

高1 選抜東大数学

高1 東大数学



1 章 微分・積分 (1)

問題

【1】 (1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+2} = -\frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{(2+x)^2} - \frac{1}{4} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{4 - (2+x)^2}{4(2+x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(x+4)}{4x(x+2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x+4)}{4(x+2)^2} = -\frac{1}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{1}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $x \rightarrow a$ のとき

$$(\text{分子}) \rightarrow 0, \quad (\text{分母}) \rightarrow 0$$

となるので、ともに $x-a$ という因数をもつことに注意して

$$\begin{aligned} a^3 + a^2x - 5ax^2 + 3x^3 &= (x-a)(3x^2 - 2ax - a^2) = (x-a)^2(3x+a) \\ a^3 - 3ax^2 + 2x^3 &= (x-a)(2x^2 - ax - a^2) = (x-a)^2(2x+a) \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^3 + a^2x - 5ax^2 + 3x^3}{a^3 - 3ax^2 + 2x^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^2(3x+a)}{(x-a)^2(2x+a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x+a}{2x+a}$$

(i) $a = 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

(ii) $a \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x+a}{2x+a} = \frac{4}{3}$$

(i), (ii) より、極限值は

$$\begin{cases} a = 0 \text{ のとき} & \frac{3}{2} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & \frac{4}{3} \end{cases} \quad (\text{答})$$

【2】 (1) $f(x)$ が n 次式とすると $f'(x)$ は $(n-1)$ 次式であり

左辺の次数: $2(n-1)$, 右辺の次数: n または 2

であるから

$$2(n-1) = n \text{ のとき, } n = 2$$

$$2(n-1) = 2 \text{ のとき, } n = 2$$

したがって, $f(x)$ は **2 次式** である.

ここで, $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと, $f'(x) = 2ax + b$ であるから, 与式に代入して

$$\begin{aligned} f'(x)\{f'(x) + 2\} &= 8f(x) + 12x^2 - 5 \\ \iff (2ax + b)(2ax + b) + 2(2ax + b) &= 8(ax^2 + bx + c) + 12x^2 - 5 \\ \iff 4a^2x^2 + (4ab + 4a)x + b^2 + 2b &= (8a + 12)x^2 + 8bx + (8c - 5) \end{aligned}$$

これが x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} 4a^2 = 8a + 12 \\ 4ab + 4a = 8b \\ b^2 + 2b = 8c - 5 \end{cases} \quad \therefore (a, b, c) = (3, -3, 1), \left(-1, -\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right)$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 3x + 1, \text{ または, } f(x) = -x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{5}{9} \quad (\text{答})$$

(2) $f(x)$ が 1 次式のとき, $f(x) = ax + b$ とすると

$$a(x+3) = 2(ax+b) + 8x - 12$$

$$\therefore 8x - 12 = -ax + 3a - 2b$$

$$\therefore a = -8, b = -6$$

よって

$$f(x) = -8x - 6$$

これは $f(0)$ が素数に矛盾.

また, $f(0)$ が素数だから, $f(x)$ は定数ではない.

$f(x)$ が次数が 2 以上の多項式のとき, $f(x)$ の最高次の項を ax^n とすると $f'(x)$ の最高次の項は nax^{n-1} であり

左辺の最高次の項: nax^n , 右辺の最高次の項: $2ax^n$

であるから, 係数を比較して

$$na = 2a \quad \therefore n = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

を得る. よって, $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと, $f'(x) = 2ax + b$ であるから, 与式に代入して

$$\begin{aligned} (x+3)f'(x) &= 2f(x) + 8x - 12 \\ \iff (x+3)(2ax+b) &= 2(ax^2+bx+c) + 8x - 12 \\ \iff 2ax^2 + (6a+b)x + 3b &= 2ax^2 + (2b+8)x + 2c - 12 \end{aligned}$$

これが x についての恒等式より

$$\begin{cases} 6a + b = 2b + 8 & \dots \textcircled{1} \\ 3b = 2c - 12 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

② より

$$2c = 3(b + 4)$$

であるから、 c は 3 の倍数. さらに $f(0) = c$ より素数である. ゆえに、 $c = 3$

①, ② より、 $a = 1, b = -2$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad (\text{答})$$

【3】 (1) $f'(x) = 3x^2 - 2x$ であるから、点 $(1, f(1)) = (1, 1)$ における $f(x)$ の接線の方程式は

$$y = f'(1)(x - 1) + 1 \quad \therefore y = x \quad (\text{答})$$

(2) $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の傾きは

$$f'(t) = 3t^2 - 2t = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

よって、 $t = \frac{1}{3}$ のとき、傾きは最小になる. このとき

$$\text{接点} : \left(\frac{1}{3}, \frac{25}{27}\right), \quad \text{傾き} : -\frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

(3) $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{1}{3}$, y 軸方向に $-\frac{25}{27}$ だけ平行移動すると

$$\begin{aligned} y + \frac{25}{27} &= \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 - \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 1 \\ \iff y &= x^3 - \frac{1}{3}x \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

移動後の曲線 ① は、奇関数であり、原点に関して対称であるから、 $y = f(x)$ のグラフは、点 $\left(\frac{1}{3}, \frac{25}{27}\right)$ に関して対称である. [証明終]

【4】 接点を $(t, t^3 - 3t^2)$ とすると、 $y' = 3x^2 - 6x$ より、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 6t)(x - t) + (t^3 - 3t^2) \\ \therefore y &= (3t^2 - 6t)x - 2t^3 + 3t^2 \end{aligned}$$

これが点 $(1, 14)$ を通るので

$$\begin{aligned} 14 &= 3t^2 - 6t - 2t^3 + 3t^2 \\ \iff 2t^3 - 6t^2 + 6t + 14 &= 0 \\ \iff t^3 - 3t^2 + 3t + 7 &= 0 \\ \iff (t + 1)(t^2 - 4t + 7) &= 0 \end{aligned}$$

t は実数より、 $\therefore t = -1$

したがって、接線の方程式は

$$y = 9x + 5 \quad (\text{答})$$

【5】 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a$

とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$$

(i) $a > 0$ のとき

$x = 0$ で極大, $x = 2a$ で極小となる.

$f(0) = 4a > 0$ であるから

$$\begin{cases} f(2a) > 0 \text{ のとき} & \text{解 1 つ} \\ f(2a) = 0 \text{ のとき} & \text{解 2 つ} \\ f(2a) < 0 \text{ のとき} & \text{解 3 つ} \end{cases}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} f(2a) &= 8a^3 - 12a^3 + 4a = 4a - 4a^3 \\ &= 4a(1 - a^2) \end{aligned}$$

より, 実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 1 < a \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

(ii) $a < 0$ のとき

$x = 0$ で極小, $x = 2a$ で極大となる.

$f(0) = 4a < 0$ であるから

$$\begin{cases} f(2a) < 0 \text{ のとき} & \text{解 1 つ} \\ f(2a) = 0 \text{ のとき} & \text{解 2 つ} \\ f(2a) > 0 \text{ のとき} & \text{解 3 つ} \end{cases}$$

となる. ここで

$$f(2a) = 4a(1 - a^2)$$

より, 実数解の個数は

$$\begin{cases} -1 < a < 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = -1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a < -1 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

(iii) $a = 0$ のとき

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0$$

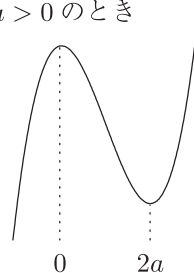
であるから, 実数解の個数は 1 個.

以上より, 実数解の個数は

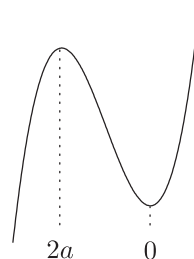
$$\begin{cases} -1 < a < 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = \pm 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a < -1, 1 < a \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

(答)

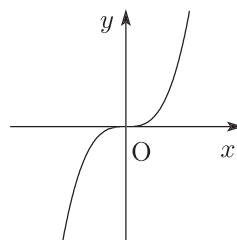
$a > 0$ のとき



$a < 0$ のとき



$a = 0$ のとき



- 【6】 (1) $f(x)$ を x の 2 次式 $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割ったときの商を $P(x)$ とすると、実数 a, b を用いて

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)P(x) + ax + b$$

とおける。この式に、 $x = \alpha$, $x = \beta$ を代入すると

$$f(\alpha) = a\alpha + b \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f(\beta) = a\beta + b \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて

$$f(\alpha) - f(\beta) = (\alpha - \beta)a$$

$\alpha \neq \beta$ であるから

$$a = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$$

したがって

$$\begin{aligned} b &= f(\alpha) - a\alpha \\ &= f(\alpha) - \alpha \cdot \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

以上より、求めるあまりは

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}x + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta} \quad (\text{答})$$

- (2) $f(x)$ を x の 2 次式 $(x-\alpha)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると、実数 p, q を用いて

$$f(x) = (x-\alpha)^2 Q(x) + px + q \quad \dots \textcircled{3}$$

とおける。また

$$f'(x) = 2(x-\alpha)Q(x) + (x-\alpha)^2 Q'(x) + p \quad \dots \textcircled{4}$$

である。

③, ④ に $x = \alpha$ を代入すると、それぞれ

$$f(\alpha) = p\alpha + q \quad \dots \textcircled{5}$$

$$f'(\alpha) = p \quad \dots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥ より、 p, q は、

$$p = f'(\alpha), \quad q = f(\alpha) - p\alpha = f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$$

と表せる。よって、求めるあまりは

$$f'(\alpha)x + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) \quad (\text{答})$$

【7】 (I) 関数を $\sin x$ の多項式にする.

$$y = 4 \sin^3 x + 3(1 - \sin^2 x) - 1 = 4 \sin^3 x - 3 \sin^2 x + 2$$

ここで, $\sin x = t$ とおくと

$$y = f(t) = 4t^3 - 3t^2 + 2$$

であり, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ であるから, $0 \leq \sin x \leq 1$ となる.

したがって

$$y = f(t) = 4t^3 - 3t^2 + 2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

の最大値, 最小値を求めればよい.

$$f'(t) = 6t(2t - 1)$$

より, 増減表は以下ようになる.

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(t)$	0	-	0	+	
$f(t)$	2	$\searrow$	極小	$\nearrow$	3

これより

$$\begin{cases} \text{最大値: } f(1) = 3 \\ \text{最小値: } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4} \end{cases}$$

を得る. よって, 求める最大値, 最小値は

$$\begin{cases} x = 90^\circ \text{ のとき} & \text{最大値 } 3 \\ x = 30^\circ \text{ または } 150^\circ \text{ のとき} & \text{最小値 } \frac{7}{4} \end{cases} \quad (\text{答})$$

〔II〕 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の対称性に着目して

$$t = \sin \theta + \cos \theta$$

とおき、両辺を 2 乗すると

$$t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

これより

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4 \sin^3 \theta - 9 \sin \theta \cos \theta + 4 \cos^3 \theta + 1 \\ &= 4(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) - 9 \sin \theta \cos \theta + 1 \end{aligned}$$

ここで、 $t = \sin \theta + \cos \theta$ とし、 t の関数 $g(t)$ として

$$\begin{aligned} f(\theta) &= g(t) = 4t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2} \right) - 9 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} + 1 \\ &= -2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t + \frac{11}{2} \end{aligned}$$

また

$$t = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) = \sqrt{2} \sin(45^\circ + \theta)$$

であるから、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より、 $45^\circ \leq 45^\circ + \theta \leq 225^\circ$ となり

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin(45^\circ + \theta) \leq 1 \quad \therefore -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

以上より、題意は

$$g(t) = -2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t + \frac{11}{2} \quad (-1 \leq t \leq \sqrt{2})$$

の最大値、最小値を求めることに等しい。

$$g'(t) = -6t^2 - 9t + 6 = -3(2t^2 + 3t - 2) = -3(2t - 1)(t + 2)$$

より、 $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-3	$\nearrow$	$\frac{57}{8}$	$\searrow$	$2\sqrt{2} - \frac{7}{2}$

これより

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \text{ のとき} & \text{最大値 } \frac{57}{8} \\ t = -1 \text{ のとき} & \text{最小値 } -3 \end{cases} \quad (\text{答})$$

【8】 題意をみたすには、 $x > 0$ において、常に

$$(f(x) =) ax^3 + b - x^2 > 0$$

であればよい.

ここで、 $a = 0$ のとき、 $f(x) = b - x^2$ となり、 $b < 0$ であれば明らかに不適であり、 $b \geq 0$ のときは、 $x \geq \sqrt{b}$ で $f(x) \leq 0$ となるので不適. さらに、 $a < 0$ のときも明らかに不適である. したがって、 $a > 0$ としてよい.

$$f'(x) = 3ax^2 - 2x = x(3ax - 2)$$

$f'(x) = 0$ のとき、 $x = 0$, $\frac{2}{3a}$ である. これより、増減表は次のようになる.

x	0	...	$\frac{2}{3a}$	...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	b	$\searrow$		$\nearrow$

したがって

$$f\left(\frac{2}{3a}\right) = -\frac{4}{27a^2} + b > 0$$

であればよい.

以上より

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad b > \frac{4}{27a^2} \quad (\text{答})$$

2章 微分・積分 (2)

問題

【1】 〔I〕

$$\int_{-a}^a (x^3 + x^2 + 5x - 2)dx = 2 \int_0^a (x^2 - 2)dx = 2 \left(\frac{a^3}{3} - 2a \right)$$

より

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{a^3}{3} - 2a \right) &= 6 &\iff a^3 - 6a &= 9 \\ &&\iff a^3 - 6a - 9 &= 0 \\ &&\iff (a-3)(a^2 + 3a + 3) &= 0 \end{aligned}$$

a は実数なので, $\therefore a = 3$ (答)

$$\begin{aligned} \text{〔II〕 (1)} \quad (\text{与式}) &= \int_0^2 (-x+2)dx + \int_2^3 (x-2)dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 \\ &= 2(-2+4) + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) = \frac{5}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ より

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^2 (-x^2 + x + 2)dx + \int_2^3 (x^2 - x - 2)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 \\ &= 2 \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) + \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 6 \right) = \frac{31}{6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (\text{与式}) &= 2 \int_0^2 |x^2 - 1|dx = 2 \left\{ \int_0^1 (-x^2 + 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \right\} \\ &= 4 \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) + 2 \left(\frac{8}{3} - 2 \right) = 4 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad (\text{与式}) &= \int_{-1}^0 \{-x(x-1)\}dx + \int_0^1 x(x-1)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【2】両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_1^x f(t) dt &= 3x^2 - 6x \\ \therefore f(x) &= 3x^2 - 6x \quad (\text{答})\end{aligned}$$

$$x = 1 \text{ のとき, } \int_1^1 f(t) dt = 0 \text{ より}$$

$$1 - 3 + a = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\text{答})$$

【3】与式を計算すると

$$\begin{aligned}y &= \int_0^1 \left\{ \{f(x)\}^2 + a^2 x^2 + 2abx + b^2 - 2(ax + b)f(x) \right\} dx \\ &= a^2 \int_0^1 x^2 dx + 2ab \int_0^1 x dx - 2a \int_0^1 x f(x) dx \\ &\quad - 2b \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 b^2 dx + \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx\end{aligned}$$

である。ここで、 $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ は a 、 b の両方によらない定数であるから

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = k$$

とし、これと条件式を代入して

$$\begin{aligned}y &= a^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 2ab \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - 2a \cdot 3 - 2b \cdot 1 + b^2 \left[x \right]_0^1 + k \\ &= \frac{1}{3}a^2 + ab - 6a - 2b + b^2 + k \\ &= \frac{1}{3}a^2 + (b - 6)a + b^2 - 2b + k \\ &= \frac{1}{3} \left\{ a + 3 \cdot \frac{b - 6}{2} \right\}^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \frac{(b - 6)^2}{4} + b^2 - 2b + k \\ &= \frac{1}{3} \left\{ a + \frac{3}{2}(b - 6) \right\}^2 + \frac{1}{4}(b + 14)^2 - \frac{1}{4} \cdot 14^2 + k - 27\end{aligned}$$

したがって、 y の値が最小となるのは

$$a + \frac{3}{2}(b - 6) = 0 \quad \text{かつ} \quad b + 14 = 0$$

のときである。

$$\therefore a = 30, b = -14 \quad (\text{答})$$

【4】 [I] (1) $2x^2 - 5x + 3 = x - 1$ より

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 2)(x - 1) = 0 \quad \therefore x = 1, 2$$

これより

$$\begin{aligned} \int_1^2 \{x - 1 - (2x^2 - 5x + 3)\} dx &= \int_1^2 \{-2(x - 2)(x - 1)\} dx \\ &= \frac{2(2 - 1)^3}{6} \\ &= \frac{1}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $x(x - 1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ より

$$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1) = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}, 1$$

これより

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left\{ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - x(x - 1) \right\} dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left\{ -(x - 1) \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} \right)^3 \\ &= \frac{9}{16} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $y^2 + 1 = y + 7$ より

$$y^2 - y - 6 = (y + 2)(y - 3) = 0 \quad \therefore y = -2, 3$$

これより

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 \{y + 7 - (y^2 + 1)\} dy &= \int_{-2}^3 \{-(y + 2)(y - 3)\} dy \\ &= \frac{1}{6} (3 + 2)^3 \\ &= \frac{125}{6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[II] $y = x^2 + 2x$ の $x = t$ での接線は

$$y = (2t + 2)(x - t) + t^2 + 2t = 2(t + 1)x - t^2$$

$y = x^2 - 2x + 2$ の $x = s$ での接線は

$$y = (2s - 2)(x - s) + s^2 - 2s + 2 = 2(s - 1)x - s^2 + 2$$

これが一致するので

$$\begin{cases} t + 1 = s - 1 \\ -t^2 = -s^2 + 2 \end{cases}$$

$s = t + 2$ より

$$\begin{aligned} -t^2 &= -(t + 2)^2 + 2 \\ \therefore t &= -\frac{1}{2}, s = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

これより、共通接線は

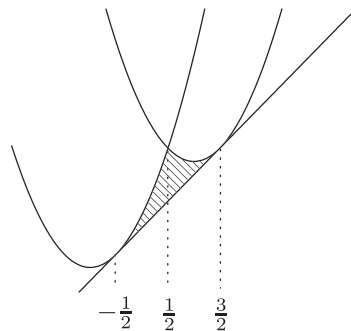
$$y = x - \frac{1}{4}$$

また、2 曲線の交点の x 座標は

$$x^2 + 2x = x^2 - 2x + 2 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

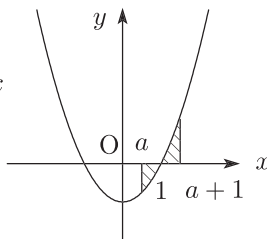
これより

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ x^2 + 2x - \left(x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\{ x^2 - 2x + 2 - \left(x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{2} \right)^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{3}{2} \right)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



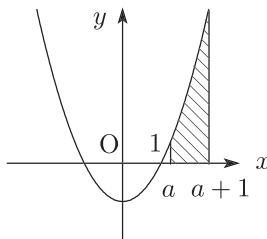
【5】 (1) (i) $0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_a^1 (-x^2 + 1)dx + \int_1^{a+1} (x^2 - 1)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_a^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^{a+1} \\ &= \frac{2}{3}a^3 + a^2 - a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$



(ii) $a \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+1} (x^2 - 1)dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_a^{a+1} \\ &= a^2 + a - \frac{2}{3} \end{aligned}$$



以上より

$$S = \begin{cases} \frac{2}{3}a^3 + a^2 - a + \frac{2}{3} & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \\ a^2 + a - \frac{2}{3} & (a \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(2) (i) $0 < a < 1$ のとき

S を a で微分すると, $S' = 2a^2 + 2a - 1$ であり, $S' = 0$ となるのは,

$$a = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

のときである.

(ii) $a \geq 1$ のとき

S を a で微分すると, $S' = 2a + 1 > 0$ である.

以上より, S の増減表は次のようになる.

a	0	...	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	...	1	
S'		-	0	+	+	+
S		$\searrow$	最小	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$

であるから, 最小とする a の値は

$$a = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \quad (\text{答})$$

【6】 与式より

$$f(x) = -\frac{1}{2} + x \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 tf(t)dt$$

ここで, $\int_0^1 f(t)dt = a$, $\int_0^1 tf(t)dt = b$ とおくと

$$f(x) = ax + b - \frac{1}{2}$$

とおける. これより

$$a = \int_0^1 \left(at + b - \frac{1}{2} \right) dt = \left[\frac{a}{2} t^2 + \left(b - \frac{1}{2} \right) t \right]_0^1 = \frac{a}{2} + b - \frac{1}{2}$$

したがって

$$\frac{a}{2} - b + \frac{1}{2} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

また

$$b = \int_0^1 t \left(at + b - \frac{1}{2} \right) dt = \left[\frac{a}{3} t^3 + \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{4} \right) t^2 \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} - \frac{1}{4}$$

したがって

$$\frac{a}{3} - \frac{b}{2} - \frac{1}{4} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, $a = 6$, $b = \frac{7}{2}$

よって

$$f(x) = 6x + 3 \quad (\text{答})$$

【7】

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1)$$

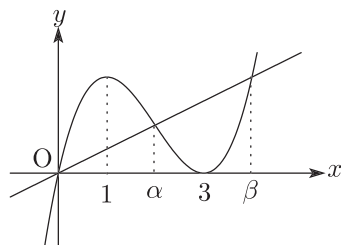
$y = mx$ と $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ の交点の x 座標を

$$0, \alpha, \beta \quad (\alpha, \beta \neq 0)$$

とする. $x^3 - 6x^2 + 9x = mx$ より

$$x(x^2 - 6x + 9 - m) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore \alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 9 - m$$



題意より

$$\int_0^\alpha (x^3 - 6x^2 + 9x - mx)dx = \int_\alpha^\beta \{mx - (x^3 - 6x^2 + 9x)\}dx$$

となればよいので

$$\begin{aligned} & \int_0^\alpha (x^3 - 6x^2 + 9x - mx)dx + \int_\alpha^\beta (x^3 - 6x^2 + 9x - mx)dx = 0 \\ \iff & \int_0^\beta (x^3 - 6x^2 + 9x - mx)dx = 0 \\ \iff & \frac{1}{4}\beta^4 - 2\beta^3 + \frac{9}{2}\beta^2 - \frac{m}{2}\beta^2 = 0 \end{aligned}$$

$\beta \neq 0$ より

$$\frac{1}{4}\beta^2 - 2\beta + \frac{9}{2} - \frac{m}{2} = 0$$

一方, $\textcircled{1}$ より

$$\beta^2 - 6\beta + 9 - m = 0$$

これより m を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\beta^2 - 2\beta + \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(\beta^2 - 6\beta + 9) &= 0 \\ -\beta^2 + 4\beta &= 0 \\ \beta(\beta - 4) &= 0 \quad \therefore \beta = 4 \quad (\because \beta \neq 0) \end{aligned}$$

このとき, $m = \beta^2 - 6\beta + 9$ より

$$m = 1 \quad (\text{答})$$

3章 ベクトル (1)

問題

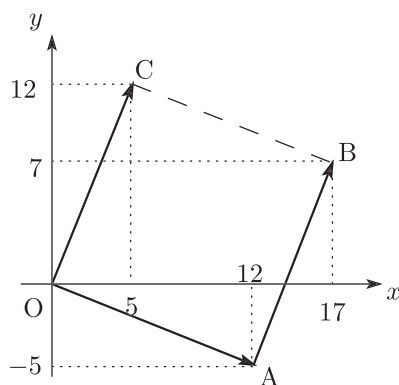
【1】 (1) $\vec{OC} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ より, C の座標は **(5, 12)** である. (答)

(2) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 12 \cdot 5 + (-5) \cdot 12 = 0$
 $\therefore \cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OA}| |\vec{OC}|} = 0$ (答)

(3) $|\vec{OA}| = |\vec{OC}| = 13$ かつ $\theta = 90^\circ$

であるから, 平行四辺形 $OABC$ は正方形である. その面積 S は

$S = 13^2 = \mathbf{169}$ (答)



- 【2】線分 CD と直線 AB との交点を H とおくと、
H は線分 CD の中点であり、 $CH \perp AB$ である。

る。

$$\overrightarrow{AH} = k \overrightarrow{b} \text{ とおくと}$$

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$$

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ より}$$

$$(k \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

よって

$$k |\overrightarrow{b}|^2 - \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$$

$$\therefore k = \frac{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{b}|^2}$$

したがって

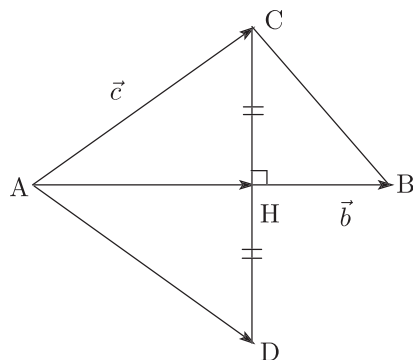
$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CH} = 2 \left(\frac{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{b}|^2} \cdot \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} \right) \quad (\text{答})$$

<別解>

$$\overrightarrow{AH} = \left| \frac{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{b}| |\overrightarrow{c}|} \right| \cdot \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{b}|^2} \cdot \overrightarrow{b}$$

よって

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CH} = 2(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC}) = 2 \left(\frac{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{b}|^2} \cdot \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} \right) \quad (\text{答})$$



【3】 O を始点とする位置ベクトルを考え、 $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ とする.

$$(1) \quad \vec{p} = \vec{a}$$

であるから、点 P は

点 A に一致

する. よって、① (答)

$$(2) \quad \vec{a} \cdot \vec{p} = 0$$

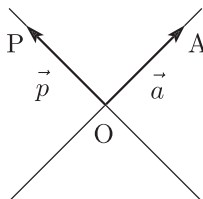
であるから、 $\vec{a} \neq \vec{0}$ より

$$\overrightarrow{OP} = \vec{0} \quad \text{または} \quad \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP}$$

したがって、点 P は

直線 OA に垂直で O を通る直線上

に存在する. よって、④ (答)



$$(3) \quad \vec{a} \cdot \vec{p} = |\vec{a}| |\vec{p}| \cos \angle AOP > 0$$

であるから

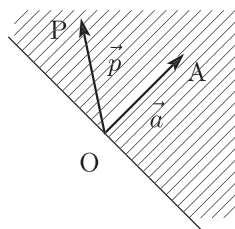
$$0^\circ < \angle AOP < 90^\circ$$

である. この領域が示すのは

(2) で求めた直線の法線ベクトル $\vec{a}$

と同じ側の領域

である. よって、⑫ (答)

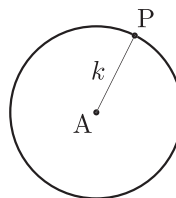


$$(4) \quad \left| \vec{p} - \vec{a} \right| = \left| \overrightarrow{AP} \right| = k > 0$$

であるから、点 P は

点 A を中心とする半径 k の円の周上

にある. よって、⑦ (答)



$$(5) \quad (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) > k^2$$

$$\iff \left| \vec{p} - \vec{a} \right|^2 > k^2$$

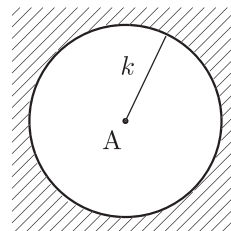
であるから、 $k > 0$ より

$$\left| \overrightarrow{AP} \right| > k$$

である. この領域が示すのは

点 A を中心とする半径 k の円の外部

である. よって、⑩ (答)



- (6) $-\vec{a}$ を位置ベクトルとする点を A' とすると、
与式は

$$\overrightarrow{A'P} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

であるから

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{A'P} \text{ または } P = A \text{ または } P = A'$$

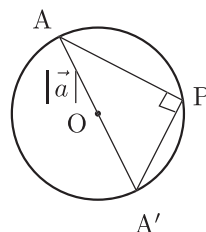
これは

AA' を直径とする円

であり、 $AA' = |2\vec{a}|$ より、したがって、点 P は

半径 $|\vec{a}|$ の円周上

に存在する。よって、⑥ (答)



<別解>

$$(\vec{p} + \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0 \iff |\vec{p}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$$

$$\therefore |\vec{p}| = |\vec{a}|$$

これより、点 P は点 O を中心とする半径 $|\vec{a}|$ の円をえがく。

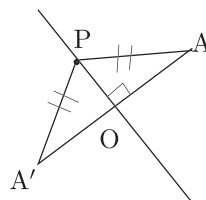
- (7) (6) の点 A' を用いて、与式は

$$A'P = AP$$

であるから、したがって、点 P は

線分 AA' の垂直二等分線上

に存在する。よって、④ (答)



<別解>

与式を 2 乗して

$$|\vec{p}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{p} + |\vec{a}|^2 = |\vec{p}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{p} + |\vec{a}|^2$$

となるから、これは $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$ と等しい。

- (8) 点 P が点 O と異なるとき

$$\left| \left| \vec{a} \right| \left| \vec{p} \right| \cos \angle AOP \right| = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{p} \right|$$

であるから

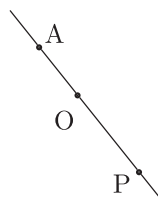
$$\cos \angle AOP = \pm 1$$

$$\therefore \angle AOP = 0^\circ, 180^\circ$$

点 P が点 O と一致するときにおいても、点 P は

点 O を通り、 $\vec{a}$ に平行な直線上

に存在する。よって、⑤ (答)



【4】 (I)
$$\vec{p} = k \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} + \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right) = \frac{k}{|\vec{b}|} \vec{b} + \frac{k}{|\vec{c}|} \vec{c}$$

であり、かつ、点 P は直線 BC 上の点でもあるから

$$\frac{k}{|\vec{b}|} + \frac{k}{|\vec{c}|} = 1$$

これを解いて

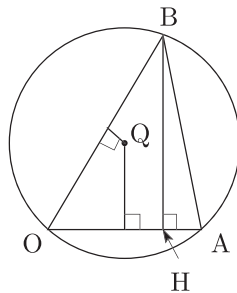
$$k = \frac{|\vec{b}| \|\vec{c}\|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|} \quad (\text{答})$$

〔II〕 (1) 点 B から辺 OA に下ろした垂線の足を H
とすると

$$\vec{OH} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{k}{1^2} \vec{a} = k \vec{a}$$

辺 OA の垂直二等分線上の任意の点を P
とすると

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{1}{2} \vec{a} + t \vec{BH} = \frac{1}{2} \vec{a} + t (k \vec{a} - \vec{b}) \\ &= \left(\frac{1}{2} + kt \right) \vec{a} - t \vec{b} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



(2) 点 Q は $\triangle OAB$ の外心であるから

辺 OA の垂直二等分線と辺 OB の垂直二等分線の交点

であるから

$$\vec{OQ} = \left(\frac{1}{2} + kt \right) \vec{a} - t \vec{b}$$

であり、かつ、実数 s を用いて

$$\vec{OQ} = \frac{1}{2} \vec{b} + s (k \vec{b} - \vec{a}) = -s \vec{a} + \left(\frac{1}{2} + ks \right) \vec{b}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ より

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + kt = -s \\ -t = \frac{1}{2} + ks \end{cases} \quad \therefore s = t = -\frac{1}{2(k+1)} \quad (\because k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \neq -1)$$

したがって

$$\vec{OQ} = \frac{1}{2(k+1)} (\vec{a} + \vec{b}) \quad (\text{答})$$

<別解>

実数 α , β を用いて

$$\vec{OQ} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

とおき、外心の条件より

$$\begin{cases} (\vec{OQ} - \frac{1}{2} \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0 \\ (\vec{OQ} - \frac{1}{2} \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha + k\beta - \frac{1}{2} = 0 \\ k\alpha + \beta - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

これを解いても、 $\alpha = \beta = \frac{1}{2(k+1)}$ を得る。

【5】(1) (ア) 重心 G に対して

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

が成り立つことから、

$$x : y : z = 1 : 1 : 1$$

したがって、⑦ (答)

(イ) $\triangle ABC$ は、辺 BC を斜辺とする直角三角形であるから、垂心 H は点 A に一致する。よって

$$\vec{HA} = \vec{0}$$

が成り立つことから、 $x : y : z = 1 : 0 : 0$

したがって、① (答)

(ウ) $\triangle ABC$ の外接円は、辺 BC を直径とする円であるから、外心 O は辺 BC の中点であり

$$\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$$

が成り立つことから、 $x : y : z = 0 : 1 : 1$

したがって、⑥ (答)

(2) 内心 I は、各頂点の内角の二等分線の交点であるから

$$\vec{AI} = s \left(\frac{4}{7} \vec{AB} + \frac{3}{7} \vec{AC} \right) \quad \cdots (*)$$

同様にして

$$\begin{aligned} \vec{BI} &= t \left(\frac{5}{8} \vec{BA} + \frac{3}{8} \vec{BC} \right) \\ &= t \left(-\vec{AB} + \frac{3}{8} \vec{AC} \right) \end{aligned}$$

と表される。このとき

$$\begin{aligned} \vec{AI} &= \vec{AB} + \vec{BI} \\ &= (1-t)\vec{AB} + \frac{3}{8}t\vec{AC} \quad \cdots (**) \end{aligned}$$

さて、 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ は 1 次独立であるから、(*), (**) より

$$\begin{cases} \frac{4}{7}s = 1-t \\ \frac{3}{7}s = \frac{3}{8}t \end{cases} \quad \therefore s = \frac{7}{12}, t = \frac{2}{3}$$

したがって

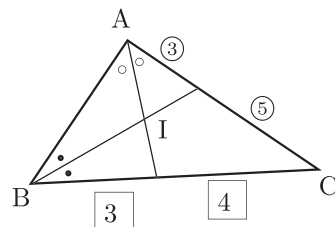
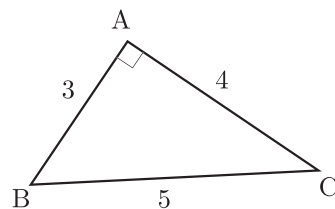
$$\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$$

始点を I として整理すると

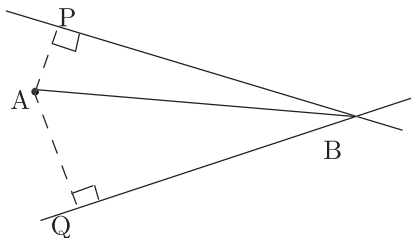
$$\begin{aligned} -12\vec{IA} &= 4(\vec{IB} - \vec{IA}) + 3(\vec{IC} - \vec{IA}) \\ \iff 12\vec{IA} + 4(\vec{IB} - \vec{IA}) + 3(\vec{IC} - \vec{IA}) &= \vec{0} \\ \iff 5\vec{IA} + 4\vec{IB} + 3\vec{IC} &= \vec{0} \end{aligned}$$

よって、1 から 9 までの自然数において、これをみたす x, y, z の値は

$(x, y, z) = (5, 4, 3)$ (答)



【6】 $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{AQ}$ とおく.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP} \text{ より} \\ \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} &= 0 \\ \therefore \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) &= 0 \\ \therefore |\overrightarrow{AP}|^2 - \overrightarrow{AP} \cdot (\alpha\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{AQ}) &= 0 \\ \therefore 12 - 12\alpha + 15\beta &= 0 \\ \therefore 4\alpha - 5\beta &= 4 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} \perp \overrightarrow{BQ} \text{ より} \\ \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} &= 0 \\ \therefore \overrightarrow{AQ} \cdot (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB}) &= 0 \\ \therefore |\overrightarrow{AQ}|^2 - \overrightarrow{AQ} \cdot (\alpha\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{AQ}) &= 0 \\ \therefore 25 + 15\alpha - 25\beta &= 0 \\ \therefore 3\alpha - 5\beta &= -5 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ② より

$$\alpha = 9, \quad \beta = \frac{32}{5}$$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= 9\overrightarrow{AP} + \frac{32}{5}\overrightarrow{AQ} \\ |\overrightarrow{AB}|^2 &= \left| 9\overrightarrow{AP} + \frac{32}{5}\overrightarrow{AQ} \right|^2 \\ &= 81|\overrightarrow{AP}|^2 + 2 \cdot 9 \cdot \frac{32}{5} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} + \frac{1024}{25} |\overrightarrow{AQ}|^2 \\ &= 81 \cdot 12 + \frac{576}{5} \cdot (-15) + \frac{1024}{25} \cdot 25 \\ &= 268 \end{aligned}$$

よって

$$AB = 2\sqrt{67} \quad (\text{答})$$

4章 ベクトル (2)

問題

【1】 (1) $\overrightarrow{CD} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}$ とおく.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a} = 0 \\ (\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha |\overrightarrow{a}|^2 + \beta \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \\ \alpha \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \beta |\overrightarrow{b}|^2 + \gamma \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{3} = 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots (*) \end{aligned}$$

ここで

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + (1 + \gamma) \overrightarrow{c}$$

であり, D は OAB 平面上にあるので

$$1 + \gamma = 0 \quad \therefore \gamma = -1$$

したがって

$$(*) \iff \begin{cases} \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \beta - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad \therefore \alpha = -\frac{1}{3}, \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{a} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{a}|^2 |\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 \cdot 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(1) より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CD}|^2 &= \frac{1}{9} |\overrightarrow{a}|^2 + \frac{8}{9} |\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2 \\ &\quad - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + 2 \cdot \frac{1}{3} \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{8}{9} + 1 - \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{CD}| = \frac{2}{3}$$

よって, 体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{18} \quad (\text{答})$$

【2】 (1) 各辺の長さが1であるから

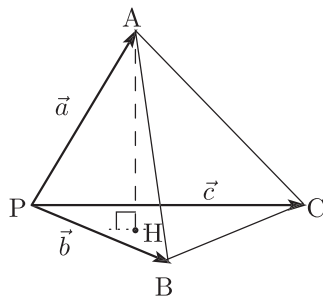
$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

また、各面が正三角形であるから

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

同様にして

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$



(2) 平面 PBC において

$$\vec{b} \nparallel \vec{c}, \quad \vec{b} \neq \vec{0}, \quad \vec{c} \neq \vec{0}$$

であるから

$$\vec{PH} = s\vec{b} + t\vec{c} \quad (s, t \text{ は実数})$$

とおくと

$$\vec{AH} = \vec{PH} - \vec{PA} = s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}$$

H は A から平面 PBC に下ろした垂線であるから、 $\vec{AH} \perp \vec{PB}$, $\vec{AH} \perp \vec{PC}$ である。

(1) の結果を用いると

$$\vec{PB} \cdot \vec{AH} = \vec{b} \cdot (s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}) = s + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\vec{PC} \cdot \vec{AH} = \vec{c} \cdot (s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}s + t - \frac{1}{2} = 0 \quad \dots\dots ②$$

①, ② より

$$s = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{1}{3} \quad \therefore \vec{PH} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \quad (\text{答})$$

(3) $\triangle PBC$ は、1 辺の長さ 1 の正三角形であるから

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\vec{AH} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \vec{a} \quad \text{より}$$

$$|\vec{AH}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + \frac{2}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore |\vec{AH}| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

よって、求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad (\text{答})$$

- 【3】 (1) $\triangle ABC$ の周またはその内部にある任意の点を P とする.

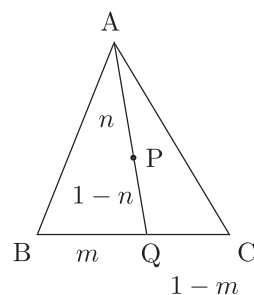
直線 AP と辺 BC との交点を Q とし

$$BQ : QC = m : (1 - m)$$

$$AP : PQ = n : (1 - n)$$

とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= (1 - m)\overrightarrow{b} + m\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{OP} &= (1 - n)\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{OQ} \\ &= (1 - n)\overrightarrow{a} + n(1 - m)\overrightarrow{b} + mn\overrightarrow{c}\end{aligned}$$



いま

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b} + r\overrightarrow{c} \quad \dots\dots(*)$$

より

$$\begin{cases} p = 1 - n \\ q = n(1 - m) \\ r = mn \end{cases} \quad \dots\dots①$$

である. ここで

$$p + q + r = (1 - n) + n(1 - m) + mn = 1 \quad \dots\dots②$$

また, P が $\triangle ABC$ の周または内部の点であるから, $0 \leq m \leq 1$, $0 \leq n \leq 1$ であり, ①, ② より

$$p + q + r = 1, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad r \geq 0$$

これが, 点 P が $\triangle ABC$ の周またはその内部にあるための必要条件であり, 逆をたどれば十分性もみたしている.

以上より, 求める条件は

$$p + q + r = 1, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad r \geq 0 \quad (\text{答})$$

- (2) 四面体 OABC の面上または内部の任意の点を P とする.

直線 OP が $\triangle ABC$ の周または内部と交わる点を R とし, 直線 AR と辺 BC との交点を S とする. このとき

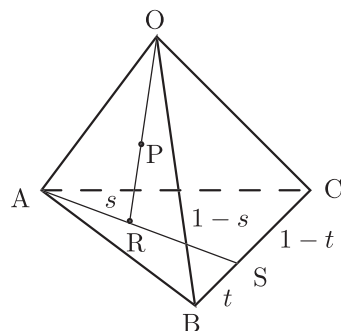
$$BS : SC = t : (1 - t)$$

$$AR : RS = s : (1 - s)$$

とすると

$$\vec{OS} = (1 - t) \vec{b} + t \vec{c}$$

$$\vec{OR} = (1 - s) \vec{a} + s \vec{OS} = (1 - s) \vec{a} + s(1 - t) \vec{b} + st \vec{c}$$



さらに

$$\vec{OP} = k \vec{OR}$$

とすると

$$\vec{OP} = k(1 - s) \vec{a} + ks(1 - t) \vec{b} + kst \vec{c}$$

いま

$$\vec{OP} = p \vec{a} + q \vec{b} + r \vec{c} \quad \dots\dots (*)$$

より

$$\begin{cases} p = k(1 - s) \\ q = ks(1 - t) \\ r = kst \end{cases} \quad \dots\dots ①'$$

である. ここで

$$p + q + r = k(1 - s) + ks(1 - t) + kst = k \quad \dots\dots ②'$$

また, P が四面体 OABC の面上または内部の点であるから, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq k \leq 1$ であり, ①', ②' より

$$p + q + r \leq 1, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad r \geq 0$$

これが, 点 P が四面体 OABC の面上またはその内部にあるための必要条件であり, 逆をたどれば十分性もみたしている.

以上より, 求める条件は

$$p + q + r \leq 1, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad r \geq 0 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \text{【4】 (1)} \quad \vec{\text{OP}} &= \vec{\text{OA}} + t\vec{a} = \begin{pmatrix} 5+t \\ 1+2t \\ -1+t \end{pmatrix} \\ \vec{\text{OQ}} &= \vec{\text{OB}} + s\vec{b} = \begin{pmatrix} 6+s \\ -4-s \\ -s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく.

$$\vec{\text{PQ}} = \begin{pmatrix} 1+s-t \\ -5-s-2t \\ 1-s-t \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{\text{PQ}} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{\text{PQ}} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (1+s-t) + 2(-5-s-2t) + (1-s-t) = 0 \\ (1+s-t) - (-5-s-2t) - (1-s-t) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -6t - 2s - 8 = 0 \\ 2t + 3s + 5 = 0 \end{cases} \\ &\iff s = t = -1 \end{aligned}$$

よって

$$\mathbf{P(4, -1, -2), Q(5, -3, 1)} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \vec{\text{OP}} \cdot \vec{\text{OQ}} = |\vec{\text{OP}}| |\vec{\text{OQ}}| \cos \theta \text{ より}$$

$$20 + 3 - 2 = \sqrt{16 + 1 + 4} \cdot \sqrt{25 + 9 + 1} \cos \theta$$

$$21 = \sqrt{21} \cdot \sqrt{35} \cos \theta$$

$$21 = 7\sqrt{15} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned} \triangle \text{OPQ} &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{\text{OP}}|^2 |\vec{\text{OQ}}|^2 - (\vec{\text{OP}} \cdot \vec{\text{OQ}})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{21 \cdot 35 - 21^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{21(35 - 21)} \\ &= \frac{7\sqrt{6}}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【5】 4 点 P, Q, R, T が同一平面上にあるので

$$\overrightarrow{PT} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} \quad (s, t \text{ は実数})$$

と表される. ここで

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\overrightarrow{PT} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ 4s \\ 2s + 5t \end{pmatrix}$$

したがって

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PT} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t \\ 4s \\ 2s + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3t \\ -1 + 4s \\ 1 + 2s + 5t \end{pmatrix}$$

となる. ここで, $\overrightarrow{ST}$ は 3 点 P, Q, R を通る平面に直交するから

$$\overrightarrow{ST} \perp \overrightarrow{PQ} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{ST} \perp \overrightarrow{PR}$$

$$\therefore \begin{cases} (2 - 3t) \cdot 0 + (-1 + 4s) \cdot 4 + (1 + 2s + 5t) \cdot 2 = 0 \\ (2 - 3t) \cdot (-3) + (-1 + 4s) \cdot 0 + (1 + 2s + 5t) \cdot 5 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 10s + 5t = 1 \\ 10s + 34t = 1 \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{1}{10}, t = 0$$

したがって

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PT} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

また, 求める球は原点 O を通るので

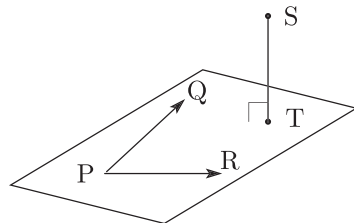
$$|\overrightarrow{OT}|^2 = 3^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 9 + \frac{1}{5} = \frac{46}{5}$$

よって, 求める球は

$$\text{中心の座標} \left(3, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right), \quad \text{半径} \sqrt{\frac{46}{5}}$$

であり, その方程式は

$$(x - 3)^2 + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{46}{5} \quad (\text{答})$$



【6】 (1) 平行な 2 平面を第 3 の平面で切ったとき、その 2 つの交線が平行線となるから

$$OP \parallel QC \quad \text{かつ} \quad PC \parallel OQ$$

である。よって、四角形 OQCP は平行四辺形であるから

$$OP = CQ, \quad OG = CB, \quad \angle OGP = \angle CBQ = 90^\circ$$

以上より

$$\triangle OPG \equiv \triangle CQB \quad \therefore BQ = GP = t \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \begin{aligned} O(0, 0, 0), \quad E(a, 0, 0), \\ G(0, a, 0), \quad A(0, 0, a) \end{aligned}$$

とおくと

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{OQ} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a-t \end{pmatrix}$$

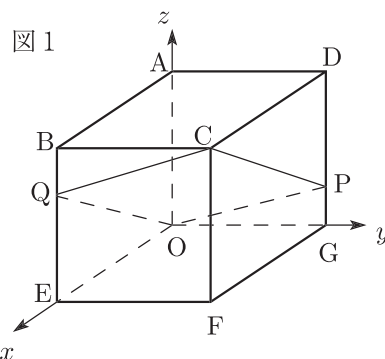
と表すことができる。このとき

$$|\vec{OP}|^2 = a^2 + t^2, \quad |\vec{OQ}|^2 = a^2 + (a-t)^2$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = t(a-t)$$

したがって

$$\begin{aligned} S^2 &= |\vec{OP}|^2 |\vec{OQ}|^2 - (\vec{OP} \cdot \vec{OQ})^2 \\ &= 2a^2(t^2 - at + a^2) \quad (0 \leq t \leq a) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



$$(3) \quad f(t) = t^2 - at + a^2 \quad (0 \leq t \leq a)$$

とおくと

$$f(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2$$

と変形されることから、図 2 より、 $f(t)$ の最大値は

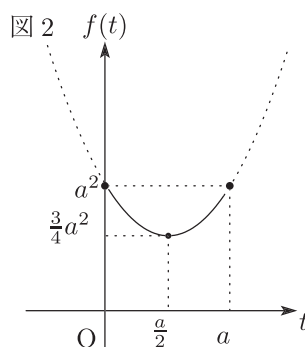
$$f(0) = f(a) = a^2$$

同様に考えて、最小値は

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3}{4}a^2$$

したがって

$$\begin{cases} \text{最大値: } \sqrt{2}a^2 & (t = 0, a \text{ のとき}) \\ \text{最小値: } \frac{\sqrt{6}}{2}a^2 & \left(t = \frac{a}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases} \quad (\text{答})$$





会員番号		氏 名	
------	--	-----	--