

高 2 東大理系数学Ⅲ 導入



問題

【1】 (1) 0

(2) ∞ (3) $-\infty$

(4) 振動

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{3n^2 - 4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{4}{n}} = \frac{1}{3}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{2n} k^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \times \frac{1}{6} \cdot 2n \cdot (2n+1)(4n+1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(4 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{8}{3}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n) - (n^2 - 2n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 2n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(4 + \frac{1}{n} - 4\right)}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} = 3$$

$$(10) \quad (i) \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } 0 < \frac{\sin \theta}{\cos \theta} < 1 \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^n \theta - \sin^n \theta}{\cos^n \theta + \sin^n \theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^n}{1 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^n} = 1$$

$$(ii) \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } \cos \theta = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^n \theta - \sin^n \theta}{\cos^n \theta + \sin^n \theta} = 0$$

$$(iii) \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } 0 < \frac{\cos \theta}{\sin \theta} < 1 \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^n \theta - \sin^n \theta}{\cos^n \theta + \sin^n \theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^n - 1}{\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^n + 1} = -1$$

【2】 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 5}{x^2 + 1} = \frac{4}{2} = 2$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \tan x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \tan x = -\infty$ より $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ は存在しない.

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$

(4) $x = -t$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ なので

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2 - t + 1}}{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = -1$$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x+3} = \frac{3}{4}$

(6)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - (1+x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1 - (1+x)^2}{x^2 \{\sqrt{2x+1} + 1+x\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{2x+1} + 1+x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

【3】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 2a + 1}{x^2 + x - 2}$ が有限の値であり, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax - 2a + 1) &= 0 \\ \therefore 1 + a - 2a + 1 &= 0 \quad \therefore a = 2 \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 2a + 1}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x+2} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

【4】 (1) 真

(2) 偽 反例: $a_n = b_n = n$

(3) 偽 反例: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$

(4) 偽 反例: $a_n = 1$, $b_n = \frac{1}{n}$

(5) 偽 反例: $a_n = (-1)^n$

【5】 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$ より

$$\frac{f(x) - g(x)}{(x-p)^2} = \frac{x^2 + ax + b - \frac{1}{x+1}}{(x-p)^2} = \frac{x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b - 1}{(x+1)(x-p)^2} \quad \dots\dots(*)$$

これが $x \rightarrow p$ のとき有限な値となるので、分子は $(x-p)^2$ で割り切れる (\rightarrow 《注》).
よって

$$x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b - 1 = (x-p)^2(x+c) \quad (c: \text{定数})$$

とおけて、右辺を展開して係数比較をすると

$$a+1 = c - 2p, \quad a+b = p^2 - 2pc, \quad b-1 = p^2c$$

$$a+1 = \frac{b-1}{p^2} - 2p, \quad a+b = p^2 - 2\frac{b-1}{p}$$

これを a, b について解いて

$$a = -2p - \frac{1}{(p+1)^2}, \quad b = p^2 + \frac{2p+1}{(p+1)^2}$$

また、このとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - g(x)}{(x-p)^2} &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{(x-p)^2(x+c)}{(x+1)(x-p)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{x+c}{x+1} \\ &= \frac{p+c}{p+1} \\ &= \frac{p+1 - \frac{1}{(p+1)^2}}{p+1} \quad \left(\because c = a+1+2p = 1 - \frac{1}{(p+1)^2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(p+1)^3} \end{aligned}$$

《注》 $\lim_{x \rightarrow p} (*)$ が有限な値で $\lim_{x \rightarrow p}(\text{分母}) = 0$ より $\lim_{x \rightarrow p}(\text{分子}) = 0$

よって、因数定理より分子は $x-p$ で割り切れるから、(分子) $= (x-p)Q(x)$ とかけて

$$\lim_{x \rightarrow p} (*) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{(x-p)Q(x)}{(x+1)(x-p)^2} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{Q(x)}{(x+1)(x-p)}$$

もう一度同じ議論ができて、 $Q(x)$ は $x-p$ で割り切れるから、結局、分子は $(x-p)^2$ で割り切れる。

添削課題

【1】 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{ax^2 + bx + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = 84$ から $\lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x} - 2) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} (ax^2 + bx + 8) &= 0 \\ \therefore 64a + 8b + 8 &= 0 \quad \therefore b = -8a - 1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{ax^2 + bx + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{ax^2 - (8a + 1)x + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x - 8)(ax - 1)}{\sqrt[3]{x} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)(ax - 1)}{\sqrt[3]{x} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)(ax - 1) \\ &= (4 + 4 + 4)(8a - 1) \\ &= 12(8a - 1) \end{aligned}$$

これが 84 に等しいので

$$12(8a - 1) = 84 \quad \therefore a = 1$$

よって ① とから

$$(a, b) = (1, -9)$$

2章 数列の極限 (2)

問題

【1】

(1) $\{a_n\}$ は $\frac{5n^2 + 5n - 3}{n^2 + n} < a_n < \frac{5^{n+1} + 4^{n-1}}{5^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) をみたし

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 5n - 3}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 5 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 4^{n-1}}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5 + \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} \right\} = 5 \end{cases}$$

よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$$

(2) (i) $a = \frac{1}{1+b}$ ($b > 0$) とおくと

$$\begin{aligned} na^n &= \frac{n}{(1+b)^n} \\ &= \frac{n}{1 + {}_n C_1 b + {}_n C_2 b^2 + \dots + b^n} \quad (\because 2 \text{項定理}) \\ &< \frac{n}{{}_n C_2 b^2} \quad (\because n \geq 2) \\ &= \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2} b^2} \end{aligned}$$

一方、 $n \geq 2$ 、 $0 < a < 1$ より、 $0 < na^n$

$$\therefore 0 < na^n < \frac{2}{(n-1)b^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

〔証明終〕

(ii) $\{na^n\}$ は $\textcircled{1}$ をみたし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-1)b^2} = 0$ より、はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0 \quad (0 < a < 1)$$

【2】 $x \rightarrow \infty$ とするので $x > 1$ としてよい。このとき

$$\begin{aligned} \log_x x^2 &< \log_x (x + x^2) < \log_x (2x^2) \\ 2 \log_x x &< \log_x (x + x^2) < \log_x 2 + \log_x x^2 \\ 2 \log_x x &< \log_x (x + x^2) < \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} x} + 2 \log_x x \\ \therefore 2 &< \log_x (x + x^2) < \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} x} + 2 \end{aligned}$$

ここで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} x} + 2 \right) = 2$ なので、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_x (x + x^2) = 2$$

- [3]** (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$
 (2) $\lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$ より, $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$ は存在しない.
 (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$
 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x^2)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x^2)}{3x^2} \cdot \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

- [4]** (1) $n \geq 3$ のとき

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad \text{と} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n-2} a_k$$

の辺々をひいて

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{n-2} a_k = a_{n-1}$$

$\therefore a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$

- (2) $a_1 > 0, a_2 > 0$ と $\textcircled{1}$ から, 帰納的に $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) なので, $\textcircled{1}$ の両辺を a_n で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

いま, $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ であるから,

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで, $\{b_n\}$ が収束すると仮定したとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1} = \alpha$ (正の定数) とおくと, $\textcircled{2}$ の両辺の \lim をとることにより

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \quad \therefore \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\alpha > 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

- (3) $c = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とおくと, c は $c = 1 + \frac{1}{c} \dots \textcircled{3}$ をみたす.
このとき,

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - c| &= \left| 1 + \frac{1}{b_n} - c \right| \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \left| \frac{1}{b_n} + 1 - c \right| \\ &= \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{c} \right| \quad (\because \textcircled{3}) \\ &= \frac{|b_n - c|}{cb_n} \quad (\because c > 0, b_n > 0) \end{aligned}$$

さて, $a_1 > 0, a_2 > 0$ と ① より $\{a_n\}$ は単調増加数列であるから,

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

に注意すると

$$|b_{n+1} - c| = \frac{|b_n - c|}{cb_n} \leq \frac{|b_n - c|}{c} \quad (n = 3, 4, \dots)$$

次に, この不等式を繰り返し使うと

$$0 \leq |b_n - c| \leq \frac{|b_{n-1} - c|}{c} \leq \frac{|b_{n-2} - c|}{c^2} \leq \dots \leq \frac{|b_3 - c|}{c^{n-3}}$$

であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_3 - c|}{c^{n-3}} = 0$ ($\because c > 1$) から, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - c| = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

〔証明終〕

【5】(1) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ を 2 項定理によって展開する.

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + {}_nC_1 \frac{1}{n} + {}_nC_2 \frac{1}{n^2} + {}_nC_3 \frac{1}{n^3} + \cdots + {}_nC_n \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} \\ &\quad + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

これらを比較すると、第 1, 第 2 項は等しく第 3 項から第 $n+1$ 項までは a_{n+1} の項のほうが大きい。かつ、 a_{n+1} が最後の 1 項だけ多いので

$$a_n < a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

〔証明終〕

(2) ① より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 3 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき、 $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < 3$ であるから

$$a_n < 3 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

〔証明終〕

〈注意〉(1), (2) の結果から、 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n = 1, 2, \dots$) は単調増加かつ上に有界な数列なので、収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在する。その極限値は

$$2.718281828459 \cdots$$

という無理数であることが知られており、記号で e と表し、自然対数の底と呼ぶのである。

【1】(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) $x - \frac{\pi}{4} = t$ とおくと, $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ のとき $t \rightarrow 0$ であり

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4x - \pi}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{4}{1} = 4$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$

3章 極限のまとめ

問題

【1】

- (1) 0 (答)
 (2) ∞ (答)
 (3) $-\infty$ (答)
 (4) 振動 (答)
 (5)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3 + 5n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3 + 5n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{1 + \frac{5}{n^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2}{1} = \frac{1}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n + 3) - (n^2 - 2n + 3)}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 - 2n + 3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}} = \frac{4}{2} = 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(7)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad |a| < 1 \text{ のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^n}{1 + a^n} = \frac{1}{1} = 1 \\ \text{(ii)} \quad a = 1 \text{ のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^n}{1 + a^n} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0 \\ \text{(iii)} \quad |a| > 1 \text{ のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^n}{1 + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a^n} - 1}{\frac{1}{a^n} + 1} = \frac{-1}{1} = -1 \end{array} \right.$$

以上から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^n}{1 + a^n} = \begin{cases} 1 & (|a| < 1) \\ 0 & (a = 1) \\ -1 & (|a| > 1) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(8)

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{1}{(n-3)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)} \cdot \frac{1}{(n-3)!} \\ &= 1 \cdot 0 = 0 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[2]

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\sin x)}{x} = \frac{\cos 1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cos 1 \quad (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2(x+3)}{(x+2)^2(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x+1} \\ &= \frac{1}{-1} = -1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

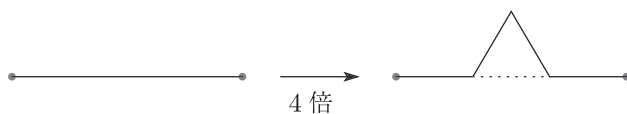
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)}{(1+x) - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{1+x} + 1) \\ &= 1 \cdot 2 = 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos 3x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{-2 \sin 2x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[3]

多角形 A_n の辺の個数を a_n とおくと、題意から



$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 4a_n$$

より

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

よって (イ) から、 A_n に 1 辺の長さ $\frac{1}{3^n}$ の正三角形を a_n 個付け加えたものが A_{n+1} であるから

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \cdot a_n \\ &= S_n + \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 9^n} \times 3 \cdot 4^{n-1} \\ &= S_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left\{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【4】

(1) $1 < a_n < 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を数学的帰納法を用いて証明する.

(I) $n = 1$ のとき, $a_1 = \frac{3}{2}$ より $1 < a_1 < 2$ は成立する.

(II) $n = k$ (≥ 1) で成り立つとすると

$$1 < a_k < 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

このとき, $a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 4}{2a_k + 3}$ より

$$a_{k+1} - 1 = \frac{a_k^2 + 4 - (2a_k + 3)}{2a_k + 3} = \frac{(a_k - 1)^2}{2a_k + 3} > 0 \quad (\because \textcircled{1} \text{より } a_k > 1)$$

$$2 - a_{k+1} = \frac{4a_k + 6 - (a_k^2 + 4)}{2a_k + 3} = \frac{-(a_k - 2)^2 + 6}{2a_k + 3} > 0$$

($\because \textcircled{1}$ より $1 < a_k < 2$)

$$\therefore 1 < a_{k+1} < 2$$

よって $n = k + 1$ のとき成立する.

以上, (I)(II) から $1 < a_n < 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) $\dots\dots \textcircled{2}$ が示された. (証明終)

(2)

$$a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n + 3} = \frac{a_n - 1}{2a_n + 3}(a_n - 1)$$

ここで $\textcircled{2}$ から

$$0 < \frac{a_n - 1}{2a_n + 3} < \frac{2 - 1}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{1}{5}$$

であるから,

$$a_{n+1} - 1 < \frac{1}{5}(a_n - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

よって示された.

(証明終)

(3) (1)(2) から, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} 0 < a_n - 1 &< \frac{1}{5}(a_{n-1} - 1) \\ &< \left(\frac{1}{5}\right)^2 (a_{n-2} - 1) \\ &\dots\dots \\ &< \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} (a_1 - 1) \end{aligned}$$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} (a_1 - 1) = 0$ より, はさみうちの原理から

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【5】

(1) $m(a)$ を単に m と表すと, $x = m$ は $y = x^2$ と $y = a \sin x$ の交点の x 座標であるから,

$$|m^2| = |a \sin m| = |a| |\sin m| \leq |a| \xrightarrow{a \rightarrow +0} 0$$

より, はさみうちの原理から

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} m^2 &= 0 \\ \therefore \lim_{a \rightarrow +0} m(a) &= 0 \text{ (証明終)} \end{aligned}$$

(2) 条件より

$$m^2 = a \sin m, \quad m \neq 0 \quad \implies \quad \frac{m}{a} = \frac{\sin m}{m} \dots\dots \textcircled{1}$$

であり, (1) より, $a \rightarrow +0$ のとき $m \rightarrow 0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{m(a)}{a} &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sin m}{m} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【1】

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = \infty \quad (\text{答})$$

(2) $x = -t$ とおくと $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{4t^2 + t} - 2t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(4t^2 + t) - 4t^2}{\sqrt{4t^2 + t} + 2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{t}} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{4}{3} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{4}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $1 - \cos x = \theta$ とおくと, $x \rightarrow 0$ のとき $\theta \rightarrow 0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^2} \cdot \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)^2 \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

《注意》

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を用いている. これは記憶しておきたい極限である.



会員番号	
------	--

氏名	
----	--