &= 1.05 - 200 \times (2.00 \times 10^{-3}) \\ &= 0.65\,\mathrm{V} \\ (\text{ロの } V_d) &= 1.34 - 200 \times (3.00 \times 10^{-3}) \\ &= 0.74\,\mathrm{V} \\ (\text{ハの } V_d) &= 1.90 - 200 \times (5.00 \times 10^{-3}) \\ &= 0.90\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

(c)



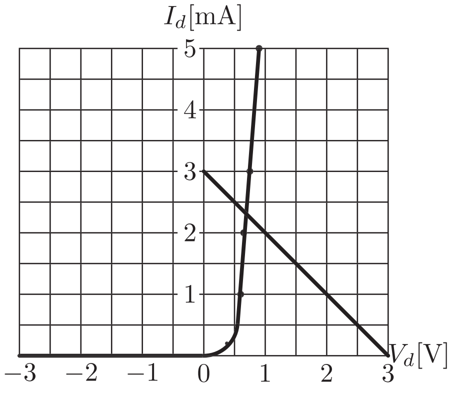
(2) (a) キルヒホッフの法則より，

$$\begin{cases} I = 2I_d \\ E = RI + V_d + rI_d \end{cases} \qquad \therefore \quad I_d = \frac{E - V_d}{2R + r}$$

(b) I_d の単位に注意して，

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{3 - V_d}{2 \times 400 + 200}\,[\mathrm{A}] \\ &= (3 - V_d)\,[\mathrm{mA}] \end{aligned}$$

これを (1)(c) の図中に記入すると，下図のようになる．



(c) (1)(c) と (2)(b) の両方を満たす値を，グラフの交点から読み取ることにより，

$$I_d = 2.3\,\mathrm{mA}, \qquad V_d = 0.7\,\mathrm{V}$$

(d) $I = 4.6\,\mathrm{mA}$

【2】
《解答》

(1) (a) $Q_1 = \dfrac{V^2}{R}$

(b) $R = k_1 \times T$

(c) $Q_2 = k_2 \times T^4$

(d) T が一定のとき，$Q_1 = Q_2$ となるので，

$$\frac{V^2}{k_1 T} = k_2 T^4 \qquad \therefore \quad T = \left(\frac{V^2}{k_1 k_2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

このとき抵抗は，

$$R = k_1 \left(\frac{V^2}{k_1 k_2}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{{k_1}^4 V^2}{k_2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

よって，

$$I = \frac{V}{R} = \left(\frac{k_2}{{k_1}^4}\right)^{\frac{1}{5}} \times V^{\frac{3}{5}} \quad \cdots (*)$$

(2) $V = 100\,\mathrm{V}$ のとき，$IV = 100\,\mathrm{W}$ なので，

$$I \times 100\,\mathrm{V} = 100\,\mathrm{W} \qquad \therefore \quad I = 1\,\mathrm{A}$$

このとき，$(*)$ より

$$1\,\mathrm{A} = \left(\frac{k_2}{{k_1}^4}\right)^{\frac{1}{5}} \times (100\,\mathrm{V})^{\frac{3}{5}} \qquad \therefore \quad \left(\frac{k_2}{{k_1}^4}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{3}{5}}$$

$(*)$ に代入すると，

$$I = \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{3}{5}} \times V^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{V}{100}\right)^{\frac{3}{5}}$$

$V = 10\,\mathrm{V}$ のとき，

$$I = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{5}} = \left\{\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{10}}\right\}^2 \fallingdotseq 0.50^2 = 0.25\,\mathrm{A}$$

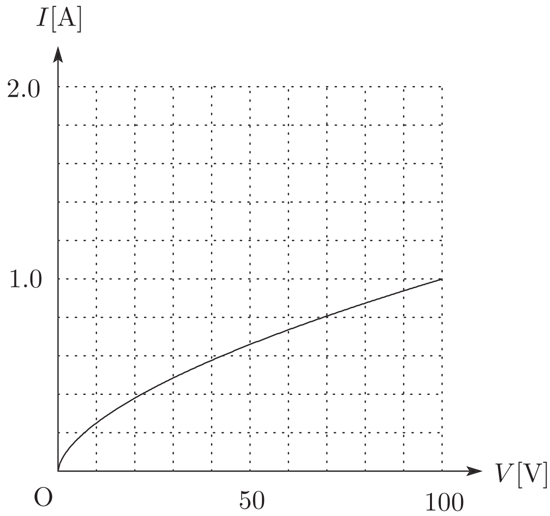
$V = 30\,\mathrm{V}$ のとき，

$$I = \left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{3}{5}} = \left\{\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{3}{10}}\right\}^2 \fallingdotseq 0.70^2 = 0.49\,\mathrm{A}$$

$V = 50\,\mathrm{V}$ のとき，

$$I = \left(\frac{5}{10}\right)^{\frac{3}{5}} = \left\{\left(\frac{5}{10}\right)^{\frac{3}{10}}\right\}^2 \fallingdotseq 0.81^2 = 0.66\,\mathrm{A}$$

また，$V = 0\,\mathrm{V}$ のとき，$I = 0\,\mathrm{A}$ であることもふまえると，下図を描ける．



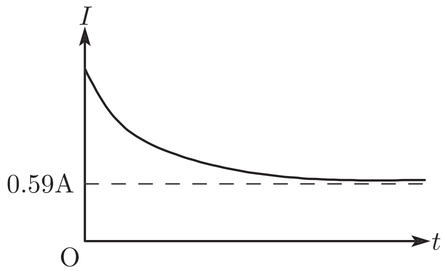
(3) 回路の方程式は

$$100\,\Omega \times I + V = 100\,\mathrm{V} \qquad \therefore \quad \frac{I}{1\,\mathrm{A}} + \frac{V}{100\,\mathrm{V}} = 1$$

これと，(2) で描いた特性曲線の交点を求めて

$$V = 41\,\mathrm{V}, \qquad I = 0.59\,\mathrm{A}$$

また，初期状態では電球の温度が低く抵抗値が小さいので，電流は $0.59\,\mathrm{A}$ よりも大きい．よって，I の時間経過の概形は下図となる．



【3】

《解答》

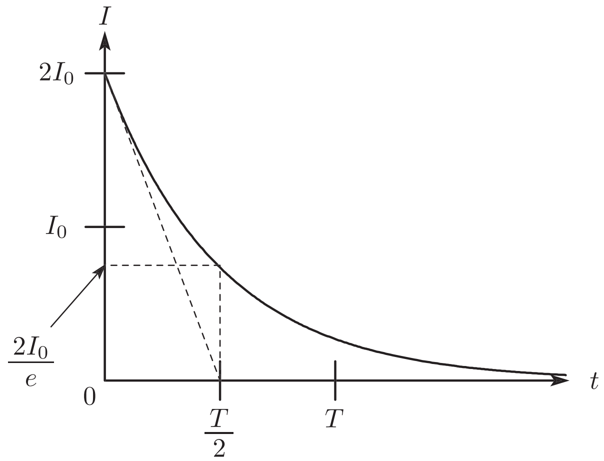
(a) 図 2 の影を付けた部分の面積は，コンデンサー 1 に蓄えられた電荷に等しい．回路の方程式は，

$$\begin{cases} \text{充電開始のとき} \quad \cdots \quad V = RI_0 + \dfrac{0}{C} \\ \\ \text{充電終了のとき} \quad \cdots \quad V = R\cdot 0 + \dfrac{I_0 T}{C} \end{cases}$$

これらより，

$$RI_0 = \frac{I_0 T}{C} \qquad \therefore \quad C = \frac{T}{R}$$

(b) $I_0 = \dfrac{V}{R}$，$T = RC$ と表せるので，R を $\dfrac{R}{2}$ にしたときは初期電流が 2 倍になり，また電流が $\dfrac{1}{e}$ 倍となる時刻は $\dfrac{1}{2}$ 倍になる．



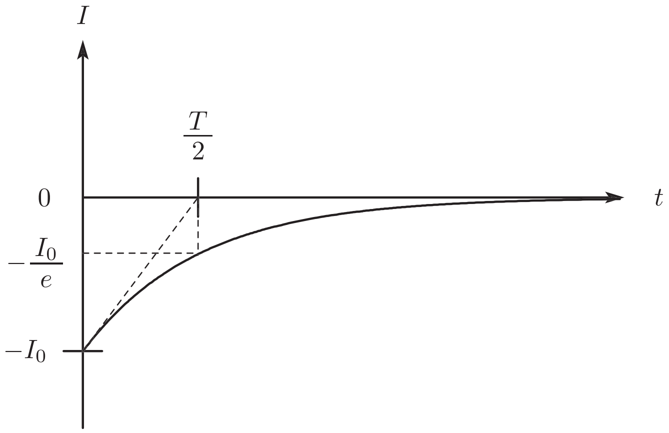
(c) $t = 0$ では，コンデンサー 1 の電位差が V なので，回路の方程式は，

$$V = R\cdot(-I_0{}') + \frac{0}{C} \qquad \therefore \quad I_0{}' = -\frac{V}{R} = -I_0$$

また，電荷の保存より，

$$CV' + CV' = CV \qquad \therefore \quad V' = \frac{V}{2}$$

(a) で蓄えられた電荷の半分がコンデンサー 1 から 2 へ移動するので，グラフと横軸の間の面積は図 2 の半分となる．このため，電流が初期値の $\dfrac{1}{e}$ 倍になる時刻は $T' = \dfrac{T}{2}$ となる．

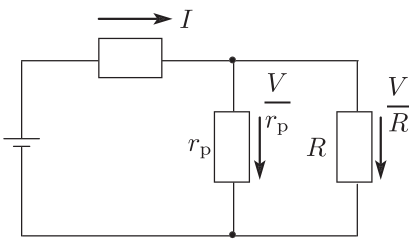


(d) 静電エネルギーの減少分が抵抗で消費されるので，

$$W = \frac{1}{2}CV^2 - \frac{1}{2}CV'^2 \times 2 = \frac{1}{4}CV^2$$

【4】

《解答》



(1) (a) 測定値 I，V の関係は，

$$I = \frac{V}{r_\mathrm{p}} + \frac{V}{R} \qquad \therefore \quad R' = \frac{V}{I} = \frac{r_\mathrm{p}R}{R + r_\mathrm{p}}$$

(b) (a) より，R' の誤差は，

$$\Delta R = R' - R = -\frac{R^2}{R + r_\mathrm{p}} \qquad \therefore \quad \left|\frac{\Delta R}{R}\right| = \frac{R}{R + r_\mathrm{p}}$$

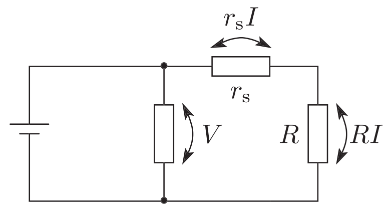
(c) 測定値 V は抵抗に加わる正確な電圧なので，

$$\begin{cases} P = V \cdot \dfrac{V}{R} \\ P' = VI = V \cdot \dfrac{V}{R'} \end{cases}$$

これらより，P' の誤差は，

$$\Delta P = P' - P = \frac{V^2(R - R')}{RR'} \qquad \therefore \quad \left|\frac{\Delta P}{P}\right| = \left|\frac{R}{R'} - 1\right| = \frac{R}{r_\mathrm{p}}$$

(2) (d) 測定値 I，V の関係は，



$$V = r_\mathrm{s}I + RI \qquad \therefore \quad R' = \frac{V}{I} = R + r_\mathrm{s}$$

よって，R' の誤差は，

$$\Delta R = R' - R = r_\mathrm{s} \qquad \therefore \quad \left|\frac{\Delta R}{R}\right| = \frac{r_\mathrm{s}}{R}$$

(e) 測定値 I は抵抗を流れる正確な電流なので，

$$\begin{cases} P = RI \cdot I \\ P' = VI = R'I \cdot I \end{cases}$$

よって，P' の誤差は，

$$\Delta P = P' - P = (R' - R)I^2 \qquad \therefore \quad \left|\frac{\Delta P}{P}\right| = \left|\frac{R'}{R} - 1\right| = \frac{r_\mathrm{s}}{R}$$

(3) 図 1 で $\left|\dfrac{\Delta R}{R}\right|$ が 1%以下となるとき，

$$\frac{1\mathrm{k\Omega}}{1\mathrm{k\Omega} + r_\mathrm{p}} \leqq \frac{1}{100} \qquad \therefore \quad r_\mathrm{p} \geqq 99\mathrm{k\Omega}$$

図 2 で $\left|\dfrac{\Delta R}{R}\right|$ が 1%以下となるとき，

$$\frac{r_\mathrm{s}}{1\mathrm{k\Omega}} \leqq \frac{1}{100} \qquad \therefore \quad r_\mathrm{s} \leqq 10\Omega$$

(4) ダイオードの抵抗値を R_{D} とする．図 3 で $I \geqq 1\mathrm{mA}$ のとき，

$$\frac{1}{R_{\mathrm{D}}} \geqq \frac{1\mathrm{mA}}{0.6\mathrm{V}} \qquad \therefore \quad R_{\mathrm{D}} \leqq 600\,\Omega = 0.6\,\mathrm{k}\Omega$$

図 1 で抵抗のかわりにダイオードを接続したとき，

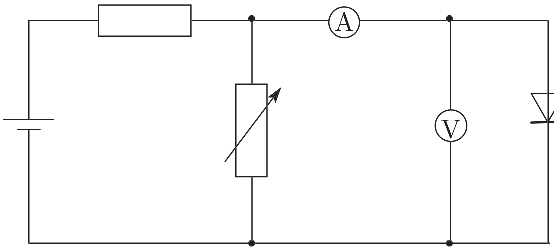
$$\left|\frac{\Delta P}{P}\right| = \frac{R_{\mathrm{D}}}{r_{\mathrm{p}}} \leqq \frac{0.6\mathrm{k}\Omega}{20\mathrm{k}\Omega} \qquad \therefore \quad \left|\frac{\Delta P}{P}\right| \leqq 0.03$$

また，図 2 で抵抗のかわりにダイオードを接続したとき，

$$\left|\frac{\Delta P}{P}\right| = \frac{r_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{D}}} \geqq \frac{50\Omega}{600\Omega} \qquad \therefore \quad \left|\frac{\Delta P}{P}\right| \geqq 0.083$$

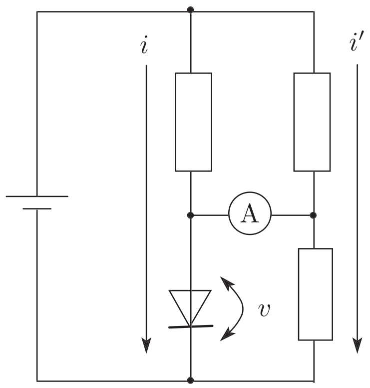
測定値 V，I をそのまま用いて図 3 の関係を確かめるためには，この相対誤差が小さいことが必要なので，図 2 よりも図 1 の方がよい．

さらにここでは $I = 1\mathrm{mA}$ まで減少させる必要があるので，可変抵抗器は下図の位置に接続する．



測定の方法 $\cdots$ 可変抵抗の値を 0Ω からわずかに増加させて電流計と電圧計の指示値を読みとり，その後さらに可変抵抗の値をわずかに増加させては指示値を読みとることを繰り返せばよい．

(5) 電流計の指示値が 0 のとき，電流は右図のように設定できるので，



$$\begin{cases} 40\Omega \times i = 80\Omega \times i' \\ v = 120\Omega \times i' \end{cases}$$

これらより，i' を消去すると，

$$v = 120 \times \frac{1}{2} i \qquad \therefore \quad i = \frac{1}{60} v$$

これを図 3 に記入して，ダイオードの特性曲線との交点を求めると，

$$\begin{cases} i = 12\mathrm{mA} \\ v = 0.72\mathrm{V} \end{cases} \quad \therefore \quad (\text{消費電力}) \fallingdotseq 8.6\mathrm{mW}$$

このとき，左側のループに注目した回路の方程式より，

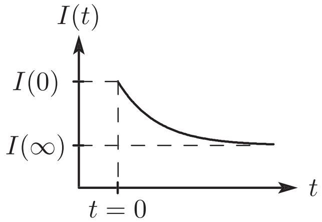
$$(\text{起電力}) = 40\Omega \times i + v = 1.2\mathrm{V}$$

添削課題

《解答》

I フィラメントの消費電力が大きいと，平衡状態での温度は高い．温度が高いと，フィラメント内にある原子の熱振動が激しいので，自由電子の移動が強く妨げられる．このため，電圧 V と電流 I が大きいとフィラメントの抵抗が大きく，図 1 のような特性曲線となる．

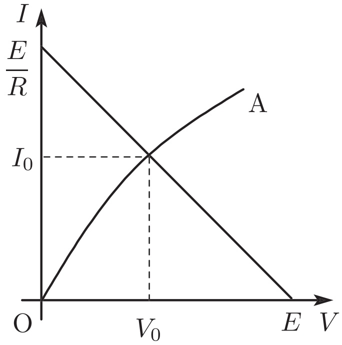
II スイッチを入れた直後は，フィラメントの温度が低く，フィラメントの抵抗も小さいため，大きな電流が流れる．その後，ジュール熱が発生してフィラメントの温度が上昇するに従い，フィラメントの抵抗も大きくなり，電流は減少していく．十分に時間が経過して，発生するジュール熱と外部に放出するエネルギーが一致すると温度は一定となり，電流も一定になる．よって，電流変化の概略は右図のようになる．



III (1) 電球の電流を I，電圧を V とすると，回路の方程式は，

$$E = V + RI \qquad \therefore \quad I = \frac{E - V}{R}$$

これをグラフ化して，A の特性曲線との交点を読みとると，実現する I_0 が得られる．



(2) エネルギーの保存より，

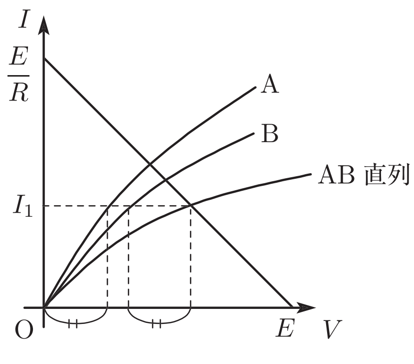
$$EI_0 = RI_0{}^2 + P \qquad \therefore \quad P = EI_0 - RI_0{}^2$$

IV (3) 電球 A，B の電圧をそれぞれ V_A，V_B とすると，回路の方程式は，

$$E = V_\mathrm{A} + V_\mathrm{B} + RI$$

$$\therefore \quad I = \frac{E - (V_\mathrm{A} + V_\mathrm{B})}{R}$$

あらかじめ A と B の特性曲線を V 軸方向に合成しておき，(1) と同様に交点を求めると，実現する I_1 が得られる．



(4) 同じ電流 I_1 のとき，

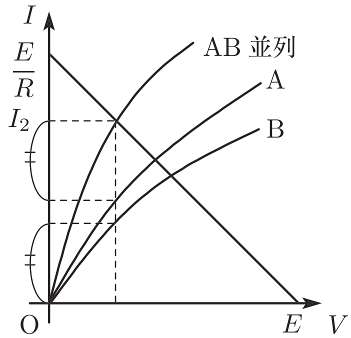
$$V_\mathrm{B} > V_\mathrm{A} \qquad \therefore \quad V_\mathrm{B} I_1 > V_\mathrm{A} I_1 \quad \cdots \quad \text{B の方が明るい．}$$

V (5) 電球 A，B の電流をそれぞれ $I_{\rm A}$，$I_{\rm B}$ とすると，回路の方程式は，

$$E = V + R(I_{\rm A} + I_{\rm B})$$

$$\therefore \quad I_{\rm A} + I_{\rm B} = \frac{E - V}{R}$$

あらかじめ A と B の特性曲線を I 軸方向に合成しておき，(1) と同様に交点を求めると，実現する I_2 が得られる．



(6) 同じ電圧 V_2 のとき，

$$I_{\rm A} > I_{\rm B} \qquad \therefore \quad V_2 I_{\rm A} > V_2 I_{\rm B} \quad \cdots \ \text{A の方が明るい．}$$

配点

100 点

I　20 点

II　20 点

III　(1)12 点，　(2)8 点

IV　(3)12 点，　(4)8 点

V　(5)12 点，　(6)8 点

《解説》

I，II で述べるべき内容の違いに注意が必要である．

まず I では，平衡状態について，V と I が大きい場合と小さい場合とを比較してその違いを述べる のであるから，次のように考えをすすめていく．

V と I がより大きい．　→　特性曲線から $\dfrac{I}{V}$ はより小さいことが分かる．

→　フィラメントの抵抗 $\dfrac{V}{I}$ はより大きいことが分かる．

→　温度がより高いためと言える．

→　消費電力がより大きいためと言える．

これに対して II では，平衡状態に向かっていく時間発展について述べる のであるから，次のように考えをすすめる．

電流が流れる．　→　ジュール熱が発生する．

→　フィラメントの温度が上昇する．

→　フィラメントの抵抗値が増加する．

→　電流が減少する．

最終的には平衡状態に達するが，この平衡状態は「発生するジュール熱と放出するエネルギーのバランスで決まる」ことにも言及しておくのがよい．

１６章　磁場とローレンツ力

問題

■演習

【1】

《解答》

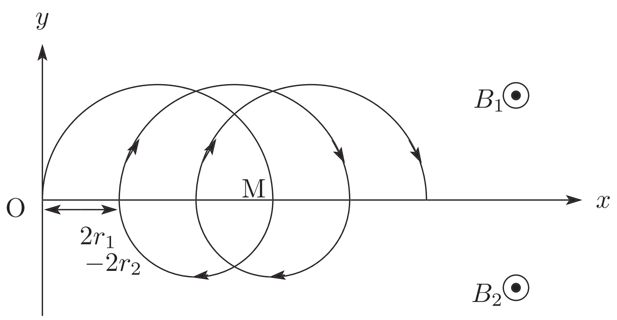
(1) 原点 O で受けるローレンツ力の向きが $+x$ 方向なので，点 M に向かって運動する．運動方程式の向心成分は，

$$m\frac{v^2}{r_1} = qvB_1 \qquad \therefore \quad r_1 = \frac{mv}{qB_1}$$

このとき線分 OM の長さは，

$$l = 2r_1 = \frac{2mv}{qB_1}$$

(2)



$y>0$ の円運動では半径 $r_1 = \dfrac{mv}{qB_1}$，$y<0$ の円運動では半径 $r_2 = \dfrac{mv}{qB_2}$ だが，ここでは $B_2 > B_1$ なので $r_1 > r_2$ となる．このため，円軌道の中心点は x 軸上を正の向きに移動していく．

(3) 荷電粒子が x 軸を $+y$ 方向に通過する時間間隔 T は，

$$T = \frac{\pi r_1}{v} + \frac{\pi r_2}{v} = \frac{\pi m}{q}\left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}\right)$$

この間の変位が $2(r_1 - r_2)$ なので，

$$V = \frac{2(r_1 - r_2)}{T} = \frac{2(B_2 - B_1)}{\pi(B_2 + B_1)}v$$

【2】

《解答》

(1) 自由電子の電荷の大きさを e，自由電子が $-x$ 方向に移動していく速さを v とおく．自由電子が受けるローレンツ力の向きは $-y$ 方向で，大きさは

$$f = |-e \cdot vB| = evB$$

(2) A 面には負電荷，A$'$ 面には正電荷が現れ，$-y$ 方向の電場をつくる．$-x$ 方向に移動する自由電子が受ける力のつりあいより

$$0 = eE - evB \qquad \therefore \quad E = vB$$

(3) 金属板の x 軸に垂直な断面積を S とおく．時間 $\mathit{\Delta} t$ の間に自由電子集団は $v \cdot \mathit{\Delta} t$ だけ移動するので，通過する電荷の大きさは，

$$I \cdot \mathit{\Delta} t = |-e \times N \times S \cdot v\mathit{\Delta} t| \qquad \therefore \quad v = \frac{I}{eNS}$$

これと (2) より，

$$E = \frac{IB}{eNS} \qquad (-y \text{ 方向})$$

(4) 荷電粒子の電荷が正の場合にも，粒子が受けるローレンツ力の向きは (1) と同じく $-y$ 方向となる．このため，(2) と異なり A 面に正電荷，A$'$ 面に負電荷が現れ，$+y$ 方向の電場をつくる．電圧計を A 面と A$'$ 面に接続して電位差を測定すると，荷電粒子の電荷が正の場合は A 面が高電位として得られる．それに対し，電荷が負の電子の場合は A$'$ 面が高電位として得られるので，A 面と A$'$ 面のどちらの電位が高いかに注目することで，荷電粒子の電荷の正負が決められる．金属板の y 方向の長さを a，z 方向の長さを b，荷電粒子の電荷を q(符号を含めて) とおいて，(1)〜(3) と同様に考えることにより，

$$E_y = \frac{IB}{qNab} \qquad \text{（向きを含めて）}$$

このとき，A$'$ 面を基準とした A 面の電位は，

$$V = E_y \cdot a = \frac{IB}{qNb} \qquad \therefore \quad N = \frac{IB}{qbV}$$

よって，測定可能な I，B，b，V から N を求めることができる．

【3】

《解答》

(1) (a) ローレンツ力

(b) qv_0B

(2) (c) $m\dfrac{{v_0}^2}{r_0}=qv_0B \qquad \therefore \quad r_0=\dfrac{mv_0}{qB}$

(d) $t_0=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi r_0}{v_0}=\dfrac{\pi m}{qB}\cdots$ 速さによらない.

(3) (e) $\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}m{v_0}^2+qV$

(f) $v=\sqrt{{v_0}^2+\dfrac{2qV}{m}}$

(g) $t_0=\dfrac{\pi m}{qB}$

(4) (h) $\dfrac{1}{2}m{v_1}^2=\dfrac{1}{2}m{v_0}^2+2qV$

(i) $v_1=\sqrt{{v_0}^2+\dfrac{4qV}{m}}$

(j) $r_1=\dfrac{m}{qB}\sqrt{{v_0}^2+\dfrac{4qV}{m}}$

(5) (k) qV

(l) $\dfrac{1}{2}m{v_n}^2=\dfrac{1}{2}m{v_0}^2+2nqV \qquad \therefore \quad v_n=\sqrt{{v_0}^2+\dfrac{4nqV}{m}}$

(m) $r_n=\dfrac{m}{qB}\sqrt{{v_0}^2+\dfrac{4nqV}{m}}$

(6) (n) 最大の速さとなるとき,

$$\frac{mv_{\max}}{qB}=R \qquad \therefore \quad v_{\max}=\frac{qBR}{m}$$

(7) $\dfrac{v_{\max}}{c}=\dfrac{(1.6\times10^{-19})\times(5.0\times10^{-2})\times1.7}{(3.0\times10^{8})\times(1.7\times10^{-27})}=2.7\,\%$

【4】

《解答》

(1) qvB[N]

(2) ローレンツ力により，x 方向では電荷の分布にかたよりを生じ，電極 $\mathrm{P_R}$ が正で電極 $\mathrm{P_L}$ は負に帯電する．このとき，$-x$ 方向に生じている電界の大きさを E[V/m] とすると，運動方程式の x 成分は，

$$0 = qvB - qE \qquad \therefore \quad E = vB[\mathrm{V/m}]$$

(3) 電極 $\mathrm{P_R}$ が正極となり，起電力の大きさは，

$$V = Ed = vBd[\mathrm{V}]$$

(4) 回路の方程式より，電流の大きさは $I = \dfrac{vBd}{R}$[A] となる．このとき，抵抗の消費電力は，

$$P = RI^2 = \frac{(vBd)^2}{R}[\mathrm{W}]$$

(5) y 方向に加える外力 F[N] の仕事率が (4) の消費電力と一致するので，

$$Fv = \frac{(vBd)^2}{R} \qquad \therefore \quad F = \frac{vB^2d^2}{R}[\mathrm{N}]$$

この力を加える面積は $hd[\mathrm{m^2}]$ なので，加える圧力は，

$$p = \frac{F}{hd} = \frac{vB^2d}{Rh}[\mathrm{N/m^2}]$$

添削課題

《解答》

I (1) evB

(2) $+x$ 方向

(3) 運動方程式の向心成分は,

$$m\frac{v^2}{r} = evB \qquad \therefore \quad r = \frac{mv}{eB}$$

II xy 平面に投影した円運動の半径は $r' = \dfrac{mv_y}{eB}$ なので，この円運動の周期は,

$$T = \frac{2\pi r'}{v_y} = \frac{2\pi m}{eB}$$

また，z 方向で作用する力は 0 なので，速度の z 成分は変化しない．よって，時間 T で z 方向に進む距離は,

$$l = v_z T = \frac{2\pi m v_z}{eB}$$

III 運動エネルギーが W のとき,

$$\frac{1}{2}m{v_y}^2 = W \qquad \therefore \quad v_y = \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

また，z 方向には移動しないこともふまえると，検出位置は

$$\begin{cases} x = 2\cdot\dfrac{mv_y}{eB} = \dfrac{2\sqrt{2mW}}{eB} \\ z = 0 \end{cases}$$

IV p，d が行う円運動の半径が等しいとき,

$$\frac{\sqrt{2mW_\mathrm{p}}}{eB} = \frac{\sqrt{2\cdot 2mW_\mathrm{d}}}{eB} \qquad \therefore \quad \frac{W_\mathrm{d}}{W_\mathrm{p}} = \frac{1}{2}$$

V x，y 方向の運動に電界の影響はないので，x 座標は III と同様で,

$$x_\mathrm{p} = \frac{2\sqrt{2mW_\mathrm{p}}}{eB}$$

入射してから検出されるまでの時間は,

$$t_\mathrm{p} = \frac{1}{2}T = \frac{\pi m}{eB}$$

また，z 方向の運動については,

$$m\ddot{z} = eE \qquad \therefore \quad \ddot{z} = \frac{eE}{m}$$

初期条件も加味すると，検出位置では,

$$z_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\cdot\frac{eE}{m}{t_\mathrm{p}}^2 = \frac{\pi^2 mE}{2eB^2}$$

VI d では，$m_\mathrm{d} = 2m$，$W_\mathrm{d} = \dfrac{1}{2}W_\mathrm{p}$ なので，

$$\begin{cases} x_\mathrm{d} = \dfrac{2\sqrt{2m_\mathrm{d}W_\mathrm{d}}}{eB} = \dfrac{2\sqrt{2mW_\mathrm{p}}}{eB} \\ z_\mathrm{d} = \dfrac{\pi^2 m_\mathrm{d} E}{2eB^2} = \dfrac{\pi^2 mE}{eB^2} \end{cases}$$

配点

100 点

I(1)→6 点，　(2)→6 点，　(3)→8 点，　II→10 点，　III→20 点 (各 10 点)，

IV→10 点，　V→20 点 (各 10 点)，　VI→20 点 (各 10 点)

Z-KAI

会員番号		氏　名	