問題

■演習

【1】

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = -\overrightarrow{\mathrm{EA}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \qquad (\text{答})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{NG}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{c}} \qquad (\text{答})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{EG}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}} + \overrightarrow{\mathrm{EH}} = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} + \overrightarrow{\boldsymbol{c}} \qquad (\text{答})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = \overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{EA}} + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{a}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \qquad (\text{答})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{GN}} - \overrightarrow{\mathrm{GM}} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EH}}\right) - \overrightarrow{\mathrm{GM}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{c} - \left(\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right)$$
$$= -\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{b}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{c}} \qquad (\text{答})$$

【2】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-0 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2+3^2+3^2} = \sqrt{\mathbf{19}} \qquad (\text{答})$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-0 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-3 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{3^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{22}$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{4^2+0^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$$

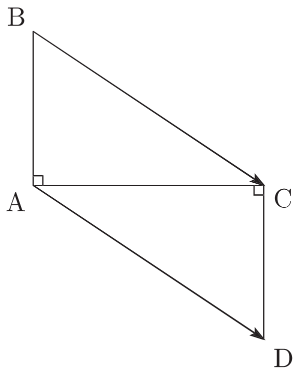
よって

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$$

であるから

$$\angle\mathbf{BAC} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \text{ の直角三角形} \qquad (\text{答})$$

(3) 右図より



$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

原点を O とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって

D$\mathbf{(6,\ 0,\ -6)}$　　(答)

(4) 求める点を E とし，その座標を $(3,\ x,\ y)$ とすると

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|^2 &= 1 + y^2 + (z+1)^2 &\cdots\cdots ① \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2 &= 4 + (y-3)^2 + (z-2)^2 &\cdots\cdots ② \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2 &= 4 + (y-3)^2 + (z+3)^2 &\cdots\cdots ③ \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right| &= \left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right| &\cdots\cdots (*)\end{aligned}$$

であるから，$(*)$ に ②，③ を代入して

$$\begin{aligned}(z-2)^2 &= (z+3)^2 \\ 10z &= -5 \\ \therefore\quad z &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

①，② に代入して，再び $(*)$ とから

$$\begin{aligned}1 + y^2 + \frac{1}{4} &= 4 + (y-3)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 2\right)^2 \\ 6y &= 18 \\ \therefore\quad y &= 3\end{aligned}$$

したがって，求める点の座標は

$\left(\mathbf{3,\ 3,\ -\frac{1}{2}}\right)$　　(答)

(5) (2) より，$\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{19}\cdot\sqrt{22} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{418}}{2}}\end{aligned}$$

(答)

【3】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \mathbf{3} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

よって

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \angle\mathrm{BAC} \leqq \pi$ より

$$\angle\mathrm{BAC} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \sin\angle\mathrm{BAC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4) 求めるベクトルを $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \vec{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{n} = -x + z = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

また $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \vec{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \vec{n} = -x + 2y + 2z = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

$\vec{n}$ は単位ベクトルであるから

$$\left|\overrightarrow{n}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \cdots\cdots ③$$

① より

$$z = x \quad \cdots\cdots④$$

④ を ② に代入して

$$y = -\frac{1}{2}x \quad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤ を ③ に代入して

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 + x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{4}{9}$$

$$\therefore\ x = \pm\frac{2}{3}$$

それぞれ ④，⑤ に代入して

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \text{のとき} \quad y = -\dfrac{1}{3},\ z = \dfrac{2}{3} \\ x = -\dfrac{2}{3} \text{のとき} \quad y = \dfrac{1}{3},\ z = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

よって，求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの一つを $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく．条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \cdots① \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \cdots②$$

① より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -x + z = 0 \quad \cdots①'$$

また ② より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -x + 2y + 2z = 0 \quad \cdots②'$$

ここで $x = 2$ とおくと，

①′より　$z = 2$

②′より　$y = \dfrac{1}{2}(2 - 4) = -1$

ゆえに

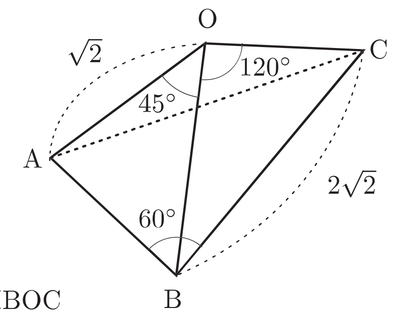
$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ここで $\left|\overrightarrow{n}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$ より，求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\right|} = \pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1)

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}$$
$$2=\sqrt{2}\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\therefore\ \left|\overrightarrow{b}\right|=\mathbf{2}\qquad(\text{答})$$



(2) △OBC に余弦定理を用いると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2-2\left|\overrightarrow{b}\right|\left|\overrightarrow{c}\right|\cos\angle\mathrm{BOC}$$
$$(2\sqrt{2})^2=2^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2-2\cdot 2\cdot\left|\overrightarrow{c}\right|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\left|\overrightarrow{c}\right|^2+2\left|\overrightarrow{c}\right|-4=0$$

$\left|\overrightarrow{c}\right|>0$ に注意してこれを解いて

$$\left|\overrightarrow{c}\right|=\boldsymbol{\sqrt{5}-1}\qquad(\text{答})$$

(3) △OAB に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2-2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}\\&=(\sqrt{2})^2+2^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=2\end{aligned}$$

また △ABC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2-2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\angle\mathrm{ABC}\\&=2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=6\end{aligned}$$

△OAC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{AOC}&=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-\mathrm{AC}^2}{2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|}\\&=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5}-1)^2-6}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)}\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\angle\mathrm{AOC}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}\qquad(\text{答})$$

【5】(1) G は △OAB の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \boldsymbol{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} \\ &= \vec{c} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(-\left|\vec{a}\right|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \left|\vec{b}\right|^2 + 3\vec{b}\cdot\vec{c}\right) \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

ここで OA = OB = OC であるから

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right|$$

また △OAB は正三角形より，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \frac{\pi}{3}$ だから

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2$$

これらを (∗) に代入して

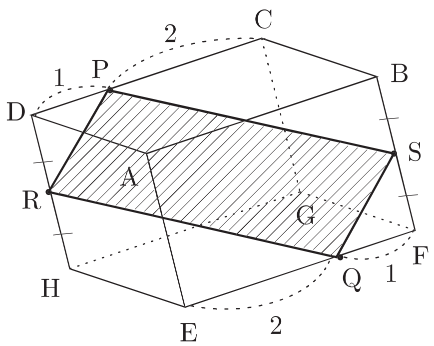
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \frac{1}{9}\left(-\left|\vec{a}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{3}{2}\left|\vec{a}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 + \frac{3}{2}\left|\vec{a}\right|^2\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

ゆえに

OG⊥GC 〔証明終〕

【6】(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{DR}} - \overrightarrow{\mathrm{DP}} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DH}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}} \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$



(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{SQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{FQ}} - \overrightarrow{\mathrm{FS}} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{FE}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FB}} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{SQ}}$$

すなわち，四角形 PRQS の 1 組の対辺が平行でかつ長さが等しいので
四角形 PRQS は平行四辺形である．　　〔証明終〕

【7】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 0-5 \\ 5-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

以上より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-5)\cdot(-1) + 1\cdot(-4) + 3\cdot 2 = \mathbf{7} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{35\cdot 21 - 7^2} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{14}}{2}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} 7-5 \\ 5-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot(-5) + 1\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ &= \mathbf{0} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

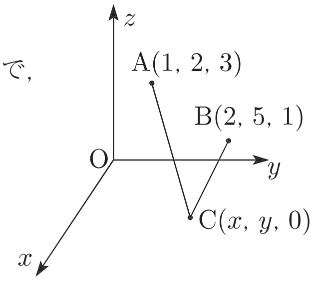
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot(-1) + 1\cdot(-4) + 3\cdot 2 \\ &= \mathbf{0} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \perp \triangle\mathrm{BCD}$ であるから，四面体 ABCD の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{BA} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{7\sqrt{14}}{2}\cdot\sqrt{14} \\ &= \boldsymbol{\frac{49}{3}} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

【8】(1) C の座標を $\mathrm{C}(x, y, 0)$ とおく．$\mathrm{AC}^2+\mathrm{CB}^2$ の値を最小にする (x, y) の値の組を求める．

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2+\mathrm{CB}^2 &= \{(x-1)^2+(y-2)^2+(-3)^2\}+\{(2-x)^2+(5-y)^2+1^2\}\\ &= 2x^2-6x+2y^2-14y+44\\ &= 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{7}{2}\right)^2+15\end{aligned}$$



よって，$(x, y)=\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ のとき，最小値 15 をとるので，

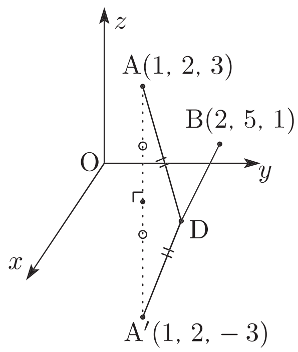
$\mathrm{C}\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ 0\right)$ のとき，最小値 15　(答)

(2) xy 平面に関して A と対称な点を A′ とすると

$\mathrm{A}'(1,\ 2,\ -3)$

である．また xy 平面上にとった点 D に対し

$\mathrm{AD}+\mathrm{DB}=\mathrm{A'D}+\mathrm{DB} \geqq \mathrm{A'B}$
(等号は D が A′B 上にあるとき成立)



ゆえに求める最小値は

$$\begin{aligned}\mathrm{A'B} &= \sqrt{(2-1)^2+(5-2)^2+\{1-(-3)\}^2}\\ &= \boldsymbol{\sqrt{26}}\quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

【9】**【解 1】**

ポイント

△ABC の外心を P とすると，

AP = BP = CP

であることを利用する．

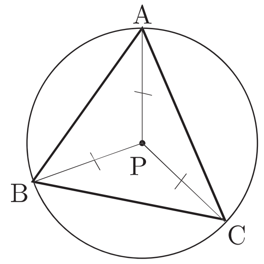
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| &= \sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| &= \sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}\quad\cdots(*)\\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (-2)\cdot 1+3\cdot(-3)+1\cdot(-2)=-13\end{aligned}$$

$\triangle$ABC の外心を P とおくと，P は平面 ABC 上にあるから実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



と表される．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|$$

に代入すると

$$\left|s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \left|(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \left|s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + t^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2st\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= (s-1)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + t^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2(s-1)t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + (t-1)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2s(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

ここに $(*)$ を用いると

$$14s^2+14t^2-26st = 14(s-1)^2+14t^2-26(s-1)t = 14s^2+14(t-1)^2-26s(t-1)$$

ここで，$14s^2+14t^2-26st = 14(s-1)^2+14t^2-26(s-1)t$ より

$$7s^2+7t^2-13st = 7s^2-14s+7+7t^2-13st+13t$$
$$\therefore\ 14s-13t=7 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$14(s-1)^2+14t^2-26(s-1)t = 14s^2+14(t-1)^2-26s(t-1)$ より

$$\begin{aligned}7s^2-14s+7+7t^2-13st+13t &= 7s^2+7t^2-14t+7-13st+13s \\ 27s &= 27t \\ \therefore\ s &= t \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

①，② より

$$s=t=7$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 7\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\ &= \begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} + 7\cdot\begin{pmatrix}-2+1\\3-3\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これより

$\mathrm{P}(\boldsymbol{-3,\ -1,\ -5})$　　(答)

【解 2】

> ポイント
>
> △ABC の外心を P とすると，
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2,\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$
>
> であることを利用する．

△ABC の外心を P とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2-4\\2+1\\3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}5-4\\-4+1\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

より，

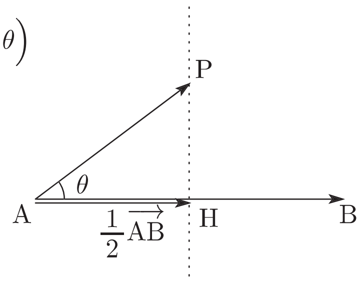
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\sqrt{14}$$

また，外心 P は平面 ABC 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-2s+t\\3s-3t\\s-2t\end{pmatrix}\quad(s,\ t\text{ は実数})\quad\cdots①$$

とおける．P から AB に下ろした垂線の足を H とすると，次の図より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\quad\left(\because\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cos\theta\right)\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=7\quad\cdots②\\&\qquad\left(\because\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\right)\end{aligned}$$



同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=7\quad\cdots③$$

であるから，①，②，③ より

$$\begin{pmatrix}-2s+t\\3s-3t\\s-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=14s-13t=7\quad\cdots④$$
$$\begin{pmatrix}-2s+t\\3s-3t\\s-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}=-13s+14t=7\quad\cdots⑤$$

④ − ⑤ より

$$s=t$$

④ に代入して

$$s=7 \quad \therefore \quad t=7$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}-7\\0\\-7\end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\0\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって

P$(\mathbf{-3,\ -1,\ -5})$　　(答)

＜コメント＞

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心は，角 A の二等分線（つまり辺 BC の垂直二等分線）上にある．ゆえに

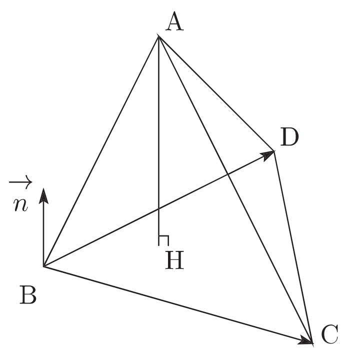
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

とおける．これを用いるともう少しだけ計算が楽になる．

【10】(1) 平面 BCD に垂直なベクトルの一つを $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると，

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

である．



$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

より，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=-x+y+z=0 \quad \cdots①$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=x+y+2z=0 \quad \cdots②$$

ここで $z=2$ とおくと，

①より　$-x+y=-2 \quad \cdots ①'$
②より　$x+y=-4 \quad \cdots ②'$

$(①'+②')\times\dfrac{1}{2}$ より　$y=-3$

$(①'-②')\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ より　$x=-1$

ゆえに

$$x:y:z=(-1):(-3):2=1:3:(-2)$$

であるから，$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ とおける．

ここで $\left|\overrightarrow{n}\right|=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$ より，$\overrightarrow{n}$ と同じ方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{n}_0$ とおくと

$$\overrightarrow{n}_0=\frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix}$ より

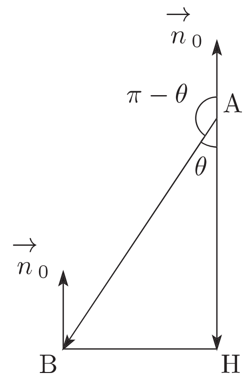
$$\overrightarrow{n}_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix}=-\frac{6}{\sqrt{14}}<0$$

となるから $\overrightarrow{n}_0$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角は鈍角であり，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{n}_0$ の位置関係は図のようになる．ここで

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-4)^2}=6$$

であり，さらに $\overrightarrow{n}_0 /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから，$\angle\mathrm{BAH}=\theta$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$



ゆえに

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta \quad \left(=\left|\overrightarrow{n}_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\right)\\&=6\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\\&=\boldsymbol{\frac{6}{\sqrt{14}}} \quad (答)\end{aligned}$$

(2)
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=(-1)^2+1^2+1^2=3$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2=1^2+1^2+2^2=6$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=-1+1+2=2$$

より，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCD}&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 6-2^2}\\&=\frac{\sqrt{14}}{2}\end{aligned}$$

であるから，求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{14}}=\mathbf{1}\qquad\text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \boldsymbol{\vec{c}}$　　(答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{b}}$　　(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{NG}} = \overrightarrow{\mathrm{NF}} + \overrightarrow{\mathrm{FG}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}}$　　(答)

(4) $\overrightarrow{\mathrm{EM}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}}$　　(答)

(5) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{EN}} - \overrightarrow{\mathrm{EM}} = \dfrac{1}{2}\vec{a} - \left(\dfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}}$　　(答)

【2】(1) 点 G は △ABC の重心より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3} \iff 3\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ \mathbf{C(2,\ 3,\ 1)} \quad (\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -6$$

よって

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ここで，$0 \leqq \angle\mathrm{BAC} \leqq \pi$ より

$$\angle\mathrm{BAC} = \frac{5}{6}\pi$$

であるから

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\angle\mathrm{BAC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{3}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) AC を対角線とする平行四辺形をつくるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \\ \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$$

よって，D の座標は

D(3, 5, 0)　　(答)

【3】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}} = \boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}} + \boldsymbol{\vec{c}}$　　(答)

$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}} + \overrightarrow{\mathrm{GF}} = \boldsymbol{\vec{a}} - \boldsymbol{\vec{b}} + \boldsymbol{\vec{c}}$　　(答)

(2) 仮定より，$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{6}$，$\left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = \sqrt{3}$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}} &= (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}) \\ &= \{(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}\}\cdot\{(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}\} \\ &= \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{c} - \left|\vec{b}\right|^2 \\ &= 6+3+2\vec{a}\cdot\vec{c}-3\end{aligned}$$

ここで，AB⊥AE より，$\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}} = 6+3-3 = \mathbf{6}$　　(答)

(3) △ABC において，三平方の定理より

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 6+3 = 9$$

また，△AGC において，三平方の定理より

$$\mathrm{AG}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{CG}^2 = 9+3 = 12$$

さらに，AG = DF であるから，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{DF}}\right|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$　　(答)

【4】 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

$\mathrm{OA}=\mathrm{AB}$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$$

よって

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left|\vec{b}\right|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

同様に，$\mathrm{BC}=\mathrm{OC}$ より

$$\left|\vec{b}\right|^2=2\vec{b}\cdot\vec{c} \quad \cdots ②$$

①，② より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c} \quad \cdots ③$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$ より，したがって

$\mathrm{OB}\perp\mathrm{AC}$ 〔証明終〕

２０章　ベクトル（７）

問題

【1】(1) 直線上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対して $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{t-1}\\\boldsymbol{-2t}\\\boldsymbol{t+3}\end{pmatrix}\quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意の実数)}\qquad (答)$$

(2) 直線上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対して $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{-t+3}\\\boldsymbol{2t}\\\boldsymbol{2t-1}\end{pmatrix}\quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意の実数)}\qquad (答)$$

(3) $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$（$\vec{n}\neq\vec{0}$）とすると，

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=0 \text{ より，}\quad \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \qquad x+y+3z=0\cdots①$$
$$\vec{b}\cdot\vec{n}=0 \text{ より，}\quad \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \qquad -x+2y+z=0\cdots②$$

ここで $z=1$ とすると，

$$① \iff x+y=-3 \quad \cdots①'$$
$$② \iff -x+2y=-1 \quad \cdots②'$$

①′ + ②′ より

$$3y=-4 \qquad \therefore\ y=-\frac{4}{3}$$

①′ に代入して

$$x=-\frac{5}{3}$$

ゆえに

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}\ /\!/\ \begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$$

であるから，求める直線の方向ベクトルを $\overrightarrow{d}$ とすると

$$\overrightarrow{d}=\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$$

とおける．ゆえに求める直線のベクトル方程式は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{5t}\\\boldsymbol{4t+1}\\\boldsymbol{-3t-2}\end{pmatrix}\quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意の実数)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1) 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を直径の両端とする球面の中心を $\mathrm{C}(\vec{c})$ とすると，

$$\overrightarrow{c}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$$

である．
また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ は球の直径であるから，半径を r とすると

$$r=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$$

である．以上より，

$$\overrightarrow{c}=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$r=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{3}$$

球面上の点を $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ とすれば，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$ であるから

$$\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3}\quad\text{(答)}$$

(2) 点 (a,b,c) を中心とし，xz 平面に接する球面の半径 r は，中心の y 座標の絶対値に等しい．すなわち $r=|b|=|4|=4$
球面上の点を $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ とすれば，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$ より，

$$\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\right|=4$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=16}\quad\text{(答)}$$

(3) 点 (a, b, c) を中心とし，x 軸に接する球面の半径 r は $r = \sqrt{b^2 + c^2}$ である．すなわち $r = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ である．

球面上の点を $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ とすれば，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$ より，

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}$$

$$\therefore \boldsymbol{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5} \quad \textbf{(答)}$$

【3】 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は 1 次独立である．

ここで

「4 点 A, B, C, D が同一平面上にある」
$\Longleftrightarrow$「点 B が平面 ACD 上にある」
$\Longleftrightarrow$「$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = s\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$となる実数 $s,\ t$ が存在する」$\cdots(*)$

であるから，条件 $(*)$ がみたされるための x の値を求める．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ x-2 \\ 7 \end{pmatrix}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = s\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\overrightarrow{\mathrm{AD}} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ x-2 \\ 7 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4s+t \\ 2t \\ s-2t \end{pmatrix}$$

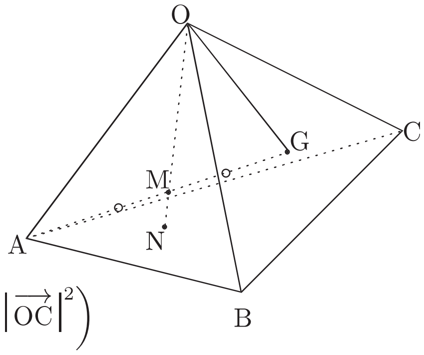
$$\iff \begin{cases} 0 = -4s + t & \cdots ① \\ x - 2 = 2t & \cdots ② \\ 7 = s - 2t & \cdots ③ \end{cases}$$

①，③ より，$(s,\ t) = (-1,\ -4)$．
これを ② に代入して，

$$\therefore \boldsymbol{x = -6} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 正四面体 OABC の各面はすべて正三角形であるから，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$=1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$



また，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ であり，

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=1$$
$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{OG}\right|^2&=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=\frac{1}{9}\left(\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\right)\\&=\frac{1}{9}\left(1+2\cdot\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}&=\overrightarrow{OA}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\triangle OAG&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OG}\right|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{6}}\end{aligned}\qquad \text{(答)}$$

(2) M は AG の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}\right)\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

また 3 点 O，M，N は共線であるから（同一直線上にあるから）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON}&=k\overrightarrow{OM}\\&=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

4 点 A，B，C，N は共面であるから（同一平面上にあるから）

$$\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}k+\frac{1}{6}k=1 \qquad \therefore\ k=\frac{6}{5}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{ON}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OC}}\qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $l:(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ に平行な直線

$m:(4,\ -3,\ 1)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}3\\7\\-2\end{pmatrix}$ に平行な直線

とする．また，l 上の点を $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$，$m$ 上の点を $\mathrm{Q}(\overrightarrow{q})$ とすると

$$\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3s+1\\-s+2\\2s-3\end{pmatrix}\quad(s\text{ は任意の実数})$$

$$\overrightarrow{q}=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\7\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t+4\\7t-3\\-2t+1\end{pmatrix}\quad(t\text{ は任意の実数})$$

であり，交点において $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{q}$ であるから，

$$\begin{cases}3s+1=3t+4 & \cdots①\\-s+2=7t-3 & \cdots②\\2s-3=-2t+1 & \cdots③\end{cases}$$

①，② を連立して解くと，$(s,\ t)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となり，この値は ③ を満たす．
ゆえに

l と m は 1 点で交わり，その交点は $\left(\dfrac{11}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$ (答)

(2) l : 2 点 $(1,\ 2,\ 3)$，$(2,\ 3,\ 5)$ を通る直線
m : 2 点 $(-1,\ 2,\ 4)$，$(2,\ 4,\ 1)$ を通る直線
とする．また，l 上の点を $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$，$m$ 上の点を $\mathrm{Q}(\overrightarrow{q})$ とすると，

$$\overrightarrow{p}=(1-s)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+1\\s+2\\2s+3\end{pmatrix}\quad(s\text{ は任意の実数})$$

$$\overrightarrow{q}=(1-t)\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t-1\\2t+2\\-3t+4\end{pmatrix}\quad(t\text{ は任意の実数})$$

であり，交点において $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{q}$ であるから，

$$\begin{cases}s+1=3t-1 & \cdots①\\s+2=2t+2 & \cdots②\\2s+3=-3t+4 & \cdots③\end{cases}$$

①，② を連立して解くと $(s,\ t)=(4,\ 2)$ となるが，この値は ③ を満たさない．
ゆえに l と m は交点をもたない．
ところで l と m の方向ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix}2-1\\3-2\\5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2-(-1)\\4-2\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$$

であるから $l \not\parallel m$.
以上より，

l と m はねじれの位置にある　　(答)

【6】

ポイント

「4 点 K，L，M，N が同一平面上に存在する」
$\iff$ 「$\overrightarrow{\mathrm{KM}} = s\overrightarrow{\mathrm{KL}} + t\overrightarrow{\mathrm{KN}}$をみたす実数 s，t が存在する」

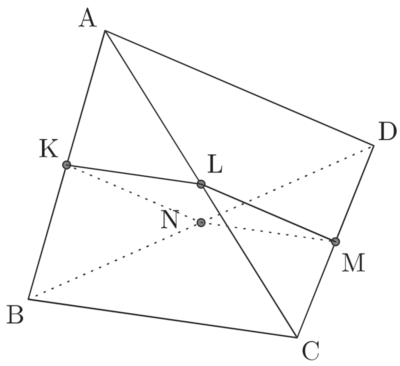
(1) 中点連結定理より，

$$\overrightarrow{\mathrm{KL}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{KN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{LM}}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{KM}} &= \overrightarrow{\mathrm{KL}} + \overrightarrow{\mathrm{LM}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{KL}} + \overrightarrow{\mathrm{KN}}\end{aligned}$$

ゆえに 4 点 K，L，M，N は
同一平面上に存在する.　　［証明終］



(2) 上の結果より，四角形 KLMN は平行四辺形である.
また中点連結定理より，

$$\overrightarrow{\mathrm{KL}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{KN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

仮定より

$$\mathrm{AD} \perp \mathrm{BC}$$

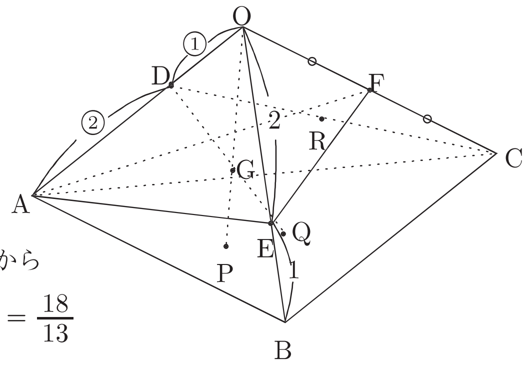
であるから

$$\mathrm{KL} \perp \mathrm{KN}$$

ゆえに四角形 KLMN は長方形である.　　［証明終］

【7】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\end{aligned}$$



3 点 O，G，P は共線であるから，
k を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}\\&=\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{2}{9}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}\end{aligned}$$

また 4 点 A，B，C，P は共面であるから

$$\frac{1}{3}k+\frac{2}{9}k+\frac{1}{6}k=1 \qquad \therefore\ k=\frac{18}{13}$$

以上より，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{6}{13}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{4}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{13}\overrightarrow{\mathrm{OC}}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 3 点 D，G，Q は共線であるから，l を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=l\overrightarrow{\mathrm{DG}}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=l\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)\\\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+l\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)\\&=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}l\vec{b}+\frac{1}{6}l\vec{c}\end{aligned}$$

さらに 4 点 Q，A，B，C は共面であるから，

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}l+\frac{1}{6}l=1 \qquad \therefore\ l=\frac{12}{7}$$

以上より，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{8}{21}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 3 点 C，R，D は共線であるから，t を $0 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数として
CR: RD $= t : 1-t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OD}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OF}}\end{aligned}$$

また 4 点 A，E，F，R は共面であるから

$$\frac{1}{3}t + 2(1-t) = 1 \qquad \therefore\ t = \frac{3}{5}$$

ゆえに

$$\mathrm{CR} : \mathrm{RD} = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} = \mathbf{3 : 2} \qquad (答)$$

【8】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ であるから，

$$l_1\ :\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{z}\end{pmatrix} = \boldsymbol{t}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{2}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{2}\boldsymbol{t}\\\boldsymbol{t}\end{pmatrix} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は実数)} \qquad (答)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ より

$$l_2\ :\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} + \boldsymbol{s}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1+}\boldsymbol{s}\\\boldsymbol{s}\\\mathbf{2-2}\boldsymbol{s}\end{pmatrix} \quad \textbf{(}\boldsymbol{s}\ \textbf{は実数)} \qquad (答)$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は平行でないから，l_1 と l_2 は平行でない．
l_1，l_2 が交わるとすると，

$$\begin{cases} 0 = 1 + s & \cdots ① \\ 2t = s & \cdots ② \\ t = 2 - 2s & \cdots ③ \end{cases}$$

①，② より $s = -1$，$t = -\dfrac{1}{2}$．ところがこれは ③ をみたさない．
ゆえに l_1，l_2 は交点をもたない．
平行でなく交点をもたないから，l_1，l_2 はねじれの位置にある．　　　［証明終］

(3) l_1，l_2 上の点をそれぞれ P，Q とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 1+s \\ s \\ 2-2s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s \\ s-2t \\ 2-2s-t \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

ここで題意より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \quad \cdots④, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \quad \cdots⑤$$

④ より

$$\begin{pmatrix} 1+s \\ s-2t \\ 2-2s-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2(s-2t) + (2-2s-t) = 0$$
$$\iff t = \frac{2}{5}$$

同様に ⑤ より

$$\begin{pmatrix} 1+s \\ s-2t \\ 2-2s-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \iff (1+s) + (s-2t) - 2(2-2s-t) = 0$$
$$\iff s = \frac{1}{2}$$

$(*)$ に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

また，$\mathrm{P}\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$ であるから，求める直線のベクトル方程式は

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{u}\textbf{ は実数)} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) 直線上の任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{-2t+4}\\\boldsymbol{t-3}\\\boldsymbol{3t+5}\end{pmatrix}\quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意の実数)}\qquad \text{(答)}$$

(2) 直線上の任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}+t\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{3t-1}\\\boldsymbol{4}\\\boldsymbol{-6t+5}\end{pmatrix}\quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意の実数)}\qquad \text{(答)}$$

【2】(1)

$$\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}\right|=2\ \text{より}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2}=2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=4}\qquad \text{(答)}$$

(2) (1) で求めた球の方程式に，$y=0$ を代入して

$$(x-3)^2+(0-1)^2+(z+4)^2=4$$

$$\therefore\ (x-3)^2+(z+4)^2=3$$

したがって

$\boldsymbol{zx}$ **平面上にあって，点 $\boldsymbol{(3,\ 0,\ -4)}$ を中心とし，半径 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ の円**　(答)

【3】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\qquad \text{(答)}$$

(2) O，D，E は同一直線上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$=\frac{1}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ここで，A，B，C，E は同一平面上にあるので，

$$\frac{1}{9}k+\frac{1}{9}k+\frac{2}{3}k=1\qquad \therefore\ k=\frac{9}{8}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\qquad \text{(答)}$$

【4】(1) A，B，C，D が同一平面上に存在するので，α，β を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表せる．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} x+2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha+2\beta \\ 3\alpha-5\beta \\ \alpha-2\beta \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{cases} x+2 = 3\alpha+2\beta & \cdots ① \\ -7 = 3\alpha-5\beta & \cdots ② \\ -3 = \alpha-2\beta & \cdots ③ \end{cases}$$

②，③ より，　$(\alpha,\ \beta) = (1,\ 2)$

これを ① に代入して

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 5} \qquad \text{(答)}$$

(2) A，C，E は同一直線上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 5-7s \\ 7s-7 \\ 3s \end{pmatrix} \quad (s \text{ は任意の実数})$$

B，D，E は同一直線上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \begin{pmatrix} t \\ 8t-5 \\ 3t+1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

よって

$$\begin{cases} 5-7s = t & \cdots ④ \\ 7s-7 = 8t-5 & \cdots ⑤ \\ 3s = 3t+1 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

④，⑤ を解くと，　$(s,\ t) = \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$．

これは ⑥ を満たす．

よって

$$\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\frac{1}{3},\ -\frac{7}{3},\ 2}\right) \qquad \text{(答)}$$

M1JS/M1J

高１選抜東大数学

高１東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	