M1JS/M1J

本科2期10月度

# 解答

Z会東大進学教室

# 高1選抜東大数学

# 高1東大数学

# １７章　ベクトル（４）

## 問題

【1】求める直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，点 A，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{p}$ とする．またベクトルの成分を縦書きで表示する．

(1) 求める直線のベクトル方程式は，$t$ を実数として

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+4t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = 1 - 3t & \cdots ① \\ y = 2 + 4t & \cdots ② \end{cases}$$

$① \times 4 + ② \times 3$ より $t$ を消去すると

$\boldsymbol{4x + 3y = 10}$　　(答)

(2) 求める直線は点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$t$ を実数として

$$\vec{p} = \vec{a} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+7t \\ -1+4t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = -3 + 7t & \cdots ③ \\ y = -1 + 4t & \cdots ④ \end{cases}$$

$③ \times 4 - ④ \times 7$ より $t$ を消去すると

$\boldsymbol{4x - 7y = -5}$　　(答)

(3) 求める直線は点 A を通り，$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする直線であるから，

$$\begin{aligned} \left(\vec{p} - \vec{a}\right) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\ 3(x-3) - 2y &= 0 \end{aligned}$$

よって求める直線は

$\boldsymbol{3x - 2y = 9}$ (答)

【2】求める円周上の点を P$(x,\ y)$，P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とする．

(1) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\left|\vec{p} - \vec{c}\right| = 4 \iff \left|\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}\right| = 4$$

両辺を 2 乗して，求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16}$ (答)

(2) 求める円の中心を C$(\vec{c})$ とすると，C は AB の中点であるから

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また半径を $r$ とすると

$$\begin{aligned} r &= \left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

ゆえに求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5}$ (答)

＜別解＞

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，円周上の点 P(ただし，P$\fallingdotseq$ A，P$\fallingdotseq$ B) に対し AP $\perp$ BP であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$

となる．これは点 P が点 A または点 B と一致するときにも成立する．ゆえに

$$\begin{aligned}\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right)&=0\\ \begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-4\\y-1\end{pmatrix}&=0\\ (x-2)(x-4)+(y+3)(y-1)&=0\\ x^2-6x+y^2+2y+5&=0\end{aligned}$$

ゆえに求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=5} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める円の半径を $r$ とすると，

$$r=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2-1\\5-6\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{10}$$

ゆえに $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ として

$$\begin{aligned}\left|\vec{p}-\vec{c}\right|&=\sqrt{10}\\ \left|\begin{pmatrix}x+2\\y-5\end{pmatrix}\right|&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

よって求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-5)^2=10} \qquad \text{(答)}$$

**【3】** 原点を O とする．

(1) $\vec{p}\fallingdotseq\vec{a}$ のとき，$\mathrm{OB}\perp\mathrm{AP}$ である．また $\vec{p}=\vec{a}$ のとき，点 P は点 A に一致する．よって点 P は，次の図形上の点である．(図 1 参照)

**点 A を通り，直線 OB に垂直な直線**　　(答)

(2) $\vec{p}\fallingdotseq\vec{0}$ のとき $\mathrm{AB}\perp\mathrm{OP}$ である．また $\vec{p}=\vec{0}$ のとき，点 P は点 O に一致するから，点 P は，次の図形上の点である．(図 2 参照)

**点 O を通り，直線 AB に垂直な直線**　　(答)

(3) $\vec{p}\fallingdotseq\vec{c}$ のとき，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{PC}$ である．また $\vec{p}=\vec{c}$ のとき，点 P は点 C に一致する．よって点 P は，次の図形上の点である．(図 3 参照)

**点 C を通り，直線 AB に垂直な直線**　　(答)

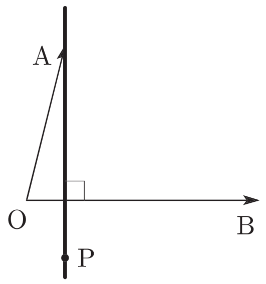
(4) $\vec{p}\fallingdotseq\vec{a}$ かつ $\vec{p}\fallingdotseq\vec{b}$ のとき，$\mathrm{AP}\perp\mathrm{BP}$，すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right)=0$$

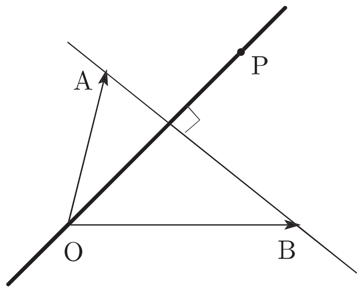
である．$\vec{p}=\vec{a}$ または $\vec{p}=\vec{b}$ のときも上式はみたされる．ゆえに点 P は，次の図形上の点である．(図 4 参照)

**線分 AB を直径とする円周**　　(答)

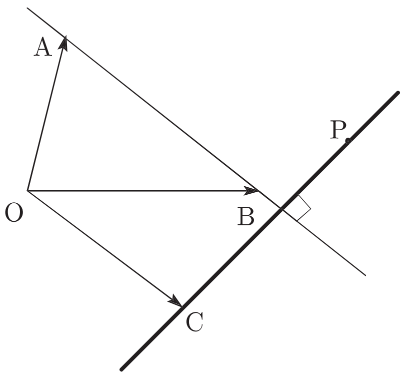
〔図 1〕



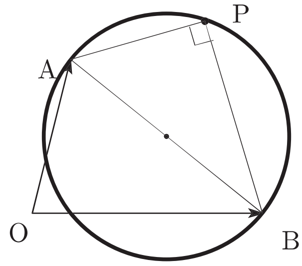

〔図 2〕




〔図 3〕




〔図 4〕




**【4】** (1) $l_1$ の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ であるから，$t$ を実数として

$$l_1\ :\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+t\\t\end{pmatrix}$$

また $l_2$ は 2 点 A(0, 1)，B(2, $-3$) を通るから，$s$ を実数として

$$l_2\ :\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1-s)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2s\\1-4s\end{pmatrix}$$

以上より，

$$\begin{cases} l_1\ :\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2+t}\\\boldsymbol{t}\end{pmatrix} \\ l_2\ :\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2s}\\\boldsymbol{1-4s}\end{pmatrix}\end{cases}\qquad (s,\ t\ \text{は実数})\qquad \textbf{(答)}$$

(2) $l_1$，$l_2$ を連立して

$$\begin{cases} 2+t=2s & \cdots ① \\ t=1-4s & \cdots ② \end{cases}$$

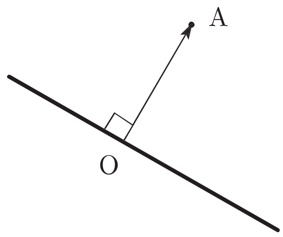
これを解いて，

$$s=\frac{1}{2},\quad t=-1$$

$l_1$ の方程式に代入して，求める交点は

**(1，− 1)**　　(答)

【5】(1) 与式の両辺を 2 乗して




$$\left|\vec{p}+2\vec{a}\right|^2=\left|\vec{p}-2\vec{a}\right|^2$$
$$\left|\vec{p}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{p}+4\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{p}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{p}+4\left|\vec{a}\right|^2$$
$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{p}=0$$

よって，$\vec{p}\fallingdotseq\vec{0}$ のとき OA ⊥ OP である．

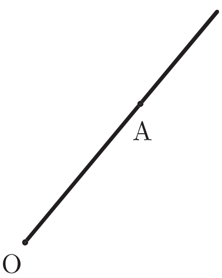
また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも，この式はみたされる．

ゆえに点 P は

**点 O を通り，直線 OA に垂直な直線**　　(答)

上の点である．

(2) $\vec{p}\fallingdotseq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を $\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると




$$\vec{a}\cdot\vec{p}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta$$

であるから

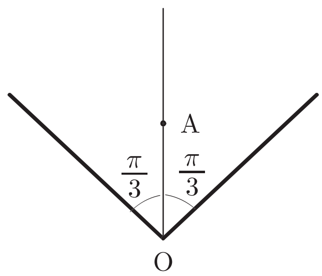
$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$
$$\cos\theta=1\qquad\therefore\ \theta=0$$

となる．また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも与式はみたされ，このとき点 P は点 O に一致する．よって点 P は

**半直線 OA**　　(答)

上の点である．

(3) $\vec{p}\fallingdotseq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を $\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると




$$2\vec{a}\cdot\vec{p}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$
$$2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$
$$\cos\theta=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$$

である．

また $\vec{p} = \vec{0}$ のときも与式はみたされ，このとき点 P は点 O に一致する．
したがって，点 P は

**半直線 OA と $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$ の角をなす半直線**　　(答)

上の点である．

【6】 $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$
ゆえに三角形 ABC は，

$$\angle \mathrm{A} = \frac{\pi}{2}$$

の直角三角形である．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

より，点 A を始点として変形すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ に注意して整理すると

$$3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 - \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|^2 = \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

ゆえに

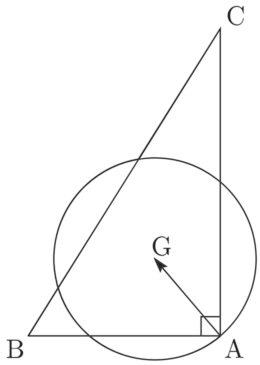
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right| = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$$

三角形 ABC の重心を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ より，上式は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AG}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|$$

ゆえに点 P は，

**三角形 ABC の重心 G を中心とし，**
**半径 AG の円周上の点.**　　(答)




【7】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ である．これが直線 $l$ の方向ベクトルであるから，直線 $l$ のベクトル方程式は $s$ を実数として

$$l:\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3s\\4-s\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

一方，A(3, 2)，B(−2, 7) を通る直線 $m$ の方向ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$$

であるから，$m$ のベクトル方程式は，$t$ を実数として

$$m:\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-5t\\2+5t\end{pmatrix}\quad\cdots②$$

交点においては $\vec{p}=\vec{q}$ であるから

$$\begin{cases}1+3s=3-5t\\4-s=2+5t\end{cases}$$

これを解くと，

$$(s,\ t)=\left(0,\ \frac{2}{5}\right)$$

① に代入して，求める交点は

**(1, 4)**　　**(答)**

(2) 直線 $n$ のベクトル方程式を求める．
A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を 3 頂点とする三角形の重心を G($\vec{g}$) とすると

$$\vec{g}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

より，

$$\vec{g}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3+2+4\\0+5+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

また $n$ の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ であるから，$n$ 上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，直線 $n$ のベクトル方程式は $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ として

$$n:\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\3-t\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

一方，$\mathrm{D}(-1,3)$，$\mathrm{E}(1,9)$ とすると，$\mathrm{D}(\vec{d})$，$\mathrm{E}(\vec{e})$ を直径の両端とする円 $C$ の中心の位置ベクトルは

$$\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+1\\3+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$$

である．また円 $C$ の直径は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(9-3)^2}=2\sqrt{10}$$

であるから，半径を $r$ とすると

$$r=\frac{2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$$

円周上の点を $\mathrm{Q}(\vec{q})$ とすれば，$\vec{q}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ として

$$\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\right|=\sqrt{10}$$
$$x^2+(y-6)^2=10\quad\cdots②$$

交点において $\vec{p}=\vec{q}$ であるから，$x=2t+1$，$y=-t+3$ を ② に代入すると，

$$\begin{aligned}(2t+1)^2+(-t+3-6)^2&=10\\t(t+2)&=0\\t&=0,\ -2\end{aligned}$$

① に代入して，求める交点は

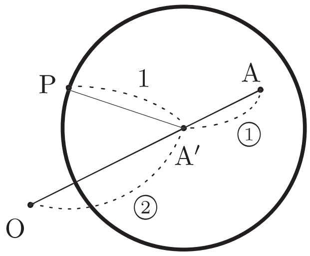
$t=0$ のとき　**(1, 3)**　(答)
$t=-2$ のとき　**(−3, 5)**　(答)

【8】原点を O とする．

(1)

$$\left|3\left(\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)\right|=3$$
$$\left|\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}\right|=1$$

よって，線分 OA を 2: 1 に内分する点を A′ とすると，点 P は

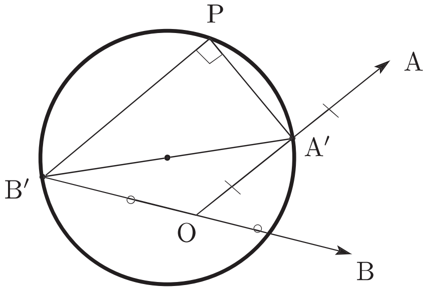



**点 A′を中心とする半径 1 の円周**　　(答)

上の点である．

(2)

$$2\left(\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot(\vec{p}+\vec{b})=0$$
$$\left(\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\{\vec{p}-(-\vec{b})\}=0$$




$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}=-\vec{b}$ とすると，

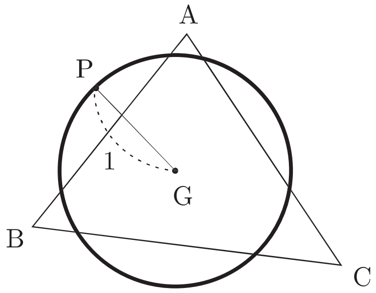
$\mathrm{A'P}\perp\mathrm{B'P}$ である．

また，点 P が A′ または B′ と一致するときも上式はみたされる．ゆえに線分 OA の中点を A′，O に関して B と対称な点を B′ とすると，点 P は

**線分 A′B′を直径とする円周上**　　(答)

の点である．

(3)




$$\left|(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})\right|=3$$
$$\left|3\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|=3$$
$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=1$$

ここで，△ABC の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$ とすると

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

であるから

$$\left|\vec{p}-\vec{g}\right|=1 \qquad \therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{GP}}\right|=1$$

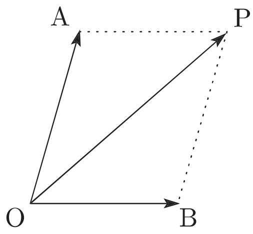
よって，点 P は

**△ABC の重心 G を中心とする半径 1 の円周上**　　(答)

の点である．

【9】 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots (*)$ とおく.

(1) 四角形 OAPB が平行四辺形となるとき

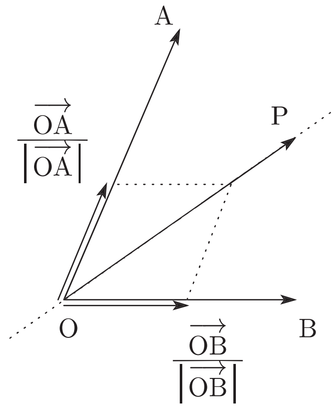



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，$(*)$ と係数を比較して，求める値は

$$\boldsymbol{s = t = 1} \quad \textbf{(答)}$$

(2) 点 P は ∠AOB の二等分線であるから，$k$ を実数として




$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\right) \\ &= \frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

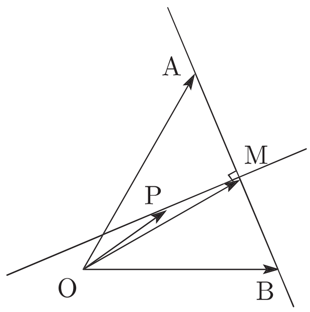
$(*)$ と係数を比較して

$$s = \frac{k}{3}, \quad t = \frac{k}{2}$$

$k$ を消去して，求める関係式は

$$\boldsymbol{3s = 2t} \quad \textbf{(答)}$$

(3) 線分 AB の中点を M とすると




$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \quad \cdots (\#)$$

点 P は，線分 AB の垂直二等分線上にあるから

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$(*)$，$(\#)$ を代入して

$$\begin{aligned}&\left\{\left(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right\} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0 \\ &\left\{(2s-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (2t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0 \\ &-(2s-1)\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + (2t-1)\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 + \{(2s-1) - (2t-1)\}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0\end{aligned}$$

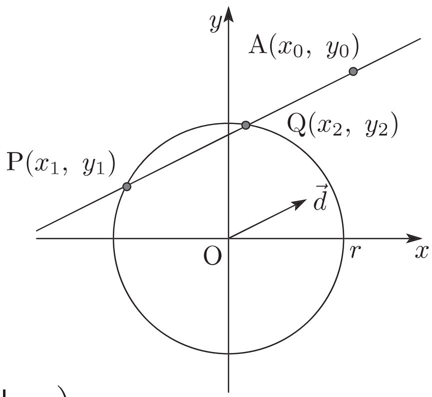
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3 \cdot 2 \cdot \dfrac{5}{6} = 5$ より

$$\begin{aligned}&-(2s-1) \cdot 3^2 + (2t-1) \cdot 2^2 + 2(s-t) \cdot 5 = 0 \\ &\therefore \quad -8s - 2t + 5 = 0\end{aligned}$$

ゆえに求める関係式は

$$\boldsymbol{8s + 2t = 5} \quad \textbf{(答)}$$

【10】 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とし，
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に平行な単位ベクトルを $\vec{d}$ とする．
すなわち




$$\vec{d}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad a^2+b^2=1$$

とおく．このとき実数 $s$，$t$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\vec{d}$$

と表されるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\left|s\vec{d}\right|\cdot\left|t\vec{d}\right|=|st|\quad\left(\because\ \ \left|\vec{d}\right|=1\right)$$

となる．ところで

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\vec{d}$$

であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=r$ であるから，上式の両辺それ自身との内積をとって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\vec{d}\right|^2\\ r^2&=\left|\begin{pmatrix}x_0+sa\\y_0+sb\end{pmatrix}\right|^2\\ &=(x_0+sa)^2+(y_0+sb)^2\\ &=x_0^2+2sax_0+s^2a^2+y_0^2+2sby_0+s^2b^2\end{aligned}$$

$a^2+b^2=1$ に注意して，$s$ に関して整理すると

$$s^2+2(ax_0+by_0)s+x_0^2+y_0^2-r^2=0\quad\cdots①$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d}$$

であるから，上と同様の計算により

$$t^2+2(ax_0+by_0)t+x_0^2+y_0^2-r^2=0\quad\cdots②$$

①，② は，$s$，$t$ が $x$ の 2 次方程式

$$x^2+2(ax_0+by_0)x+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

の 2 解であることを示す．ゆえに解と係数の関係より

$$\begin{aligned}st&=x_0^2+y_0^2-r^2\\ |st|&=\left|x_0^2+y_0^2-r^2\right|\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=x_0^2+y_0^2$ であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\left|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-r^2\right|$$

〔証明終〕

## 添削課題

【1】(1) 直線上の点をPとし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t-1\\-3t+2\end{pmatrix}\qquad(t\text{ は任意の実数})$$

したがって，

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=2t-1}\\\boldsymbol{y=-3t+2}\end{cases}\qquad\textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ は任意の実数)}\qquad(\text{答})$$

これから，$t$ を消去すると，

$$y=-3\cdot\frac{x+1}{2}+2\qquad\therefore\ \boldsymbol{3x+2y-1=0}\qquad(\text{答})$$

(2) 直線上の点をPとし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1-t)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t+1\\-t+2\end{pmatrix}\quad(t\text{ は任意の実数})$$

したがって，

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=2t+1}\\\boldsymbol{y=-t+2}\end{cases}\qquad\textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ は任意の実数)}\qquad(\text{答})$$

これから，$t$ を消去すると，

$$x=2(2-y)+1\qquad\therefore\ \boldsymbol{x+2y-5=0}\qquad(\text{答})$$

(3) 求める直線の方向ベクトルを $\vec{d}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ ($u$，$v$ は実数) とすると，ベクトル $\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ に垂直であるから

$$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0\qquad\therefore\ -2u+v=0$$

をみたす．このうち，求める直線の方向ベクトルのひとつとして $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を選ぶと，直線上の点をPとし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすれば，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+2\\2t+3\end{pmatrix}\quad(t\text{ は任意の実数})$$

したがって,

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = t + 2} \\ \boldsymbol{y = 2t + 3} \end{cases} \qquad (\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意の実数}) \qquad (答)$$

これから,$t$ を消去すると,

$$y = 2(x-2)+3 \qquad \therefore\ \boldsymbol{2x - y - 1 = 0} \qquad (答)$$

【2】(1) 円周上の点を P とし,$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると,

$$\left| \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{3}$$

したがって,両辺を 2 乗して

$$\boldsymbol{(x-3)^2 + (y-2)^2 = 3} \qquad (答)$$

(2) 求める円の中心の座標は,

$$\left( \frac{1+3}{2}, \frac{4+0}{2} \right) = (2,\ 2)$$

求める円の半径は,

$$\frac{\sqrt{(1-3)^2 + (4-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

となるから,円周上の点を P とし,$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\left| \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$$

$$\therefore\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{5}$$

したがって,両辺を 2 乗して,

$$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5} \qquad (答)$$

【3】(1) $$(3\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{a}=0 \iff 3\left(\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0 \quad \cdots ①$$

OA を 1 : 2 に内分する点を A′ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}' = \dfrac{1}{3}\vec{a}$ であり，① は，

$$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

よって，点 P は

**OA を 1 : 2 に内分する点を通り, OA に垂直な直線上に存在.** (答)

(2) 両辺を 2 乗して，

$$\begin{aligned}\left|\vec{p}-\vec{a}\right|^2=\left|2\vec{p}-\vec{a}\right|^2 &\iff 3\left|\vec{p}\right|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}=0\\ &\iff 3\left|\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{3}\left|\vec{a}\right|^2\\ &\iff \left|\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{a}\right|=\frac{1}{3}\left|\vec{a}\right|\end{aligned}$$

よって，点 P は，

**OA を 1 : 2 に内分する点を中心とし，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$OA の円周上に存在.** (答)

【4】$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\vec{q}$ とすると，P は AQ を 2 : 1 に内分する点なので，

$$\vec{p}=\frac{2}{3}\vec{q} \iff \vec{q}=\frac{3}{2}\vec{p} \quad \cdots ①$$

一方，Q は中心 C，半径 $r$ の円周上に存在するので，

$$\left|\vec{q}-\vec{c}\right|=r \quad \cdots ②$$

① を ② に代入すれば

$$\begin{aligned}\left|\frac{3}{2}\vec{p}-\vec{c}\right|=r &\iff \left|\frac{3}{2}\left(\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{c}\right)\right|=r\\ &\iff \left|\boldsymbol{\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{c}}\right|=\boldsymbol{\frac{2}{3}r} \quad (答)\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}\vec{c}$ なる点を D とすれば，D は，線分 AC を 2 : 1 に内分する点であるので，上のベクトル方程式の表す図形は，

**AC を 2 : 1 に内分する点を中心とし，半径 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}r}$ の円** (答)

## 問題

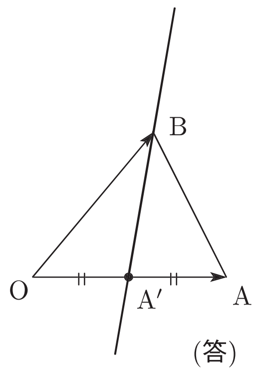
【1】(1) $s'=2s$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad s'+t=1$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad s'+t=1\\&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\end{aligned}$$

ゆえに点 P は直線 A′B 上．(右図)




(答)

(2) $s+t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ より

$$\frac{s}{2}+\frac{t}{2}=1,\quad \frac{s}{2}\geqq 0,\quad \frac{t}{2}\geqq 0$$

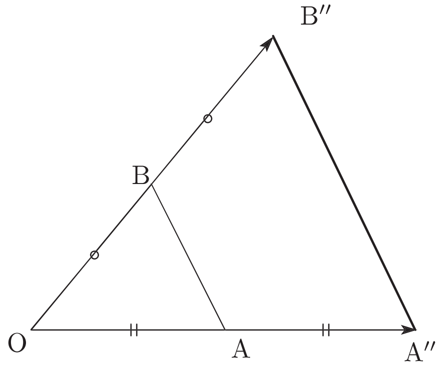
$s''=\frac{s}{2}$，$t''=\frac{t}{2}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s''\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t''\left(2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB''}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，
$s''=1-t''$ とから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t'')\,\overrightarrow{\mathrm{OA''}}+t''\overrightarrow{\mathrm{OB''}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA''}}+t''\overrightarrow{\mathrm{A''B''}}\end{aligned}$$

$s''=1-t''\geqq 0$ より $0\leqq t''\leqq 1$.
ゆえに点 P は線分 A″B″ 上．(右図)



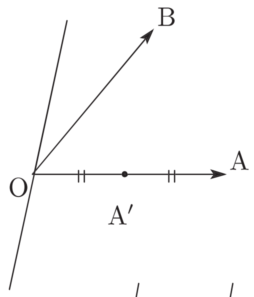

(答)

(3) $2s+t=k$ とおく．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおく．

(i) $k=0$ のとき，$2s=-t$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=-t\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)\\&=t\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\end{aligned}$$

ゆえに点 P は O を通り A′B に平行な直線上を動く．(右図)




(ii) $0<k\leqq 1$ のとき，$2s+t=k$ の両辺を $k$ で割って

$$\frac{2s}{k}+\frac{t}{k}=1$$

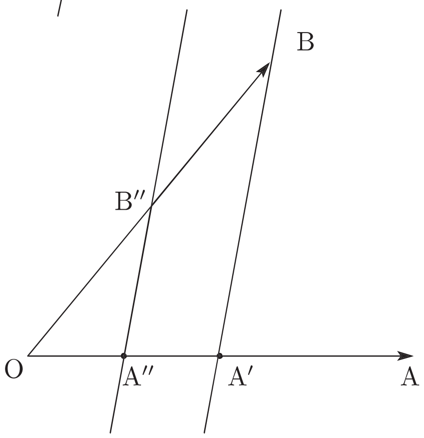
ここで，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{2s}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)+\frac{t}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\frac{2s}{k}\overrightarrow{\mathrm{OA''}}+\frac{t}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB''}}\end{aligned}$$

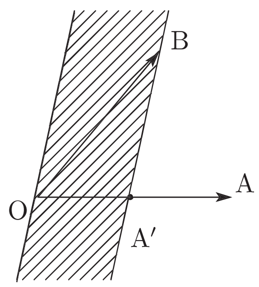
($\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおいた．)

よって，点 P は直線 A″B″ 上を動く．

ここで $k$ を $0<k\leqq 1$ の範囲で動かすと，直線 A″B″ は A′B と平行に移動する．




以上より，点 P の存在する領域は下図の斜線部（境界含む）．




(答)

(4) $2s+t=k$ とおく.

(i) $k=0$ のとき,

$$2s+t=0,\quad s \geqq 0,\quad t \geqq 0 \ \text{より}\ s=t=0$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$. すなわち P は O と一致する.

(ii) $0<k \leqq 1$ のとき,

(2) と同様に

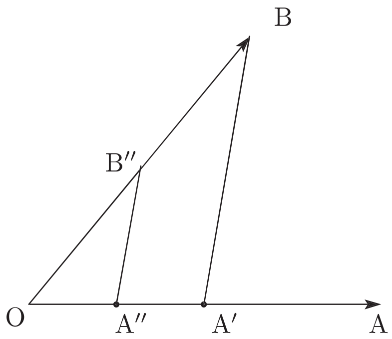
$$\frac{2s}{k}+\frac{t}{k}=1$$

$\dfrac{2s}{k}=1-\dfrac{t}{k} \geqq 0$ であるから

$$0 \leqq \frac{t}{k} \leqq 1$$

同様に,

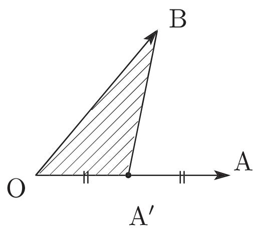
$$0 \leqq \frac{2s}{k} \leqq 1$$




このとき点 P は図の線分 A″B″ 上を動く. (∵ (3))

次に $k$ を動かすと, 線分 A″B″ は線分 A′B に平行に移動する. (∵ (3))

以上より, 求める領域は下図の斜線部 (境界含む)




(答)

**【2】**

| ポイント (ベクトルの和) $=\vec{0}$ の扱い方その (1) |
|---|
| 始点を A にそろえ, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表す. |

(1) $$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}\quad\cdots(*)$$

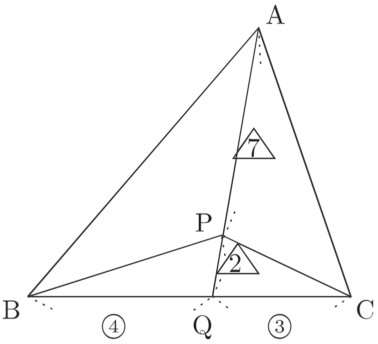
において始点を A にそろえ，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表すと

$$\begin{aligned}(*)\quad&\iff\quad -2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+4\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)=\vec{0}\\&\iff\quad -9\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}-4\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&\iff\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}\\&\iff\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}\end{aligned}$$

ゆえに，辺 BC を 4: 3 に内分する点を Q とすると，

**P は線分 AQ を 7: 2 に内分する点**　　(答)

(2) △ABC の面積を $S$ とすると，




$$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{2}{9}S$$
$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{3}{7}\times\frac{7}{9}\times S=\frac{3}{9}S$$
$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{4}{7}\times\frac{7}{9}\times S=\frac{4}{9}S$$

ゆえに

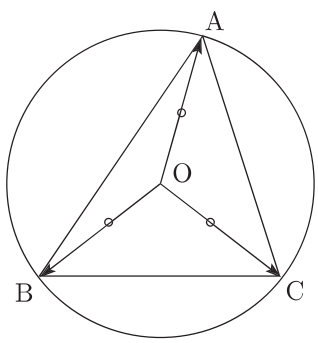
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}&=\frac{2}{9}S:\frac{3}{9}S:\frac{4}{9}S\\&=\mathbf{2:3:4}\end{aligned}$$　(答)

【3】

**ポイント** (ベクトルの和) $=\vec{0}$ の扱い方その (2)

1 つを移項し，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1$ を利用して他の 2 つの内積を求める.

(1) 点 O は △ABC の外心であるから




$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1$$

与式より

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-4\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

両辺それ自身との内積をとって

$$\begin{aligned}\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2&=\left|-4\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\\4\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2&=16\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\\12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=3\\\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\mathbf{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$　(答)

同様の計算により

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\boldsymbol{\frac{7}{8}}\qquad(答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\boldsymbol{\frac{11}{16}}\qquad(答)$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，両辺それ自身との内積をとって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{3}{2}\\\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}\qquad(答)\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{15}{4}\\\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{2}}\qquad(答)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{27}{8}\\\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|&=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}}{4}}\qquad(答)\end{aligned}$$

また $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\&=-\frac{7}{8}-\frac{1}{4}+\frac{11}{16}+1\\&=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{27}{8}-\left(\frac{9}{16}\right)^2}\\&=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{15}}{32}}\qquad(答)\end{aligned}$$

【4】

ポイント

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とおくと，点 P は垂心に一致することを示す.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とおく.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{BP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を示す.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

であり，また

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{c} - \vec{b}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \left|\vec{c}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 0 \\ &\left(\because \quad \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right|\right)\end{aligned}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$
同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

も示される．ゆえに点 P は三角形 ABC の垂心 H に一致する.　〔証明終〕

(2) 外心 O を始点とする位置ベクトルで考えると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\end{aligned}$$

であるから，O，G，H は一直線上にあり，G は線分 OH を 1 : 2 の比に内分する.
〔証明終〕

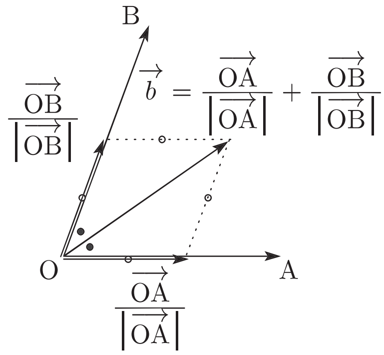
【5】

**ポイント**

一直線上にない3点O，A，Bを考える．Oを始点とし，∠AOBを2等分するベクトルの1つを$\vec{b}$とすると，

$$\vec{b} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$$

と表される．(右図参照)



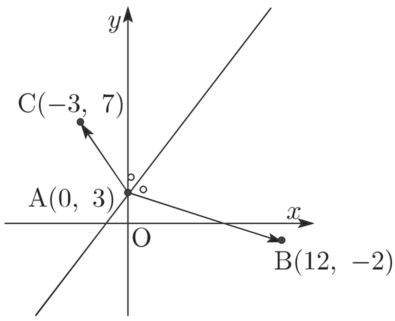

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (12-0,\ -2-3) = (12,\ -5)$

より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{12^2+5^2} = 13.$

また

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-3-0,\ 7-3) = (-3,\ 4)$

より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5.$




ここで

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{1}{13}(12,\ -5) + \frac{1}{5}(-3,\ 4) \mathbin{/\!/} 5(12,\ -5) + 13(-3,\ 4)$$

であるから，求めるベクトルは

$5(12,\ -5) + 13(-3,\ 4) = (21,\ 27) \mathbin{/\!/}$ $\mathbf{(7,\ 9)}$ (答)

(2) 求める直線上の点を$\mathrm{P}(\vec{p})$とし，$\vec{p} = (x,\ y)$とすると

$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t(7,\ 9)$$
$$(x,\ y) = (0,\ 3) + (7t,\ 9t) = (7t,\ 3+9t)$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = 7t & \cdots ① \\ y = 3+9t & \cdots ② \end{cases}$$

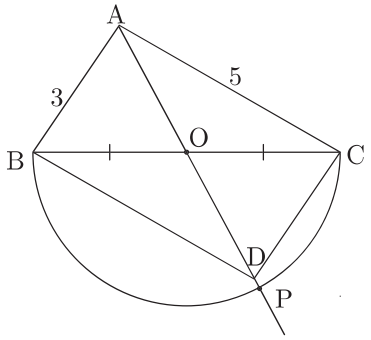
①×9−②×7より，求める方程式は

$\boldsymbol{9x - 7y = -21}$ (答)

【6】BC の中点を O とする．

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = 6$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$




より，上式の両辺それ自身との内積をとって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$36 = 25 + 9 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ゆえに

$$2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -2$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathbf{-1} \quad \textbf{(答)}$$

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) \\ &= 2\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ は定ベクトルであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}\text{が最大} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}\text{が最大}$$

ところで

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq \left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \quad (\text{等号は}\overrightarrow{\mathrm{AO}}\text{と}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\text{が同方向のとき成立})$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が同方向のとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は最大値

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$$

をとる．ここで $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = 3$ であり，また

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\ &= \frac{1}{4}(9 + 25 - 2) = 8\end{aligned}$$

より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right| = 2\sqrt{2}$．ゆえに求める最大値は

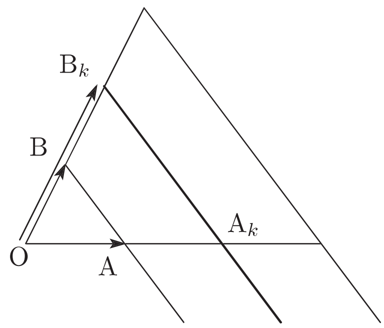
$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \mathbf{16 + 12\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) $s+t=k \quad (1 \leqq k \leqq 3)$ とおくと，

$$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1, \quad \frac{s}{k} \geqq 0$$

であり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{s}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{t}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\end{aligned}$$




ここで $\dfrac{s}{k}=s_k$，$\dfrac{t}{k}=t_k$ とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

をみたす点 $\mathrm{A}_k$，$\mathrm{B}_k$ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s_k\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}+t_k\overrightarrow{\mathrm{OB}_k}$$

ここで $s_k+t_k=1$ より $t_k=1-s_k$．上式に代入して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s_k\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}+(1-s_k)\overrightarrow{\mathrm{OB}_k} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}_k}+s_k\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}-\overrightarrow{\mathrm{OB}_k}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}_k}+s_k\overrightarrow{\mathrm{B}_k\mathrm{A}_k} \qquad (s_k \geqq 0)\end{aligned}$$

よって点 P は半直線 $\mathrm{B}_k\mathrm{A}_k$ 上の点である．

ここで $k$ を $1 \leqq k \leqq 3$ の範囲で動かすと半直線 $\mathrm{B}_k\mathrm{A}_k$ も平行に移動するから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_3}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす点をそれぞれ $\mathrm{A}_3$，$\mathrm{B}_3$ とすると，求める領域は線分 $\mathrm{BB}_3$，半直線 BA および $\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3$ で囲まれた部分，すなわち図 1 の斜線部となる．ただし境界を含む．

(2)

$$\begin{aligned} & s+t=-1, \quad s \leqq 0, \quad t \leqq 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (-s)+(-t)=1, \quad -s \geqq 0, \quad -t \geqq 0\end{aligned}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \ \overrightarrow{\mathrm{OB}'}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

をみたす点 $\mathrm{A}'$，$\mathrm{B}'$ をとり，$s'=-s$，$t'=-t$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (-s)(-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+(-t)(-\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= s'\overrightarrow{\mathrm{OA}'}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB}'} \quad (s'+t'=1, \quad s' \geqq 0, \quad t' \geqq 0)\end{aligned}$$

ゆえに点 P は図 2 の線分 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 上の点である．ただし端点を含む．

(3)

$$|s|+|t|=1 \iff \begin{cases} s+t=1,\ \ s \geqq 0,\ \ t \geqq 0 & \cdots ① \\ -s+t=1,\ \ s \leqq 0,\ \ t \geqq 0 & \cdots ② \\ s-t=1,\ \ s \geqq 0,\ \ t \leqq 0 & \cdots ③ \\ -s-t=1,\ \ s \leqq 0,\ \ t \leqq 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

ここで，① は線分 AB を，④ は (2) より O に関して AB と対称な位置にある線分を表す.

② については，$\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A$''$ をとり，$s''=-s$ とおくと

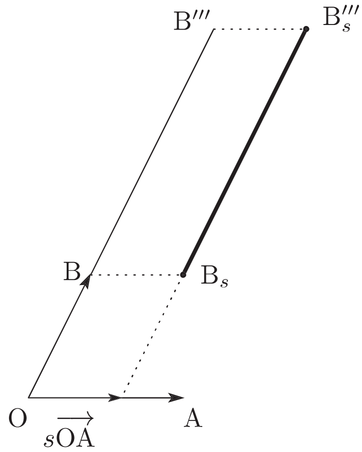
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s''\overrightarrow{\mathrm{OA''}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s''+t=1,\ \ s''\geqq 0,\ \ t \geqq 0)$$

であり，また ③ についても同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OB''}}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 B$''$ をとり，$t''=-t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t''\overrightarrow{\mathrm{OB''}} \quad (s+t''=1,\ \ s\geqq 0,\ \ t'' \geqq 0)$$

となるから，① から ④ をあわせて，点 P は点 O を対角線の交点とする平行四辺形 A$''$B$''$AB の周上に存在する（図 3）.

(4) $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (0 \leqq s \leqq 1,\ \ 1 \leqq t \leqq 3)$$




まず $s$ を $0 \leqq s \leqq 1$ の範囲に固定する．すなわち

$$s=s_0 \quad (0 \leqq s_0 \leqq 1)$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s_0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (1 \leqq t \leqq 3)$$

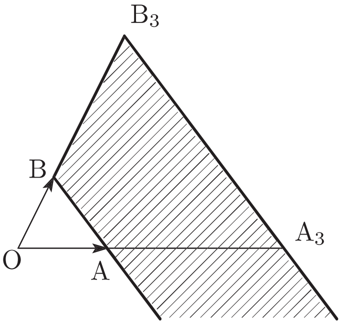
であるから点 P は，右図のような線分 B$_s$B$'''_s$ 上に存在する（ただし端点を含む）.

次に $s$ を $0 \leqq s \leqq 1$ の範囲で動かして考えると，上の線分 B$_s$B$'''_s$ は線分 OB と平行に移動する.
したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB'''}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'''}}$$

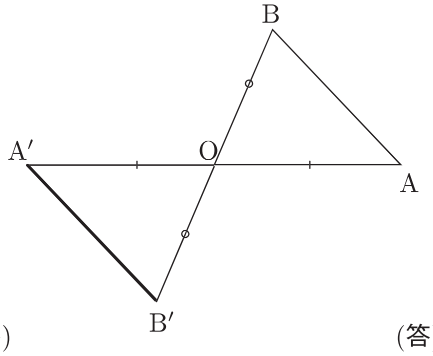
をみたす点 B$'''$，C，D に対して，点 P は平行四辺形 BCDB$'''$ の内部および周上に存在する．すなわち図 4 の斜線部（ただし境界を含む）.

〔図 1〕



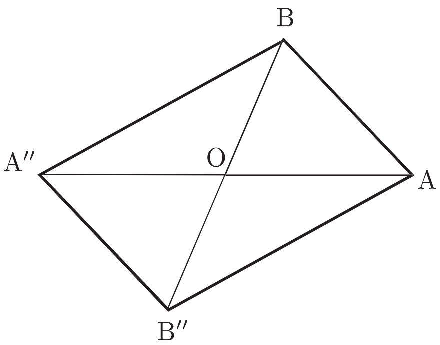

(答)

〔図 2〕



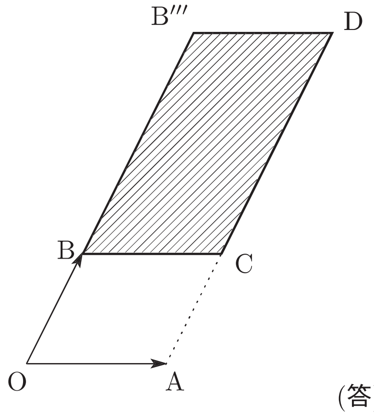

(答)

〔図 3〕




(答)

〔図 4〕




(答)

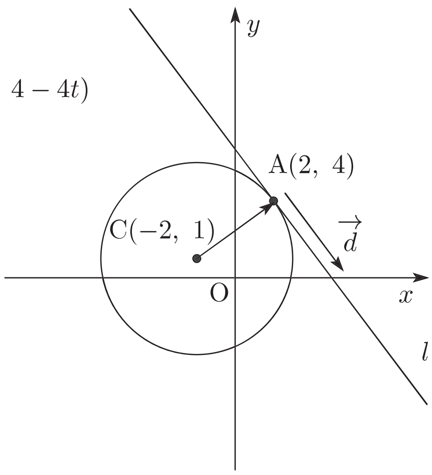
【8】 点 C$(-2,\ 1)$，A$(2,\ 4)$ とし，点 A における円の接線を $l$，$l$ の方向ベクトルを $\overrightarrow{d}$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2,\ 4) - (-2,\ 1) = (4,\ 3)$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \perp \overrightarrow{d}$ であるから $\overrightarrow{d} = (3,\ -4)$ とおける．

$l$ 上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とし，$\vec{p} = (x,\ y)$ とすると

$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\vec{d}$$
$$(x,\ y) = (2,\ 4) + t(3,\ -4) = (2+3t,\ 4-4t)$$




ゆえに

$$\begin{cases} x = 2+3t & \cdots ① \\ y = 4-4t & \cdots ② \end{cases}$$

① × 4 + ② × 3 より

$$\boldsymbol{4x+3y=20} \qquad \text{(答)}$$

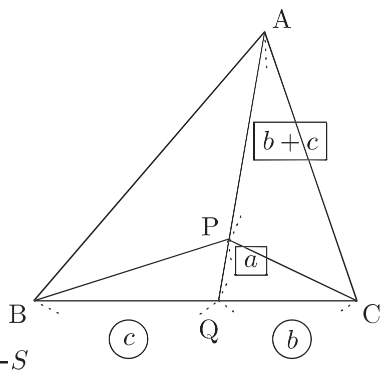
【9】 $a\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b\overrightarrow{\mathrm{PB}} + c\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$

であり，上式を A を始点として書き換えると

$$-a\overrightarrow{\mathrm{AP}} + b\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) + c\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) = \vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ について整理して

$$(a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{AP}} = b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot \frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c}$$




ここで，辺 BC を $c\colon b$ に内分する点を Q とすると，

P は AQ を $(b+c)\colon a$ に内分する点

である．△ABC の面積を $S$ とすると，

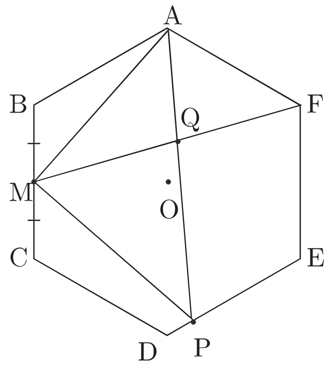
$$\triangle\mathrm{BCP} = \frac{a}{a+b+c}S$$
$$\triangle\mathrm{CAP} = \frac{b}{b+c} \times \frac{b+c}{a+b+c} \times S = \frac{b}{a+b+c}S$$
$$\triangle\mathrm{ABP} = \frac{c}{b+c} \times \frac{b+c}{a+b+c} \times S = \frac{c}{a+b+c}S$$

以上より，

$$\triangle\mathrm{BCP}\colon\triangle\mathrm{CAP}\colon\triangle\mathrm{ABP} = \frac{a}{a+b+c}S\colon\frac{b}{a+b+c}S\colon\frac{c}{a+b+c}S$$

$$= \boldsymbol{a\colon b\colon c} \qquad \text{(答)}$$

【10】(1) 正六角形の中心を O とすると，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$ で，




$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}\\&=\boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 3 点 D，P，E は共線（一直線上）より，

$$\mathrm{DP}:\mathrm{PE}=t:(1-t)\quad(0\leqq t\leqq 1)$$

とすると，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AE}\\&=(1-t)\cdot 2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+t\left\{\vec{b}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right\}\\&=(2-2t+t)\vec{a}+(2-2t+2t)\vec{b}\\&=(2-t)\vec{a}+2\vec{b}\end{aligned}$$

また $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{MP}$ より $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MP}=0$．さらに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}&=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}\\&=(2-t)\vec{a}+2\vec{b}-\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

であるから

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MP}=\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right\}=0$$

両辺に 4 をかけて

$$\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left\{(1-2t)\vec{a}+3\vec{b}\right\}=0$$

ここで，$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$ より，

$$\begin{aligned}3(1-2t)-\frac{1}{2}(9+1-2t)+3&=0\\3-6t-5+t+3&=0\\t&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

よって，

$$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{\frac{9}{5}\vec{a}+2\vec{b}}\qquad\text{(答)}$$

(3) 3 点 A，Q，P は共線であるから，$k$ を実数として

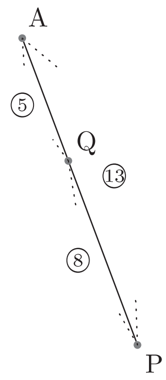
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= \frac{9}{5}k\overrightarrow{a} + 2k\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

と書ける．ここで $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ で表すと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= \frac{9}{5}k\overrightarrow{a} + 2k\overrightarrow{b}\\ &= \frac{9}{5}k\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) + 2k\overrightarrow{b} - \frac{9}{5}k\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{b}\\ &= \frac{6}{5}k\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) + \frac{7}{5}k\overrightarrow{b}\\ &= \frac{6}{5}k\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \frac{7}{5}k\overrightarrow{\mathrm{AF}}\end{aligned}$$

3 点 M，Q，F は共線であるから

$$\begin{aligned}\frac{6}{5}k + \frac{7}{5}k &= 1\\ k &= \frac{5}{13}\end{aligned}$$




ゆえに

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QP} = \mathbf{5 : 8} \qquad \text{(答)}$$

## 添削課題

【1】(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= 3s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

ここで，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ とすれば，点 P は直線 A′B を動く．よって，点 P の存在範囲は図 1 の直線 A′B 上．　　**(答)**

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= 3s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= 3s\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}}\text{とした}\right)\cdots①$$

ここで，$3s + t = k\ (0 \leqq k \leqq 1)\cdots②$ とすると，

(i) $k = 0$ のとき，$t = -3s$ より，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3s\overrightarrow{\mathrm{OA'}} - 3s\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3s\overrightarrow{\mathrm{BA'}}$ となり，
P は O を通り，BA′ に平行な直線上を動く．

(ii) $0 < k \leqq 1$ のとき，② を $k$ で割ると，$\dfrac{3s}{k} + \dfrac{t}{k} = 1$
一方，① より，
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3s}{k}\cdot k\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \frac{t}{k}\cdot k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= \frac{3s}{k}\overrightarrow{\mathrm{OA''}} + \frac{t}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\ (\overrightarrow{\mathrm{OA''}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA'}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\text{とした})$$

このとき，P は直線 A″B′ 上を動く．
$0 < k \leqq 1$ の範囲で動かすと，直線 A″B′ は直線 A′B と平行に移動し，$k = 0$ の場合も合わせると，点 P の存在範囲は図 2 の斜線部 (境界含む)．　　**(答)**

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (-t)(-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}\ (\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ t' = -t\text{ とした})$$

ここで，$s = k\ (0 \leqq k \leqq 1)$ と固定し，$t'$ を $0 \leqq t' \leqq 1$ で動かすと，P は $k\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ なる点 $\mathrm{A_1}$ をとり，さらに四角形 $\mathrm{OA_1CB_1}$ が平行四辺形になるような点 C をとったときの線分 $\mathrm{A_1C}$ 上を動く．
$k$ を $0 \leqq k \leqq 1$ で動かすと，線分 $\mathrm{A_1C}$ は，$\mathrm{OB_1}$ と平行に動き，点 P の存在範囲は図 3 の斜線部 (境界含む)．　　**(答)**

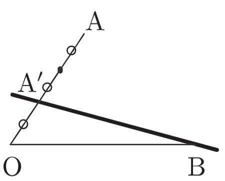


図 1

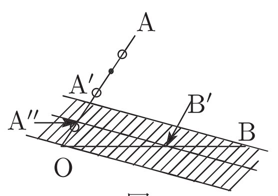


図 2

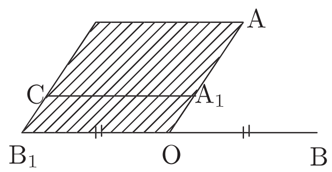


図 3

【2】(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = 6$ より，$\left|\vec{b}-\vec{a}\right| = 6$

$\iff \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{a}\right|^2 = 36$

$\left|\vec{a}\right| = 5, \left|\vec{b}\right| = 7$ より，

$-2\vec{a}\cdot\vec{b} = -38$　　$\therefore$ $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = 19}$　**(答)**

(2)　B，H，C は同一直線上に存在するので，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ と表される ($t$ は実数)

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$

以上より，$\{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$

$\iff -t\left|\vec{a}\right|^2 + (2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-t)\left|\vec{b}\right|^2 = 0$

$\left|\vec{a}\right| = 5$，$\left|\vec{b}\right| = 7$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 19$ より，

$-25t + 19(2t-1) + 49(1-t) = 0$　　$\therefore$ $t = \dfrac{5}{6}$

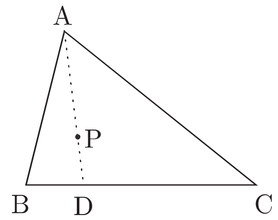
よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \boldsymbol{\dfrac{5}{6}\vec{a} + \dfrac{1}{6}\vec{b}}$　**(答)**

【3】(1) AP を P の方向に延長し，BC との交点を D とすると，

AP : AD = △PAB : △ABD = △PCA : △ACD

より

△ABD : △ACD = △PAB : △PCA = 1 : 3




よって，BD : CD = 1 : 3

一方，△PBC : △ABC = 2 : (1 + 2 + 3) = 1 : 3

よって，AP : PD = 2 : 1

以上より，点 P は，**線分 BC を 1 : 3 に内分する点を D としたとき，線分 AD を 2 : 1 に内分する点　(答)**

(2) (1) より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1+3} = \dfrac{1}{6}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdots$①

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c} - \vec{a}$ を ① に代入して，

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{1}{6}\{3(\vec{b}-\vec{a}) + (\vec{c}-\vec{a})\}$$

$$\therefore\ \vec{p} = \frac{1}{6}(3\vec{b} + \vec{c} - 4\vec{a}) + \vec{a}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}(2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})}$$ **(答)**

【4】(1) 与式より，$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-6\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$\iff (4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}})=(-6\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(-6\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

$$\iff 16\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+40\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+25\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=36\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1$ より，

$$40\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-5 \qquad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$ **(答)**

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ **(答)**

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\boldsymbol{\frac{9}{16}}$ **(答)**

(2) O，A，D は一直線上に存在するので，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

また，与式から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\frac{1}{4}(5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+6\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\frac{5}{4}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{3}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ここで，B，D，C は同一直線上に存在するので，

$$-\frac{5}{4}k-\frac{3}{2}k=1 \qquad \therefore\ k=-\frac{4}{11}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{5}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{6}{11}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\frac{1}{11}(5\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+6\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\frac{1}{11}\left\{5\cdot1^2+6\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{22}}\end{aligned}$$ (答)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\frac{1}{11}(5\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+6\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2)\\&=\frac{1}{11}\left\{5\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+6\cdot1^2\right\}=\boldsymbol{\frac{9}{44}}\end{aligned}$$ (答)