M2JS/M2J

冬期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高２選抜東大数学

高２東大数学

1章　整式

問題

【1】2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解は互いに共役な複素数であり，これらを $\omega,\ \overline{\omega}$ とすると

$$x^2+x+1=(x-\omega)(x-\overline{\omega})$$

となる．また，$\omega^2+\omega+1=0$ なので

$$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \qquad \therefore \quad \omega^3=1$$

そこで，$f(x)=(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ とおけば

$$\begin{aligned}
(\omega^{100}+1)^{100} &= \{(\omega^3)^{33}\cdot\omega+1\}^{100}\\
&= (\omega+1)^{100} \quad (\because\ \omega^3=1)\\
&= (-\omega^2)^{100} \quad (\because\ \omega^2+\omega+1=0 \iff \omega+1=-\omega^2)\\
&= \omega^{200}\\
&= (\omega^3)^{66}\cdot\omega^2\\
&= \omega^2 \quad (\because\ \omega^3=1)
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
(\omega^2+1)^{100} &= (-\omega)^{100} \quad (\because\ \omega^2+\omega+1=0 \iff \omega^2+1=-\omega)\\
&= \omega^{100}\\
&= \omega
\end{aligned}$$

よって

$$f(\omega)=\omega^2+\omega+1=0$$

同様に

$$(\overline{\omega}^{100}+1)^{100}=\overline{\omega}^2,\quad (\overline{\omega}^2+1)^{100}=\overline{\omega}$$

$$\therefore \quad f(\overline{\omega})=\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$$

したがって，$f(x)$ は $(x-\omega)(x-\overline{\omega})=x^2+x+1$ で割り切れる．　(答)

【2】(1) 与式を展開して

$$(2\alpha^2+5\alpha-1)^2=4\alpha^4+20\alpha^3+21\alpha^2-10\alpha+1$$

また

$$\begin{array}{rrrrcrrrrr}
 & & & & & 4 & 8 & & & \\ \cline{6-10}
1 & 3 & 0 & -1 &) & 4 & 20 & 21 & -10 & 1 \\
 & & & & & 4 & 12 & 0 & -4 & \\ \cline{6-10}
 & & & & & & 8 & 21 & -6 & 1 \\
 & & & & & & 8 & 24 & 0 & -8 \\ \cline{7-10}
 & & & & & & & -3 & -6 & 9
\end{array}$$

より

$$(2\alpha^2+5\alpha-1)^2=(\alpha^3+3\alpha^2-1)(4\alpha+8)-3\alpha^2-6\alpha+9$$

条件より，$\alpha^3+3\alpha^2-1=0$ だから

$$(2\alpha^2+5\alpha-1)^2=-3\alpha^2-6\alpha+9 \qquad (\text{答})$$

(2) 組み立て除法より

$$\begin{array}{r|cccc} \alpha\ ) & 1 & 3 & 0 & -1 \\ & & \alpha & \alpha^2+3\alpha & \alpha^3+3\alpha^2 \\ \hline & 1 & \alpha+3 & \alpha^2+3\alpha & \alpha^3+3\alpha^2-1 \end{array}$$

であるから，$\alpha^3+3\alpha^2-1=0$ とあわせて

$$x^3+3x^2-1=(x-\alpha)\{x^2+(\alpha+3)x+\alpha^2+3\alpha\}$$

となる．よって，α 以外の 2 解は 2 次方程式

$$x^2+(\alpha+3)x+\alpha^2+3\alpha=0$$

の 2 解であり，これを解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left\{-(\alpha+3)\pm\sqrt{(\alpha+3)^2-4(\alpha^2+3\alpha)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-(\alpha+3)\pm\sqrt{-3\alpha^2-6\alpha+9}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-(\alpha+3)\pm(2\alpha^2+5\alpha-1)\right\} \quad (\because\ (1)) \end{aligned}$$

以上より，α 以外の 2 解は

$$-\alpha^2-3\alpha-1,\quad \alpha^2+2\alpha-2 \qquad (\text{答})$$

【3】$a \geqq 2$，$f(f(x))=\{f(x)+a\}\{f(x)+2\}>0$ より

$$f(x)<-a \quad \text{または} \quad -2<f(x)$$

$f(x)<-a$ のとき，関数 $y=f(x)$ のグラフは下に凸であるから，すべての実数 x に対して成り立つことはない。よって

$$-2<f(x) \quad \cdots ①$$

すべての実数 x に対して①が成り立つのは

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+(a+2)x+2a \\ &= \left(x+\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} &-2<-\frac{(a-2)^2}{4} \\ &8>(a-2)^2 \\ &-2\sqrt{2}<a-2<2\sqrt{2} \\ &2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2} \end{aligned}$$

したがって，$a \geqq 2$ より

$$2 \leqq a < 2 + 2\sqrt{2} \qquad (\text{答})$$

【4】 (i) $n = 2$ のとき，

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ であるので，成り立つ．

(ii) $n = k$ のときに成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} x^{k+1} - 1 &= (x^{k+1} - x^k) + (x^k - 1) \\ &= x^k(x-1) + (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots\cdots + x^2 + x + 1) \quad (\because \text{仮定}) \\ &= (x-1)(x^k + x^{k-1} + \cdots\cdots + x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，題意が証明された． （証明終）

【5】(1) 3 倍角の公式より

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

よって

$$f(x) = 4x^3 - 3x \qquad (\text{答})$$

また，倍角の公式より

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1 \\ &= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \end{aligned}$$

よって

$$g(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \qquad (\text{答})$$

また

$$\begin{aligned} (x-1)h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= 8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 \\ &= (x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) \end{aligned}$$

より

$$h(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 \qquad (\text{答})$$

(2) $h(\cos\theta) = 0$ のとき，(1) より

$$g(\cos\theta) - f(\cos\theta) = 0$$
$$\cos 4\theta - \cos 3\theta = 0$$

和積公式より

$$-2\sin\frac{7\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

ここで，$0 \leqq \theta \leqq \pi \iff 0 \leqq \dfrac{\theta}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$$\sin\frac{\theta}{2} = 0 \implies \theta = 0$$

であるが

$$h(\cos 0) = h(1) = 7 \neq 0$$

より不適.
また，$0 \leqq \theta \leqq \pi \iff 0 \leqq \dfrac{7\theta}{2} \leqq \dfrac{7\pi}{2}$ より

$$\sin\frac{7\theta}{2} = 0 \implies \frac{7\theta}{2} = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$$

$\theta \neq 0$ であるから

$$\sin\frac{7\theta}{2} = 0 \implies \theta = \frac{2\pi}{7},\ \frac{4\pi}{7},\ \frac{6\pi}{7}$$

となる.
$\theta = \dfrac{2\pi}{7},\ \dfrac{4\pi}{7},\ \dfrac{6\pi}{7}$ のとき

$$\begin{aligned} & -\sin\frac{7\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0 \text{ かつ } \theta \neq 0 \\ \implies & \cos 4\theta - \cos 3\theta = 0 \text{ かつ } \theta \neq 0 \\ \implies & h(\cos\theta) = 0 \end{aligned}$$

となる.
以上より，結論は正しい.　（証明終）

(3) $\cos\theta$ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ において θ の単調減少関数であるから，$\cos\dfrac{2\pi}{7},\ \cos\dfrac{4\pi}{7},\ \cos\dfrac{6\pi}{7}$ の値はそれぞれ互いに異なる.
よって, (2) より, 3 次方程式 $h(x) = 0$ の異なる 3 つの実数解が $\cos\dfrac{2\pi}{7},\ \cos\dfrac{4\pi}{7},\ \cos\dfrac{6\pi}{7}$ であるから，解と係数の関係より

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \qquad \text{(答)}$$

【6】$P(x)$ を n 次の多項式とする.

$P(0), P(1), \cdots, P(n)$: 整数ならば,
すべての整数 k について $P(k)$: 整数 $(n = 1, 2, \cdots)$ $\cdots(*)$

を n に関する数学的帰納法により証明する.

(i) $n = 1$ のとき
$P(x) = ax + b$ とおくと

$$P(0) = b, \quad P(1) = a + b$$

$a + b,\ b$ は それぞれ整数より $a,\ b$ もそれぞれ整数.
このとき，すべての整数 k について $P(k) = ak + b$ は 整数
よって，$n = 1$ のとき $(*)$ は成立.

(ii) $n \leqq m$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定する．

さらに，$P(x)$ を $m+1$ 次の多項式とし

$$P(0),\ P(1),\ \cdots,\ P(m+1) \text{ は整数}$$

であるとする．

ここで，$Q(x) = P(x+1) - P(x)$ とおくと $Q(x)$ は m 次以下の整式で

$$Q(0),\ Q(1),\ \cdots,\ Q(m) \text{ は整数}$$

仮定より，すべての整数 k について

$$Q(k) = P(k+1) - P(k) \text{ は整数}$$

であるから，整数 i について

$$P(i) \text{ が整数ならば，} P(i+1),\ P(i-1) \text{ も整数}$$

$P(0)$ は整数だから，すべての整数 k について $P(k)$ は整数．

よって，$n = m+1$ のときも $(*)$ は成立．

(i)，(ii) より，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数である．（証明終）

問題

【1】(1) $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおく．ℓ_t が点 P を通るとき

$$Y = 2tX - t^2$$

t について整理して

$$t^2 - 2Xt + Y = 0 \quad \cdots ①$$

P を通る直線 ℓ_t がただ 1 つであることと，t の方程式 ① がただ 1 つの実数解をもつ，すなわち重解をもつことは同値であるから，求める条件は

$$(① \text{ の判別式}) = 0 \qquad \therefore \quad X^2 - Y = 0$$

よって，求める軌跡の方程式は

$$y = x^2 \qquad (\text{答})$$

(2) (1) より，ℓ_t が $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を通るための条件は

$$(① \text{ の判別式}) \geqq 0 \qquad \therefore \quad Y \leqq X^2 \quad \cdots ②$$

である．

また，① が $|t| < 1$ に 2 解 (重解含む) をもつための条件は，$f(t) = t^2 - 2Xt + Y$ とすると

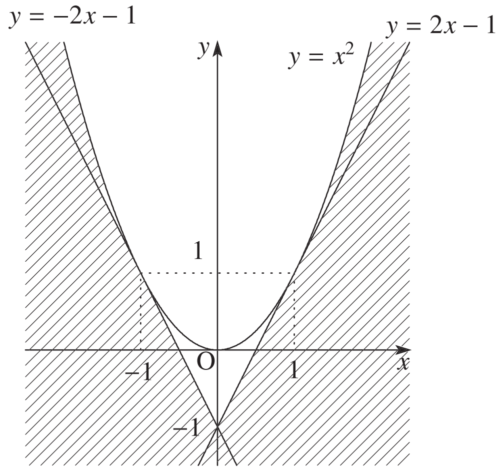
$$\begin{cases} (① \text{ の判別式}) \geqq 0 \\ -1 < X < 1 \\ f(1) > 0,\ f(-1) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Y \leqq X^2 \\ -1 < X < 1 \\ Y > 2X - 1,\ Y > -2X - 1 \end{cases} \quad \cdots ③$$

であるから，① が $|t| \geqq 1$ の範囲に実数解をもつための条件は

② かつ ③でない

となり，求める領域は図 2.1 の斜線部のようになる．ただし，境界を含む．

図 2.1



＜別解＞

(2) (1) で得た放物線 $y = x^2$ を C とおく．いま，$2tx - t^2 = x^2$ とすると

$$x^2 - 2tx + t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-t)^2 = 0$$

よって，ℓ_t と C は x 座標が t である点で接する．すなわち，C 上の点 $(t,\ t^2)$ を Q とおけば，ℓ_t は Q における C の接線であり，t が変化するとき，ℓ_t は Q で C に接しながら動くことになる．

したがって，t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くときの ℓ_t の通過領域は，C 上の点 Q が $|x| \geqq 1$ の範囲を動くときの，Q における接線の通過領域に他ならない．これを図示すると，図 2.1 の斜線部のようになる．ただし，境界を含む．

【2】(1) コーシー・シュワルツの不等式より

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2) \geqq (1 \cdot x + 1 \cdot y)^2 = 1^2$$

すなわち

$$x^2 + y^2 \geqq \frac{1}{2}$$

等号は，$x = y$ のとき成立するので，求める最小値は

$$x = y = \frac{1}{2} \text{ のとき } \quad \frac{1}{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) コーシー・シュワルツの不等式より

$$(1^2+1^2+1^2)\{x^2+(2y)^2+(3z)^2\} \geqq (1 \cdot x + 1 \cdot 2y + 1 \cdot 3z)^2 = 1^2$$

すなわち

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 \geqq \frac{1}{3}$$

等号は，$x = 2y = 3z$ のとき成立するので，求める最小値は

$$x = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{6},\ z = \frac{1}{9} \text{ のとき } \quad \frac{1}{3} \qquad \text{(答)}$$

【3】題意より

$$\begin{aligned} f(m,\ n) &= m^2 + 6n^2 - 4mn - 3n \\ &= (m-2n)^2 + 2n^2 - 3n \end{aligned}$$

この式を m の 2 次関数 $g(m)$ とみる.

(i) $n \leqq 5$ のとき

$g(m)$ は, $m = 2n$ のとき, 最小値 $2n^2 - 3n$ をとり

$$2n^2 - 3n = 2\left(n - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

より, $f(m,\ n)$ は $n = 1,\ m = 2$ のとき, 最小値 -1 をとる.

(ii) $n \geqq 6$ のとき

$g(m)$ は, $m = 10$ のとき, 最小値 $6n^2 - 43n + 100$ をとり

$$6n^2 - 43n + 100 = 6\left(n - \frac{43}{12}\right)^2 + \frac{551}{24}$$

より, $f(m,\ n)$ は $n = 6,\ m = 10$ のとき, 最小値 58 をとる.

(i), (ii) より, $f(m,\ n)$ は $n = 1,\ m = 2$ のとき, 最小値 -1 をとる.　　(答)

また, $g(m)$ の最大値は

$$\max\{g(0),\ g(10)\} = \max\{6n^2 - 3n,\ 6n^2 - 43n + 100\}$$

である. ただし, $\max\{a,\ b\}$ は実数 $a,\ b$ の小さくない方の数を表すものとする.

ここで, n の 2 次関数 $6n^2 - 3n,\ 6n^2 - 43n + 100$ の軸の位置はそれぞれ $n = 5$ より左側にあるので, それぞれ $n = 10$ において最大となるから

$$\begin{aligned} \max\{g(0),\ g(10)\} &= \max\{6 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10,\ 6 \cdot 10^2 - 43 \cdot 10 + 100\} \\ &= \max\{570,\ 270\} = 570 \end{aligned}$$

よって, $f(m,\ n)$ は $n = 10,\ m = 0$ のとき, 最大値 570 をとる.　　(答)

【4】$\cos x = 1$ のとき, y は任意の値をとれるので適する.

$\cos x \neq 1$ のとき, 与式より,

$$y = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}$$

よって, $2 \leqq y \leqq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \leqq \tan\frac{x}{2} \leqq \frac{1}{2} \\ \therefore\quad &\frac{10}{9} \leqq 1 + \tan^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \leqq \frac{5}{4} \\ \therefore\quad &\frac{9}{10} \geqq \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \geqq \frac{4}{5} \\ \therefore\quad &\frac{4}{5} \geqq \cos x \geqq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

これと $\cos x = 1$ を合わせて, 求める範囲は,

$$\frac{3}{5} \leqq \cos x \leqq \frac{4}{5},\ \cos x = 1 \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 条件より

$$|X|+|Y| \leqq 2 \cdots\cdots ①$$

は，X，Y 両軸に関して対称であるから，$X \geqq 0$，$Y \geqq 0$ で考える．

このとき，① は $X+Y \leqq 2$ となるから，直線 $X+Y=2$ とその下側の部分を表す．

したがって，求める点 P の存在範囲は図の斜線部 (境界を含む)．

(2) 条件より

$$x = X+Y, \qquad y = XY \quad \cdots\cdots(*)$$

とおく．① の両辺は負でないから平方しても同値であるから，平方して

$$(|X|+|Y|)^2 \leqq 4$$

$$\therefore \quad (X+Y)^2 - 2XY + 2|XY| \leqq 4$$

よって，(*) より

$$x^2 - 2y + 2|y| \leqq 4$$

したがって，

$$\left.\begin{array}{l} y \geqq 0 \text{ のとき，} -2 \leqq x \leqq 2 \\ y < 0 \text{ のとき，} y \geqq \dfrac{1}{4}x^2 - 1 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots ②$$

また，(*) より，X，Y は 2 次方程式

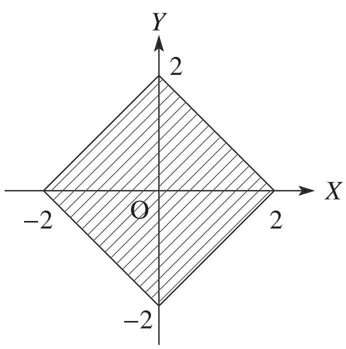
$$t^2 - xt + y = 0$$

の実数解であるから，判別式 $D \geqq 0$ が条件となり

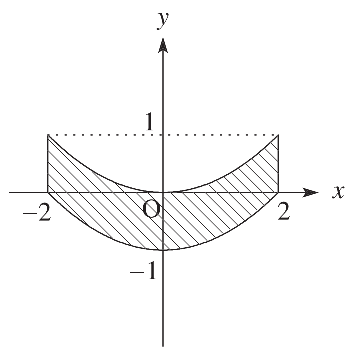
$$D = x^2 - 4y \geqq 0 \quad \therefore \quad y \leqq \frac{x^2}{4} \quad \cdots\cdots ③$$

ゆえに求める範囲は，② かつ ③ より，図の斜線部 (境界線を含む)．

(1)



(2)



【6】(1) $f(x) = \left|x^2 + 2ax + b\right|$ より

$$f(1) < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < 2a + b + 1 < \frac{1}{2}$$

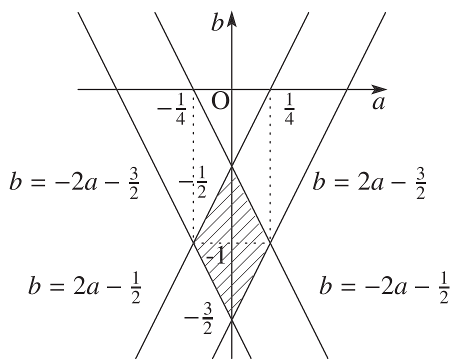
$$\therefore \quad b > -2a - \frac{3}{2} \ \cdots ① \quad \text{かつ} \quad b < -2a - \frac{1}{2} \ \cdots ②$$

同様に

$$\begin{aligned} &f(-1) < \frac{1}{2} \\ &-\frac{1}{2} < -2a + b + 1 < \frac{1}{2} \\ \therefore\quad &b > 2a - \frac{3}{2} \ \cdots ③ \quad \text{かつ} \quad b < 2a - \frac{1}{2} \ \cdots ④ \end{aligned}$$

$(a,\ b)$ の存在範囲は，① かつ ② かつ ③ かつ ④．図示すると図 2.2 の斜線部のようになる．ただし，境界は含まない．

図 2.2



また，図 2.2 より

$$-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4},\ -\frac{3}{2} < b < -\frac{1}{2}$$

である．　　**(答)**

(2) $M < \dfrac{1}{2}$ と仮定する．
このとき

$$f(1) < \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad f(-1) < \frac{1}{2}$$

が必要であるから，(1) より，$(a,\ b)$ の存在範囲は 図 2.2 の斜線部 (境界含まず)．
すなわち

$$-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4},\ -\frac{3}{2} < b < -\frac{1}{2} \ \cdots ⑤$$

また

$$f(x) = \left|(x+a)^2 + b - a^2\right| \quad \text{かつ} \quad -\frac{1}{4} < -a < \frac{1}{4}$$

であるから

$$f(-a) < \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left|b - a^2\right| < \frac{1}{2} \ \cdots ⑥$$

が必要.

しかし，⑤ より

$$\left|b-a^2\right| > \left|-\frac{1}{2}-0\right| = \frac{1}{2}$$

であるから，これは ⑥ と矛盾する.

よって，任意の定数 a, b に対して，$M \geqq \dfrac{1}{2}$ である. （証明終）

(3) $M=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$f(1) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad f(-1) \leqq \frac{1}{2} \ \cdots ⑦$$

が必要であるから，(2) と同様に考えると，$(a,\ b)$ の存在範囲は 図 2.2 の斜線部 (境界含む).

また

$$f(x) = \left|(x+a)^2+b-a^2\right| \quad \text{かつ} \quad -\frac{1}{4} \leqq -a \leqq \frac{1}{4}$$

であるから

$$\left|b-a^2\right| \leqq \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a^2-\frac{1}{2} \leqq b \leqq a^2+\frac{1}{2} \ \cdots ⑧$$

が必要.

図 2.3

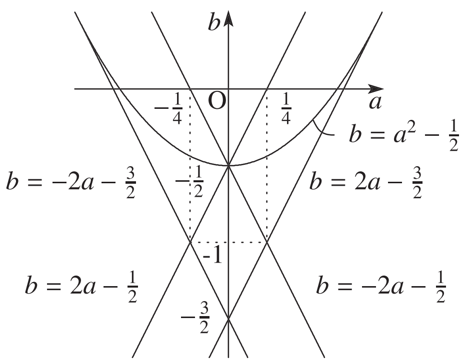
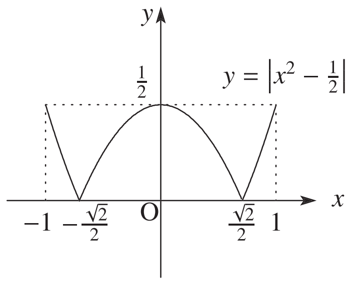


図 2.3 より，⑦ と ⑧ を同時にみたす $(a,\ b)$ は $(a,\ b) = \left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ のみで，
このとき $f(x) = \left|x^2 - \dfrac{1}{2}\right|$ となり，$M = \dfrac{1}{2}$ となる (図 2.4 参照) ので，題意をみたす．

図 2.4



よって，$(a,\ b) = \left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$．　　(答)

問題

【1】(1) 第 n 項は $\dfrac{1}{n(n+3)}$ 　(答)

第 n 項までの和は,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\right.\\
&\qquad\left.\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\
&= \frac{n(11n^2+48n+49)}{18(n+1)(n+2)(n+3)} \quad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(2) 第 n 項は $\mathbf{10^n-1}$ 　(答)

第 n 項までの和は,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(10^k-1) &= \sum_{k=1}^{n}10^k-n\\
&= \frac{10(10^n-1)}{9}-n\\
&= \frac{10^{n+1}-9n-10}{9} \quad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3) 第 n 項は $\boldsymbol{nr^{n-1}}$ 　(答)

n 項までの和を S とすると

$$\begin{array}{rl}
S &= 1+2r+3r^2+\cdots\cdots+nr^{n-1}\\
-)\ rS &= \qquad r+2r^2+\cdots\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n\\
\hline
(1-r)S &= 1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}\qquad -nr^n
\end{array}$$

$r \fallingdotseq 1$ のとき,

$$\begin{array}{rl}
(1-r)S &= 1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}-nr^n\\
-)\ r(1-r)S &= \qquad r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}+r^n-nr^{n+1}\\
\hline
(1-r)^2S &= 1\qquad\qquad -(n+1)r^n+nr^{n+1}
\end{array}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2} \quad \text{(答)}$$

$r=1$ のとき,

$$S=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(答)}$$

【2】$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2na_n + 1}$ より

$$a_2 = \frac{a_1}{2a_1 + 1} = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{a_2}{4a_2 + 1} = \frac{1}{7},$$
$$a_4 = \frac{a_3}{6a_3 + 1} = \frac{1}{13}, \quad a_5 = \frac{a_4}{8a_4 + 1} = \frac{1}{21}$$

分母の数列を

$$\{b_n\} : 1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ \cdots$$

とおくと，$\{b_n\}$ の階差数列は

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2k,\ \cdots$$

より，$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + n(n-1)$$

これは，$n = 1$ のときもみたすので

$$a_n = \frac{1}{1 + n(n-1)} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \quad \cdots\cdots(*)$$

と推測される．これを数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 1$ のとき，$(*)$ は成立する．

(ii) $n = k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$a_k = \frac{1}{1 + k(k-1)} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots)$$

このとき

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2ka_k + 1} = \frac{\dfrac{1}{1 + k(k-1)}}{2k \cdot \dfrac{1}{1 + k(k-1)} + 1}$$
$$= \frac{1}{2k + \{1 + k(k-1)\}} = \frac{1}{1 + k(k+1)}$$

よって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する．

以上 (i)，(ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

よって，求める数列の一般項は

$$a_n = \frac{1}{1 + n(n-1)} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \text{(答)}$$

【3】$p = 1,\ 2,\ 3$ の場合について調べると

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ は n の $p+1$ 次の多項式であり

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \cdots \qquad (\sharp)$$

と予想できる．以下，$(\sharp)$ が成り立つことを数学的帰納法により示す．

(I) $p=1$ のとき，問題文より，$(\sharp)$ は成り立つ．

(II) $p=1,\ 2, \cdots,\ q-1$ のとき，$(\sharp)$ が正しいと仮定する．

ここで，n 個の等式

$$(k+1)^{q+1} - k^{q+1} = (q+1)k^q + \frac{q(q+1)}{2}k^{q-1} + \cdots \quad (k=1,\ 2, \ldots,\ n)$$

の左辺，右辺をそれぞれ加え合わせることにより

$$(n+1)^{q+1} - 1 = (q+1)\sum_{k=1}^{n} k^q + \frac{q(q+1)}{2}\sum_{k=1}^{n} k^{q-1} + \cdots$$

ここで，帰納法の仮定より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^q$ の q 次以上の部分は

$$\frac{1}{q+1}\left\{(n+1)^{q+1} - \frac{q(q+1)}{2}\sum_{k=1}^{n} k^{q-1}\right\}$$

の q 次以上の部分に等しく，この式の q 次以上の部分は

$$\frac{1}{q+1}\left\{n^{q+1} + (q+1)n^q - \frac{q(q+1)}{2}\cdot\frac{n^q}{q}\right\} = \frac{1}{q+1}n^{q+1} + \frac{1}{2}n^q$$

となるから，$p=q$ のときも，$(\sharp)$ は成り立つ．

以上より，全ての正整数 p について $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ は n の $p+1$ 次の多項式として表され，n^{p+1} の係数は $\dfrac{1}{p+1}$，n^p の係数は $\dfrac{1}{2}$ である．　(答)

【4】(1) 題意より

$$x_n = a_n + b_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$$

ここで

$$x_1 = A + B = 0$$

より，$B=-A$ であり

$$x_2 = A\alpha + B\beta = 1 \quad \therefore \quad A(\alpha-\beta) = 1 \ \cdots ①$$
$$x_3 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 2 \quad \therefore \quad A(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = 2 \ \cdots ②$$
$$x_4 = A\alpha^3 + B\beta^3 = 5 \quad \therefore \quad A(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = 5 \ \cdots ③$$

① を ② に代入して

$$\alpha + \beta = 2 \ \cdots ④$$

① を ③ に代入して

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=5$$
$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=5$$
$$\therefore\quad \alpha\beta=-1 \ \cdots ⑤$$

④, ⑤ より $\alpha,\ \beta$ は x の 2 次方程式

$$x^2-2x-1=0 \qquad (答)$$

の 2 実解である.

また

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8$$

より

$$\alpha-\beta=2\sqrt{2} \quad (\because\ \alpha>\beta)$$
$$\therefore\quad A=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4},\ B=-\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad (答)$$

(2) (1) より

$$\alpha^2-2\alpha-1=0$$

であり，辺々 $A\alpha^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ をかけて

$$A\alpha^{n+1}-2A\alpha^n-A\alpha^{n-1}=0 \ \cdots ⑥$$

同様に

$$B\beta^{n+1}-2B\beta^n-B\beta^{n-1}=0 \ \cdots ⑦$$

⑥ と ⑦ を辺々加えて

$$x_{n+2}-2x_{n+1}-x_n=0$$

よって

$$x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n \quad (n=1,\ 2,\ldots)$$

が成立する. （証明終）

(3) (2) より，帰納的に x_n は整数であるから

$$|x_n-a_n|<\frac{1}{2}$$

を示せば十分.

ここで，$\alpha>\beta$ より $\beta=1-\sqrt{2}$ であり，$|\beta|=|1-\sqrt{2}|<1$ であるから，任意の正整数 n について

$$|x_n-a_n|=|b_n|\leqq|b_1|=\frac{\sqrt{2}}{4}<\frac{1}{2}$$

よって，結論は正しい. （証明終）

【5】(1) $a_1 = 1$ であり，a_2 は 1 とは異なる最小の正整数だから，$a_2 = 2$ である．

次に，a_3 は

$$1, \quad 2, \quad 1+2=3$$

とは異なる最小の正整数だから

$$a_3 = 4$$

a_4 は

$$1, \quad 2, \quad 1+2=3, \quad 4, \quad 1+4=5, \quad 2+4=6, \quad 1+2+4=7$$

とは異なる最小の正整数だから

$$a_4 = 8 \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より

$$a_n = 2^{n-1}\ (n = 1, 2, \ldots)\ \cdots ①$$

であると推測できるので，これを数学的帰納法で証明する．

(I) $a_1 = 1$ なので，$n = 1$ のときの成立は明らかである．

(II) $n = 1, 2, \ldots, k\ (k \geqq 1)$ における①の成立，すなわち

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4, \ldots,\ a_k = 2^{k-1}$$

を仮定する．いま，$m_{(2)}$ で正整数の 2 進法表示を表すことにし，上記の正整数を 2 進法表示すると

$$a_1 = 1_{(2)},\ a_2 = 10_{(2)},\ a_3 = 100_{(2)}, \ldots,\ a_k = \overbrace{10\cdots00}^{k\text{桁}}{}_{(2)}$$

となるから，これらの中から任意に重複なく取り出して得られる和は

$$1_{(2)},\ 10_{(2)},\ 11_{(2)},\ 100_{(2)},\ 101_{(2)}, \ldots,\ \overbrace{11\cdots11}^{k\text{桁}}{}_{(2)}$$

すなわち，$\overbrace{11\cdots11}^{k\text{桁}}{}_{(2)}$ 以下であるすべての正整数を表している．よって，a_{k+1} はこれらの数と異なる最小の正整数であるから

$$a_{k+1} = \overbrace{10\cdots00}^{k+1\text{桁}}{}_{(2)} \qquad \therefore \quad a_{k+1} = 2^k$$

となり，$n = k+1$ のときも①は成り立つ．

以上より

$$a_n = 2^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) p_1 は

$$\frac{a_1}{7} > \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 > \frac{7}{2}$$

となる確率であり，$a_1 = 4,\ 5,\ 6$ のとき，この不等式をみたすので

$$p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{(答)}$$

また，p_2 は

$$\frac{a_1}{7} + \frac{a_2}{7^2} > \frac{1}{2}$$

となる確率であり

(i) $a_1 = 1,\ 2$ のとき，明らかに不適.

(ii) $a_1 = 3$ のとき

$$\frac{a_2}{7^2} > \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14} \qquad \therefore \quad a_2 > \frac{7}{2}$$

(iii) $a_1 = 4,\ 5,\ 6$ のとき，明らかに適する.

以上から

$$p_2 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{3}{6}\cdot 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式を

$$\frac{a_1}{7} + \frac{a_2}{7^2} + \cdots + \frac{a_n}{7^n} > \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(\sharp)$$

とする.

(i) $a_1 = 4,\ 5,\ 6$ のとき

$$((\sharp)\text{ の左辺}) \geqq \frac{4}{7} + \frac{a_2}{7^2} + \cdots + \frac{a_n}{7^n} > \frac{1}{2}$$

より，$(\sharp)$ は成立.

(ii) $a_1 = 1,\ 2$ のとき

$$\begin{aligned}((\sharp)\text{ の左辺}) &\leqq \frac{2}{7} + \frac{a_2}{7^2} + \cdots + \frac{a_n}{7^n} \\ &\leqq \frac{2}{7} + \frac{6}{7^2} + \cdots + \frac{6}{7^n} \\ &= \frac{2}{7} + \frac{6}{7^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{7}} \\ &< \frac{2}{7} + \frac{6}{7^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}} \\ &= \frac{2}{7} + \frac{1}{7} < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

より，$(\sharp)$ は不成立.

(iii) $a_1 = 3$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\sharp) \quad &\iff \quad \frac{3}{7} + \frac{a_2}{7^2} + \cdots + \frac{a_n}{7^n} > \frac{1}{2} \\
&\iff \quad \frac{a_2}{7^2} + \cdots + \frac{a_n}{7^n} > \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14} \\
&\iff \quad \frac{a_2}{7} + \cdots + \frac{a_n}{7^{n-1}} > \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

となる.

ここで，n 回の試行を行うとき，k 回目ではじめて

$$\frac{a_1}{7} + \frac{a_2}{7^2} + \cdots + \frac{a_k}{7^k} > \frac{1}{2}$$

となる確率を q_k とすると，(i)，(ii)，(iii) の議論より，

q_k は，$a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 3$ かつ $a_k \geqq 4$ となる場合を考えて

$$q_k = \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}$$

よって

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} q_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{3}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) の結果より

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} \\
&= \frac{3}{5}(1 - 0) \\
&= \frac{3}{5} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

問題

【1】(1) 7で割ったときの余りに注目する.

$$10 \equiv 3 \pmod{7},\ 9 \equiv 2 \pmod{7}$$

より

$$\begin{aligned} 10^6 &\equiv 3^6 \pmod{7} = 9^3 \pmod{7} \\ 9^3 &\equiv 2^3 \pmod{7} = 8 \pmod{7} \\ &\equiv 1 \pmod{7} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

これより

$$10^6 \equiv 1 \pmod{7} \quad \cdots ②$$

したがって, 土曜日となる.

次に, $100 = 6 \times 16 + 4$ より

$$\begin{aligned} 10^4 &\equiv 3^4 \pmod{7} = 9^2 \pmod{7} \\ &\equiv 4 \pmod{7} \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

$10^{100} - 10^4 = 10^4\left\{\left(10^6\right)^{16} - 1\right\}$ であるから

$$10^{100} \equiv 10^4 \pmod{7} \equiv 4 \pmod{7} \quad (\because\ ②, ③)$$

したがって, 火曜日になる.

また, $3^{100} = 9^{50} = \left(9^3\right)^{16} \cdot 9^2$ より

$$\begin{aligned} 3^{100} &\equiv 9^2 \pmod{7} \quad (\because\ ①) \\ &\equiv 4 \pmod{7} \quad (\because\ ③) \end{aligned}$$

したがって, 火曜日となる.

≪別解≫

$$\begin{aligned} 10^6 &= (7+3)^6 = 7A_1 + 3^6 = 7A_1 + 9^3 = 7A_1 + (7+2)^3 \\ &= 7A_1 + 7A_2 + 2^3 = 7(A_1 + A_2 + 1) + 1 \end{aligned}$$

をみたす正の整数 A_1, A_2 が存在する. よって, 10^6 を7で割ると1余る.

または

$$\begin{aligned} 10^6 - 1 &= (10^3 + 1)(10^3 - 1) \\ &= (10^3 + 1)(10 - 1)(10^2 + 10 + 1) \\ &= (10^3 + 1) \cdot 9 \cdot 111 \\ &= 7 \cdot 143 \cdot 9 \cdot 111 \end{aligned}$$

としてもよい.

次に, $10^{100} = \left(10^6\right)^{16} \times 10^4$ と

$$\begin{aligned} 10^4 - 4 = 100^2 - 2^2 &= (100 + 2)(100 - 2) \\ &= 102 \times 98 \\ &= 7 \cdot 14 \cdot 102 \end{aligned}$$

より，10^4 を 7 で割ると余りは 4 となる．

$$10^{100} - 3^{100} = (7+3)^{100} - 3^{100} = 7B + 3^{100} - 3^{100} = 7B$$

となる整数 B が存在するので，10^{100} と 3^{100} を 7 で割ったときの余りは等しい．

以上より，10^6, 100^{100}, 3^{100} 日後はそれぞれ土曜日，火曜日，火曜日となる．

(2)　(i) 1^n, 3^n は奇数，2^n, 4^n は偶数であることから S_n は偶数である．このとき

$$\begin{aligned} S_n &= 1^n + (3-1)^n + 3^n + (3+1)^n \\ &= 1 + 3K + (-1)^n + 3^n + 3L + 1 \\ &= 3(K + L + 3^{n-1}) + 2 + (-1)^n \end{aligned}$$

となる整数 K, L が存在し，S_n を 3 で割ったときの余り $2+(-1)^n$ は n が偶数のとき，3 となるので，S_n は 3 の倍数である．

このとき，S_n は偶数であり，3 の倍数でもあることから，6 の倍数となる．

よって，求める条件は

“n が偶数” である．

(ii) S_n が 3 の倍数でないときは 12 の倍数でない．

そこで，S_n が 3 の倍数であるが，4 の倍数でないことを示す．

n : 偶数 のとき

$$S_n = 1 + 2^n + 4M + (-1)^n + 4^n$$

となる正の整数 M が存在する．n が偶数であるから，4 で割ったときの余りは

$$1 + (-1)^n = 2 \quad (\because \ n : \text{偶数})$$

したがって，(1) より，3 の倍数であり，4 の倍数であることはない．

よって，S_n は 12 の倍数でない．

【2】(1) x^n を $(x-k)(x-k-1)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$x^n = (x-k)(x-k-1)Q(x) + ax + b$

両辺に $x = k,\ k+1$ をそれぞれ代入して

$$k^n = ak + b \cdots\cdots ①$$
$$(k+1)^n = a(k+1) + b \cdots\cdots ②$$

② − ① より

$(k+1)^n - k^n = a$

n, k は自然数であるから，a は整数である。すると，① より

$b = k^n - ak$

より，b も整数である。　　(証明終)

(2) a と b をともに割り切る素数 p が存在するとする。a, b は a'，b' を整数として

$a = pa'$，$b = pb'$

とおける。①より

$k^n = p(a'k + b')$

よって，k^n は p で割り切れ，k も p で割り切れる。

②より

$(k+1)^n = p(a'k + a' + b')$

よって，$(k+1)^n$ は p で割り切れ，$k+1$ も p で割り切れる。

すると，s，t を $s < t$ をみたす整数として

$k = ps$，$k+1 = pt$

とおける。このとき

$p(t-s) = 1$

$t-s$ は正の整数であるから，$p = 1$，$t-s = 1$ となるが，これは p が素数であることに反する。したがって，a と b をともに割り切る素数は存在しない。　　(証明終)

【3】 (i) $x = 2m$ ($1 \leqq m \leqq 10$, m は整数) のとき

$$y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot (2m)^2 = 2m^2$$

このとき，y は 1 から $2m^2 - 1$ までの $2m^2 - 1$ 個の値をとるから，これを $m = 1$ から $m = 10$ まで加えて，

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{10}(2m^2 - 1) &= 2\sum_{m=1}^{10} m^2 - 10 \\ &= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 10 \\ &= 760\end{aligned}$$

(ii) $x = 2m - 1$ ($1 \leqq m \leqq 10$, m は整数) のとき

$$y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(2m - 1)^2 = 2m^2 - 2m + \frac{1}{2}$$

よって、このとき y は 1 から $2m^2 - 2m$ までの $2m^2 - 2m$ 個の値をとるので，これを $m = 1$ から $m = 10$ まで加えて，

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{10}(2m^2 - 2m) &= 2\sum_{m=1}^{10} m^2 - 2\sum_{m=1}^{10} m \\ &= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 770 - 110 \\ &= 660\end{aligned}$$

したがって、求める個数は

$$760 + 660 = \mathbf{1420} \qquad \text{（答）}$$

【4】(1) 自然数 m, n は奇数であるから

$$\begin{cases} m = 2p+1 \\ n = 2q+1 \end{cases} \qquad (p,\ q \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表せる．これより

$$f(m)f(n) = (-1)^p(-1)^q = (-1)^{p+q}$$

また，$mn = (2p+1)(2q+1) = 2(2pq+p+q)+1$ より

$$f(mn) = (-1)^{2pq+p+q} = (-1)^{2pq}(-1)^{p+q}$$

ここで，$2pq$ は偶数であるから，$(-1)^{2pq} = 1$ より

$$f(mn) = (-1)^{p+q}$$

よって

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

(2) 自然数 m, n は

$$\begin{cases} m = 2^\alpha m' \\ n = 2^\beta n' \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} \alpha,\ \beta \text{ は } 0 \text{ 以上の整数} \\ m',\ n' \text{ は正の奇数} \end{array} \right)$$

と表せる．

$f(2n) = f(n)$ より

$$f(2^k n) = f(2^{k-1}n) = f(2^{k-2}n) = \cdots = f(n)$$

であるから

$$f(m) = f(2^\alpha m') = f(m'), \quad f(n) = f(2^\beta n') = f(n')$$

また，$mn = 2^{\alpha+\beta}m'n'$ より

$$f(mn) = f(m'n')$$

ところで，m', n' は，正の奇数であるから，(1) より

$$f(m'n') = f(m')f(n')$$

よって

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

【5】(1)

$$r \cdot {}_p\mathrm{C}_r = r \cdot \frac{p!}{r!(p-r)!} = \frac{p(p-1)!}{(r-1)!\{(p-1)-(r-1)\}!} = p \cdot {}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

p と r は互いに素で，p は素数であるから ${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数である．

≪別解≫ 前半：

$$\sum_{r=0}^{p} {}_p\mathrm{C}_r x^r = (1+x)^p$$

両辺 x で微分すると

$$\sum_{r=1}^{p} r\,{}_p\mathrm{C}_r x^{r-1} = p(1+x)^{p-1}$$

x^{r-1} の係数を比較して

$$r\,{}_p\mathrm{C}_r = p \cdot {}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

(2) $(1+x)^p = \displaystyle\sum_{r=0}^{p} {}_p\mathrm{C}_r x^r$ に $x=1$ を代入すると

$$2^p = 2 + \sum_{r=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_r$$

ここで ${}_p\mathrm{C}_r$ $(1 \leq r \leq p-1)$ は p の倍数.

よって，$p=2$ のとき余り 0，$p>2$ のとき余り 2 である.

【6】(1) $a=\sqrt{2}$ のとき，$1<\sqrt{2}<2$ より

$$a_1=\langle a\rangle=\sqrt{2}-1$$

であり，(ii) より

$$a_2=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=\langle\sqrt{2}+1\rangle$$

$2<\sqrt{2}+1<3$ より

$$a_2=\sqrt{2}-1$$

したがって，$a_1=a_2=\sqrt{2}-1$ より帰納的に

$$a_n=\sqrt{2}-1\quad(n=1,2,\cdots)\qquad\text{(答)}$$

(2) $a_n=a$ より，$a_1=a$ が必要で

$$\frac{1}{3}\leqq a<1\qquad\therefore\quad 1<\frac{1}{a}\leqq 3$$

よって，$\dfrac{1}{a}$ の整数部分は 1 または 2 または 3 となるから，この条件のもと $a_2=a$ となるような実数 a を求める．

(I) $\dfrac{1}{a}$ の整数部分が 1，すなわち $1<\dfrac{1}{a}<2$ のとき

$$a_2=\frac{1}{a}-1=a\qquad\therefore\quad a^2+a-1=0$$

$\dfrac{1}{2}<a<1$ より

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

(II) $\dfrac{1}{a}$ の整数部分が 2，すなわち $2\leqq\dfrac{1}{a}<3$ のとき

$$a_2=\frac{1}{a}-2=a\qquad\therefore\quad a^2+2a-1=0$$

$\dfrac{1}{3}<a\leqq\dfrac{1}{2}$ より

$$a=-1+\sqrt{2}$$

(III) $\dfrac{1}{a}$ の整数部分が 3，すなわち $\dfrac{1}{a}=3$ のとき

$$\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=0$$

であるから，$\left\langle\dfrac{1}{a}\right\rangle=a$ は成立しない．

以上より，求める a の値は

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ -1+\sqrt{2}\qquad\text{(答)}$$

(3) $q=1$ のとき，$a_1=0$ よりすべての自然数 n に対して $a_n=0$ となるので，$q \geqq 2$ のもとで考える．$a_q \fallingdotseq 0$ と仮定すると，$n=1, 2, \cdots, q$ に対して $a_n \fallingdotseq 0$ となり，a が有理数のとき，明らかに a_n も有理数であるから，$n=1, 2, \cdots, q$ に対して

$$a_n = \frac{x_n}{y_n} \quad (x_n \text{と } y_n \text{は互いに素な正の整数})$$

とおける．ここで，y_n を x_n で割ったときの商を Q_n，余りを r_n とすると，x_n と r_n は互いに素な整数で

$$y_n = x_n Q_n + r_n,\ 0 \leqq r_n < x_n \quad (n=1, 2, \cdots, q)$$

であり，$k=1, 2, \cdots, q-1$ において

$$a_{k+1} = \left\langle \frac{y_k}{x_k} \right\rangle = \left\langle \frac{x_k Q_k + r_k}{x_k} \right\rangle = \frac{r_k}{x_k}$$

であるから，$x_{k+1}=r_k$，$y_{k+1}=x_k$ となる．

したがって，$r_n < x_n$ $(n=1, 2, \cdots, q-1)$ より

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_{q-1} > x_q \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．しかし，$a_1 < 1$，$y_1 \leqq q$ より，$x_1 < q$ となるから，①と合わせると x_q は 0 以下となり，x_q が正の整数であることに矛盾する．

よって，$a_q = 0$ であるから，q 以上のすべての自然数 n に対して $a_n = 0$ である．

(証明終)

問題

【1】いくつか記法上の約束をしておく.

- n を正整数として, 1 から n までの正整数の集合を E_n で表す：$E_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$. この集合は $\langle n|$ と表すこともできるが, ここでは用いない.
- 有限集合 S について, $\#S$ で S の要素の個数を表す.
- 任意の集合 A, B について, A から B に含まれる要素をすべて取り除いてできる集合を, A と B の「**集合論的差 (set-theorical difference)**」と言い, $A \setminus B$ と表す：
$$A \setminus B \overset{def}{=} A \cap \overline{B}$$
- 2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を $\dbinom{n}{r}$ で表す.

(1) **加法等式** $\dbinom{n}{r} = \dbinom{n-1}{r-1} + \dbinom{n-1}{r}$.

Proof 1) 右辺から左辺を導く.

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!}\\ &= \frac{(n-1)!\,r + (n-1)!\,(n-r)}{r!\,(n-r)!}\\ &= \frac{(n-1)!\,(r+n-r)}{r!\,(n-r)!}\\ &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r} = (\text{左辺}).\end{aligned}$$

(証明終)

Proof 2)

E_n の r 元部分集合全体を考える. これを次の 2 つに類別する：

- 要素 1 を含む r 元部分集合は, $E_n \setminus \{1\}$ の $(r-1)$ 元部分集合に 1 を加えてできるから, その個数は $\dbinom{n-1}{r-1}$ 個ある.
- 要素 1 を含まない r 元部分集合は, $E_n \setminus \{1\}$ の r 元部分集合に他ならないからその個数は $\dbinom{n-1}{r}$ 個ある.

E_n の r 元部分集合の個数は, これらの和に等しいから, 加法等式が成り立つ.

(証明終)

(2) **吸収等式** $r\dbinom{n}{r} = n\dbinom{n-1}{r-1}$, (ただし $n \geqq 1$).

Proof 1) 左辺から右辺を導く.

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= r \cdot \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = n\binom{n-1}{r-1} = (\text{右辺}).\end{aligned}$$

(証明終)

Proof 2)

集合 $E_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ の r 元部分集合の個数は, 異なる n 個のものから r 個をとる組合せの個数に等しいから, その個数は $\binom{n}{r}$ 個ある.

いま, $j = 1, 2, \cdots, n$ に関して, E_n からその要素 j を取り除いてできる集合を A_j と表す:

$$A_j = E_n \backslash \{j\} = \{1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n\}.$$

任意の j について, 集合 A_j の $(r-1)$ 元部分集合の個数は, $(n-1)$ 個の異なるものから $(r-1)$ 個をとる組合せの個数になるから, それは $\binom{n-1}{r-1}$ 個ある.

ある j について, 集合 A_j の $(r-1)$ 元部分集合それぞれに j を加えてできる集合を作ると, それは E_n の r 元部分集合で, これを $j = 1, 2, \cdots, n$ すべてについて行うと, 重複を許して全部で $n\binom{n-1}{r-1}$ 個できる. この中に, 同じ集合が何度重複しているかを考える.

いま, 特に E_n の r 元部分集合 $\{1, 2, \cdots, r\}$ を考えると, この集合は

- A_1 の $r-1$ 元部分集合 $\{2, 3, \cdots, r\}$ に 1 を加えてできる.
- A_2 の $r-1$ 元部分集合 $\{1, 3, \cdots, r\}$ に 2 を加えてできる.
- $\cdots\cdots$
- A_r の $r-1$ 元部分集合 $\{1, 2, \cdots, r-1\}$ に r を加えてできる.

という, r 通りのでき方が考えられるから, 重複度は r である.

これは一般に E_n の r 元部分集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ について成り立つから, すべての r 元部分集合は, 重複度 r で, つまり, r 回ずつ重複して数えて $n\binom{n-1}{r-1}$ 個ある.

従って

$$\binom{n}{r} = \frac{1}{r} \cdot n\binom{n-1}{r-1}, \quad \therefore\ r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}.$$

(証明終)

【2】(1) $f(x) = 1$ ならば，任意の $k \in E_n$ について $f\left(\dfrac{k}{n}\right) = 1$ である．$1 - x = y$ とすれば $x + y = 1$ であり，任意の正の整数 n について

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} x^0 y^{n-0} + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} x^{n-0} y^0 \\
&= (x+y)^n \qquad \because\ 2\text{ 項定理そのもの} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

よって，求める関数 $f_n(x)$ は定数関数 $f_n(x) = 1$ である．　　(答)

(2) $f(x) = x$ のとき，$f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{k}{n}$ である．

$k = 0$ のとき，加えられる項は

$$\binom{n}{0} \frac{0}{n} x^0 (1-x)^n = 0$$

であるから，求める和は $k = 1$ から n に渡る．

$k = 1, 2, \cdots, n$ のとき，$\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k}$ について，吸収等式により

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \iff k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \iff \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

となる．$1 - x$ を y として，求める $f_n(x)$ は

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k y^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} y^{n-k}.
\end{aligned}$$

ここで，$k - 1 = j$ と書き換えると，k が 1 から n まで動くとき，j は 0 から $n - 1$ まで動くから

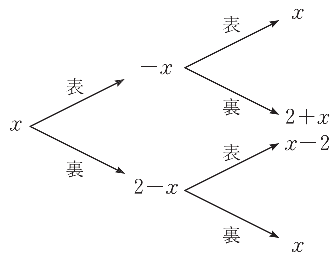
$$\begin{aligned}
f_n(x) &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j y^{n-j-1} \\
&= x(x+y)^{n-1} = x. \qquad \because\ 2\text{ 項定理と } x + y = 1
\end{aligned}$$

以上より

$$f_n(x) = x.$$

（証明終）

【3】(1) 石の座標の推移は次の通り。



題意をみたすのは，表 → 表，裏 → 裏のいずれか。
よって，求める確率は

$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 　　(答)

(2) 2 回硬貨を投げたとき

（I） 座標が +2 となる確率は　$\frac{1}{4}$

（II） 座標が −2 となる確率は　$\frac{1}{4}$

（III）同じところにいる確率は　$\frac{1}{2}$

であり，題意をみたすのは (I) が n 回続けて起こるとき。
よって，求める確率は

$\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 　　(答)

【4】 $k \geqq 2$ に対して，k 回目にはじめてちょうど 1 人の勝者が決まるのは，

(i) $k-1$ 回引き分けが続いて，k 回目に一気に 1 人が勝つか，

(ii) $k-1$ 回目までに，1 人が負けて，k 回目に残る 2 人のうち 1 人が勝つか，

のいずれかであり，事象 (i) と (ii) は排反である．

3 人でジャンケンをするとき，引き分ける確率は $\dfrac{1}{3}$，1 人だけが勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$ であるから (i) の起こる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3^k}. \qquad \cdots(\sharp 1)$$

次に，2 人でジャンケンをするとき，引き分ける確率 $\dfrac{1}{3}$，勝負のつく確率は $\dfrac{2}{3}$ であることに注意して，(ii) の確率を求めると，

$$\binom{k-1}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{2}{3}=(k-1)\cdot\frac{2}{3^k}. \qquad \cdots(\sharp 2)$$

ここで，2 項係数 $\dbinom{k-1}{1}$ は $k-1$ 回目までに 1 人が負けるのがどの段階でかを求める場合の数である．

$(\sharp 1)$, $(\sharp 2)$ より，$k \geqq 2$ の下で，求める確率は

$$\frac{1}{3^k}+(k-1)\cdot\frac{2}{3^k}=\frac{2k-1}{3^k}. \qquad \cdots(\sharp 3)$$

また，$k=1$ のとき，1 回目で 1 人の勝者が決まる確率は，$\dfrac{1}{3}$ であるから，$(\sharp 3)$ は $k=1$ のときも成立する．

以上より，k 回目にはじめてちょうど 1 人の勝者が決まる確率は，

$$\frac{2k-1}{3^k}. \quad (k \text{ は正の整数}) \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 樹形図を書くと右図のようになり，
求める値は，

$$\begin{aligned} & s^2 + (1-s)^2 \\ &= \mathbf{2s^2 - 2s + 1} \qquad (答) \end{aligned}$$

第 1 日目	第 2 日目	第 3 日目	確率
晴	晴	晴	s^2
	雨	晴	$(1-s)^2$

(2) 第 $i+1$ 日目が晴のときは，右図のように 2 つの場合がある．よって，

$$\begin{cases} p_{i+1} = sp_i + (1-s)q_i \\ q_{i+1} = (1-s)p_i + sq_i \end{cases} \qquad (答)$$

第 i 日目	第 $i+1$ 日目	確率
晴	晴	sp_i
雨	晴	$(1-s)q_i$

(3) (2) より，

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= sp_n + (1-s)q_n \\ &= sp_n + (1-s)(1-p_n) \\ &= (2s-1)p_n + (1-s) \end{aligned}$$

$x = (2s-1)x + (1-s)$ を解くと，$x = \dfrac{1}{2}$ であるので，

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2s-1)(p_n - \frac{1}{2})$$

よって，$\left\{p_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ は，公比が $2s-1$ の等比数列であり，初項は $p_1 = 1$ より，
$\dfrac{1}{2}$ である．したがって，

$$\begin{aligned} p_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}(2s-1)^n \\ \therefore\quad p_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2s-1)^n \qquad (答) \end{aligned}$$

また，$p_{n+1} + q_{n+1} = 1$ より，

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= 1 - p_{n+1} \\ \therefore\quad q_{n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2s-1)^n \qquad (答) \end{aligned}$$

【6】(1) 表 (head) が出ることを H で，裏 (tail) が出ることを T で表す．数直線上の 3 点 $\mathrm{A}_n(n)$，$\mathrm{A}_{n+1}(n+1)$，$\mathrm{A}_{n+2}(n+2)$ に着目する．

点 A_{n+2} に点 P が到達するのは，次の 2 つの場合がある：

- 点 A_{n+1} に達して，H が出て +1 進む.
- 点 A_n に達して，T が出て +2 進む.

この状態遷移を表すと，次の diagram を得る：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\mathrm{H}"] \arrow[dr, "\mathrm{T}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{H}"] \\ & 2 \end{tikzcd}$$

点 A_n にある確率が p_n であり，また H, T についていずれも確率は $\frac{1}{2}$ であるから，次の漸化式を得る：

$$n \text{ は任意の正の整数; } p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n.$$

従って $n \geqq 3$ の下で

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}. \qquad \text{(答)}$$

(2) まず，p_1 は，1 回目の試行で H が出る場合だから $p_1 = \frac{1}{2}$ であり，また p_2 は，最初の 2 回の試行でいずれも H が出るか，または 1 回目の試行で T が出る場合だから，$p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ である．

よって解くべき漸化式は

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{2}, \quad p_2 = \dfrac{3}{4}, \\ p_{n+2} = \dfrac{1}{2}p_{n+1} + \dfrac{1}{2}p_n \ (n \text{ は正の整数}) \end{cases}$$

である．第 2 式が

$$p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n) \iff p_{n+2} = (\alpha+\beta)p_{n+1} - \alpha\beta p_n$$

と変形されたとすれば，

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{1}{2}, \\ \alpha\beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff (\alpha, \beta) = \left(1,\ -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$$

を得る．

(i) $(\alpha, \beta) = \left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$ のとき，$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$ となり，$\{p_{n+1} - p_n\}$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列となる．初項は $p_2 - p_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ だから，

$$p_{n+1} - p_n = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(ii) $(\alpha, \beta) = \left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ のとき，$p_{n+2} + \dfrac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \dfrac{1}{2}p_n$ となり，$\left\{p_{n+1} + \dfrac{1}{2}p_n\right\}$ は定数数列である．従って

$$p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

②から①を引いて

$$\frac{3}{2}p_n = 1 - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \therefore\ p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n. \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $w([a,\ b\ ;\ c])=-q$ となるとき，題意より $w([a,\ b\ ;\ c])=p-q-(a+b)$ なので

$$p-q-(a+b)=-q$$
$$\therefore\quad p=a+b$$

このとき，$a,\ b$ は $b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ をみたすので

$(a,\ b)=(p,\ 0)$

の 1 組に定まる．

また，c は $b \leqq c \leqq a$ をみたすので，$(a,\ b)=(p,\ 0)$ に対して c は

$c=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p$

となる．したがって $w([a,\ b\ ;\ c])=-q$ となる $(p,\ q)$ パターンは

$[p,\ 0\ ;\ 0],\ [p,\ 0\ ;\ 1],\ [p,\ 0\ ;\ 2],\ \cdots,\ [p,\ 0\ ;\ p]$

であり，求める個数は

$p+1$ 個　　(答)

である．

同様に，$w([a,\ b\ ;\ c])=p$ となるとき

$$p-q-(a+b)=p$$
$$\therefore\quad -q=a+b$$

このとき，$a,\ b$ は $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a$ をみたすので

$(a,\ b)=(0,\ -q)$

の 1 組に定まる．

また，c は $b \leqq c \leqq a$ をみたすので，$(a,\ b)=(0,\ -q)$ に対して c は

$c=0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ -q$

となる．したがって $w([a,\ b\ ;\ c])=p$ となる $(p,\ q)$ パターンは

$[0,\ -q\ ;\ 0],\ [0,\ -q\ ;\ -1],\ [0,\ -q\ ;\ -2],\ \cdots,\ [0,\ -q\ ;\ -q]$

であり，求める個数は

$q+1$ 個　　(答)

である．

(2) $w([a,\ b\ ;\ c])=-p+s$ となるとき，$p=q$ より

$w([a,\ b\ ;\ c])=-(a+b)$

$\therefore\quad a+b=p-s$ …………………①

となり，$-p \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$s \leqq p$ であるから，①をみたす $(a,\ b)$ の組が存在するのは，$0 \leqq s \leqq p$ のときである．このとき，

$(a,\ b)=(p-s,\ 0),\ (p-s+1,\ -1),\ (p-s+2,\ -2),\ \cdots,\ (p,\ -s)$

の $s+1$ 組となり，この $(a,\ b)$ の組それぞれに対して c は

$(p-s+1)$ 個, $(p-s+3)$ 個, $(p-s+5)$ 個, $\cdots$, $(p+s+1)$ 個

存在する．

よって①をみたす $(p,\ p)$ パターンの個数は，初項 $p-s+1$，末項 $p+s+1$，項数 $s+1$ の等差数列の和となるので

$$
\begin{aligned}
&(p-s+1)+(p-s+3)+(p-s+5)+\cdots+(p+s+1)\\
=&\frac{\{(p-s+1)+(p+s+1)\}(s+1)}{2}\\
=&(p+1)(s+1)
\end{aligned}
$$

したがって，求める個数は

$(p+1)(s+1)$ 個　　(答)

M2JS/M2J
高２選抜東大数学
高２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	