M2JS/M2J

本科 2 期 10 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 選抜東大数学

高 2 東大数学

問題

【1】点 P は BE，CD 上にあるから，それぞれ実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AE}\\ &= (1-s)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}s\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AP} &= (1-t)\overrightarrow{AD} + t\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

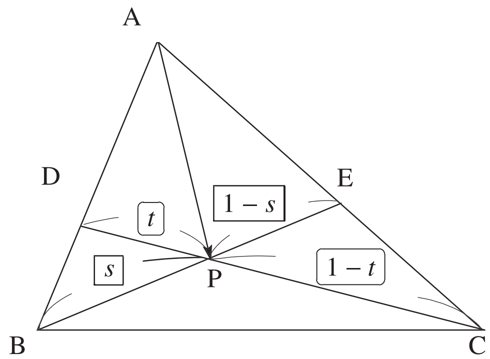
と表せる．よって，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は 1 次独立より

$$1-s = \frac{2}{3}(1-t),\ \frac{1}{2}s = t \qquad \therefore \quad s = \frac{1}{2},\ t = \frac{1}{4}$$

となるので

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \qquad (答)$$

図 17.1



【2】与式の左辺は，始点を A に統一すると

$$5\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=10\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$$

と変形できるので，与式は

$$10\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{10}\ \cdots①$$

これより

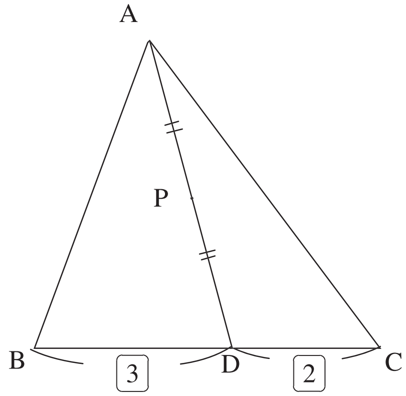
$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$$

と変形できて，BC を 3 : 2 に内分する点を D とすると

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

ゆえに，点 P は図 17.2 のように AD の中点である．　(答)

図 17.2



【3】$|3\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{7}$ より

$$|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=28$$

つまり

$$9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9\cdot 2^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot 1^2=28$$

$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=1\qquad \text{(答)}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$$\theta=60^\circ\qquad \text{(答)}$$

【4】$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{3\vec{c} + 2\vec{a}}{5}$$

よって，$\triangle$PQR の外心が O と一致するとき，OP = OQ = OR なので

$$|3\vec{a} + 2\vec{b}| = |3\vec{b} + 2\vec{c}| = |3\vec{c} + 2\vec{a}|$$

辺々 2 乗すると

$$9|\vec{a}|^2 + 12(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2 = 9|\vec{b}|^2 + 12(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 4|\vec{c}|^2 = 9|\vec{c}|^2 + 12(\vec{c} \cdot \vec{a}) + 4|\vec{a}|^2$$

となるが，O は $\triangle$ABC の外心でもあるから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| \cdots ①$$
$$\therefore \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$$

これと ①より

$$|\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2(\vec{b} \cdot \vec{c}) + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{c} \cdot \vec{a}) + |\vec{c}|^2$$

よって

$$|\vec{b} - \vec{a}| = |\vec{c} - \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{c}|$$

すなわち，AB = BC = CA となるので，$\triangle$ABC は正 3 角形である．　(答)

【5】(1) $\angle\mathrm{ABC} = \theta$ とおく．このとき，$\angle\mathrm{ADC} = \pi - \theta$ であり，$\triangle$ABC と $\triangle$ADC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC}\cos\theta = 1 + 6 - 2\sqrt{6}\cos\theta \\ &= 7 - 2\sqrt{6}\cos\theta \\ \mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AD}^2 + \mathrm{DC}^2 - 2\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DC}\cos(\pi - \theta) = 4 + 6 + 4\sqrt{6}\cos\theta \\ &= 10 + 4\sqrt{6}\cos\theta\end{aligned}$$

これから，$\mathrm{AC}^2 = 8$ である．よって

$$\mathrm{AC} = 2\sqrt{2} \quad (答)$$

(2) 円の半径を r とおく．

$$r^2 = \mathrm{OD}^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = r^2 + 4 - 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2 \quad (答)$$

同様にして

$$r^2 = \mathrm{OC}^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = r^2 + 8 - 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4 \quad (答)$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は 1 次独立であるから，実数 x, y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = x\overrightarrow{\mathrm{AC}} + y\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とおける．

さて，CD について

$$\mathrm{CD}^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = 4 + 8 - 2\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3$$

ここで，(2) から

$$2 = \overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (x\overrightarrow{\mathrm{AC}} + y\overrightarrow{\mathrm{AD}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3x + 4y$$
$$4 = \overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x\overrightarrow{\mathrm{AC}} + y\overrightarrow{\mathrm{AD}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 8x + 3y$$

これを解いて

$$x = \frac{10}{23},\ y = \frac{4}{23}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \frac{10}{23}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{4}{23}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】$\triangle$ABC の重心を G とおく.

条件より明らかに，直線 AA$''$, BB$''$, CC$''$ はどの 2 本も平行でないから，3 直線が点 G を通ることを示せば十分.

ここで，O を定点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

とかける.

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OA''}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}$$

と表せる.

さて，直線 AA$''$ 上の任意の点の位置ベクトルは実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AA''}}$$

と表せるが，$t = \dfrac{3}{4}$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AA''}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OA''}} \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OG}}\end{aligned}$$

となるから，直線 AA$''$ は点 G を通る．また，対称性より直線 BB$''$，直線 CC$''$ も点 G を通る.

よって，直線 AA$''$, BB$''$, CC$''$ は $\triangle$ABC の重心 G で交わる.　　（証明終）

１８章　平面ベクトル（２）

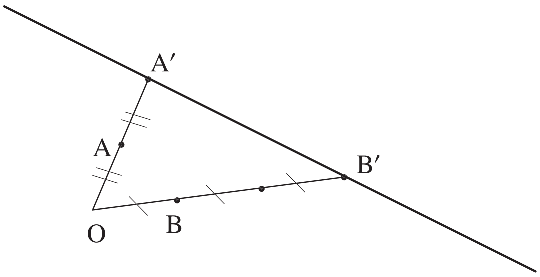
問題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\alpha}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{\beta}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

であるから，求める図形は $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ としたときの直線 A′B′ であり，図示すると図 18.1 の太線部のようになる．　　(答)

図 18.1



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 P が，3 つの条件 $1\leqq\alpha+\beta\leqq 2$, $0\leqq\alpha\leqq 1$, $0\leqq\beta\leqq 1$ で定まる共通範囲をとればよい．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $0\leqq\alpha\leqq 1$ かつ $0\leqq\beta\leqq 1$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 C をとると，図 18.2 のように平行 4 辺形 AOBC の周上および内部の点の集合である．

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $1\leqq\alpha+\beta\leqq 2$ かつ $\alpha\geqq 0$ かつ $\beta\geqq 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB''}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 A′，B″ をとると，図 18.3 のような台形 ABB″A′ の周上および内部の点の集合である．

図 18.2

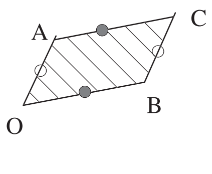
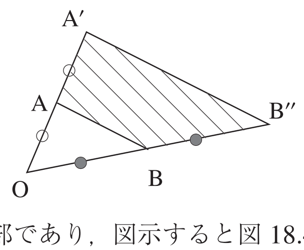
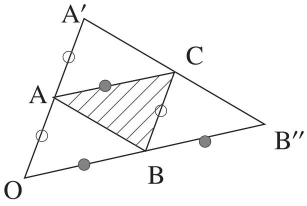


図 18.3



以上より，求める図形は △ABC の周上および内部であり，図示すると図 18.4 の斜線部のようになる．　　(答)

図 18.4

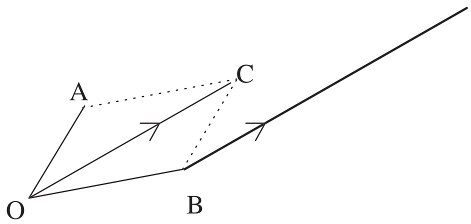


(3) $\beta = \alpha + 1$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\alpha + 1)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \alpha(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 C をとると，求める図形は点 B を始点とし，OC に平行な半直線となり，図示すると図 18.5 の太線部のようになる．　　(答)

図 18.5



【2】(1) AC : CO = AD : DB = 2 : 1 より

$$\mathrm{CD} \mathbin{/\!/} \mathrm{OB}$$

よって，$\overrightarrow{p}$ は実数 t を用いて

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} \qquad \text{(答)}$$

と表せる．

(2) 点 C，点 D について

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}$$

であるから，$\overrightarrow{p}$ の方程式は

$$\left(\overrightarrow{p} - \frac{1}{3}\overrightarrow{a}\right)\cdot\left(\overrightarrow{p} - \frac{1}{3}\overrightarrow{a} - \frac{2}{3}\overrightarrow{b}\right) = 0 \qquad \text{(答)}$$

となる．

【3】与条件から

$$2s + 3t = 6 \quad \therefore \quad \frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 1$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{s}{3} \cdot 3\vec{a} + \frac{t}{2}(-2\vec{b})$$

と変形し

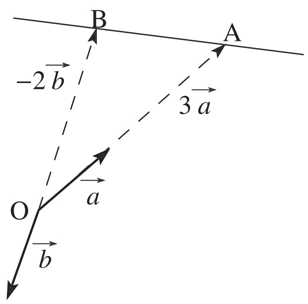
$$3\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad -2\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおくと, 点 P は, 直線 AB 上のすべての点を表す.

ゆえに, 点 P の軌跡は

$3\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ -2\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる 2 点 A, B を通る直線 (答)

図 18.6



【4】$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0 \qquad \therefore \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p}$ とおけば

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\
&= \vec{p} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) + (\vec{p} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) + (\vec{p} - \vec{c}) \cdot \vec{p} \\
&= 3|\vec{p}|^2 - 2(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{p} + \vec{b} \cdot \vec{c} \\
&= 3\left\{|\vec{p}|^2 - \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{p}\right\} \quad (\because \vec{b} \cdot \vec{c} = 0) \\
&= 3\left\{|\vec{p}|^2 - \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{p} + \left|\frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2\right\} - 3\left|\frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2 \\
&= 3\left\{\left|\vec{p} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2 - \left|\frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2\right\}
\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ であるとき

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2=0$$

$$\therefore\quad \left|\vec{p}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|\ \cdots ①$$

である. ここで, △ABC の重心を G とおけば

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

よって，①は

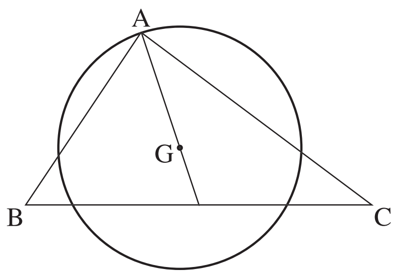
$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|\quad\therefore\quad|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|$$

となる. したがって，P の描く図形は

△ABC の重心 G を中心とし，点 A を通る円

であり，これを図示すると図 18.7 の太線部のようになる.　(答)

図 18.7



添削課題

【1】(1) 与式から

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$
$$\therefore (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MP})+3\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$
$$\therefore 4\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MP}+|\overrightarrow{MP}|^2=0$$

と変形されるが

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-1,\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

であることから

$$|\overrightarrow{MP}|^2=4 \qquad \therefore\quad |\overrightarrow{MP}|=2$$

ゆえに，点 P は M を中心とする半径 2 の円を描く．　　(答)

(2) A(1, 0), B(−1, 0), M(0, 0) とし，P(x, y) とおくと，(1) より

$$x^2+y^2=4 \cdots ①$$

が成立し，このとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA}|^2|\overrightarrow{PB}|^2 &= \left\{(x-1)^2+y^2\right\}\left\{(x+1)^2+y^2\right\}\\ &=(x^2+y^2-2x+1)(x^2+y^2+2x+1)\\ &=(5-2x)(5+2x) \quad (\because\ ①)\\ &=25-4x^2\end{aligned}$$

一方，①より，$0\leqq x^2\leqq 4$ であるから

$$9\leqq 25-4x^2\leqq 25 \quad \therefore 9\leqq|\overrightarrow{PA}|^2|\overrightarrow{PB}|^2\leqq 25$$
$$\therefore 3\leqq|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\leqq 5$$

したがって，$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|$ は

$$\begin{cases}\text{P}(x,\ y)=(\pm2,\ 0) \text{ のとき，最小値 } 3\\ \text{P}(x,\ y)=(0,\ \pm2) \text{ のとき，最大値 } 5\end{cases} \qquad \text{(答)}$$

をとる．

問題

【1】点 P は直線 OG 上にあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OG} = \frac{t}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{t}{3}\overrightarrow{OC} \quad \cdots ①$$

と表せる．ここで，① は $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$ を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \frac{t}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2t}{3}\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE}$$

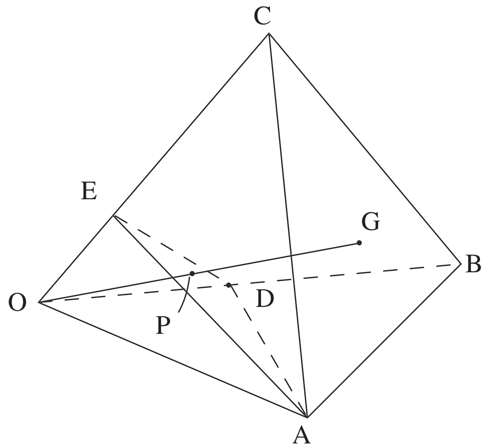
と表すことができ，P は平面 ADE 上にあるから

$$\frac{t}{3} + \frac{2t}{3} + t = 1 \qquad \therefore \quad t = \frac{1}{2}$$

ゆえに，① より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \qquad \text{(答)}$$

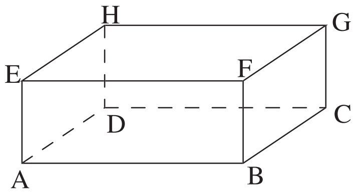
図 19.1



【2】(1) 図 19.2 より

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \qquad \text{(答)}$$
$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \qquad \text{(答)}$$

図 19.2



(2) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{2}, |\vec{c}| = 1$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} &= (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\ &= \{(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}\}\{(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\}\\ &= |\vec{b}+\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2\\ &= -|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\\ &= -9+2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+1\end{aligned}$$

$\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ より

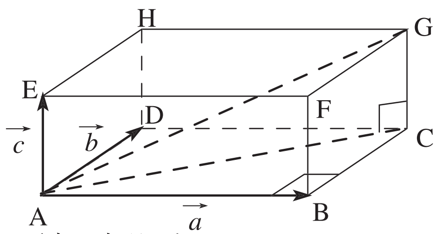
$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} = -9+2+0+1 = -6 \qquad (\text{答}) \cdots ①$$

(3)

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} = |\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|\cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|} \cdots ②$$

図 19.3



$\triangle$ABC において，3 平方の定理より

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9 + 2 = 11$$

$\triangle$AGC において，3 平方の定理より

$$AG^2 = AC^2 + GC^2 = 11 + 1 = 12 \cdots ③$$

また，この図形は直方体であるから

$$AG = BH \cdots ④$$

①, ②, ③, ④より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より

$$\theta = 120° \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) D は OA 上にあるから，OD : OA = a : 1 とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ (0 < a < 1)$$

とおける．ここで，BF : FD = 3 : 1 だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{3}{4}a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots ①\end{aligned}$$

また，E は OB 上にあるから，OE : OB = b : 1 とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0 < b < 1)$$

とおける．ここで，AF : FE = 2 : 1 だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots ②$$

①，② および $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \fallingdotseq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \fallingdotseq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により

$$\begin{cases}\dfrac{3}{4}a = \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{3}b\end{cases}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\qquad \text{(答)}$$

(2) (1) により，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，Q は CE 上にある．ここで，CQ : QE = s : $(1 - s)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OE}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= \frac{3}{8}s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ (0 < s < 1)\ \cdots ③\end{aligned}$$

また，BP : PC = t : 1 だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{1+t}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{t}{1+t}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \cdots ④$$

とかける．そして，③，④ と O，Q，P が同一直線上にあることおよび，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \fallingdotseq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \fallingdotseq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ により

$$\begin{aligned}&\frac{3}{8}s : (1-s) = 1 : t\\ \therefore\quad & s = \frac{8}{8+3t}\\ \therefore\quad & \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{8+3t}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{3t}{8+3t}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) (1)，(2) により

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OF}}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\frac{3}{8+3t} - \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{3t}{8+3t}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \cdots ⑤\end{aligned}$$

ここで，直線 FQ が平面 ABC と平行になるとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FQ}} &= p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + q\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ (p, q\ \text{は実数})\\ &= (-p-q)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + p\overrightarrow{\mathrm{OB}} + q\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \cdots ⑥\end{aligned}$$

とおける．そして，⑤，⑥ および $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立であることから

$$\begin{cases} -p-q = -\dfrac{1}{3} \ \cdots ⑦\\ p = \dfrac{3}{8+3t} - \dfrac{1}{4} \ \cdots ⑧\\ q = \dfrac{3t}{8+3t} \ \cdots ⑨\end{cases}$$

⑦ + ⑧ + ⑨ より

$$-\frac{1}{3} + \frac{3}{8+3t} - \frac{1}{4} + \frac{3t}{8+3t} = 0$$

$$\therefore\quad \frac{3+3t}{8+3t} = \frac{7}{12}$$

$$\therefore\quad t = \frac{4}{3}\qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 条件より

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2-2+1=-3,$$
$$|\overrightarrow{AB}|=3,\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$$

であるから

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{27-9}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\qquad\text{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ($s,\ t$ は実数) とおく.

線分 AB の中点を M, 線分 BC の中点を N, とすると

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

ここで

$$\overrightarrow{PN}=\left(\frac{1}{2}-s\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{PM}=\left(\frac{1}{2}-s\right)\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC}$$

P は △ABC の外心なので, $\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より

$$\left(\frac{1}{2}-t\right)|\overrightarrow{AC}|^2+(t-s)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\left(\frac{1}{2}-s\right)|\overrightarrow{AB}|^2=0\ \cdots①$$
$$\left(\frac{1}{2}-s\right)|\overrightarrow{AB}|^2-t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\ \cdots②$$

① より

$$3\left(\frac{1}{2}-t\right)-3(t-s)-9\left(\frac{1}{2}-s\right)=0$$
$$\therefore\quad 4s-2t-1=0\ \cdots①'$$

② より

$$9\left(\frac{1}{2}-s\right)+3t=0$$
$$\therefore\quad 6s-2t-3=0\ \cdots②'$$

①′, ②′ より

$$s=1,\ t=\frac{3}{2}$$

よって

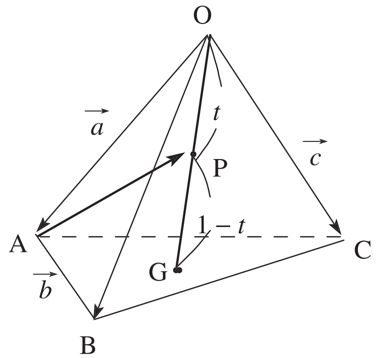
$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) P は線分 OG を $t : (1-t)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

図 1.1



ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = -\vec{a}$$

であり，点 G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\vec{a} + t\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \left(\frac{t}{3}-1\right)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\cdot\left\{\left(\frac{t}{3}-1\right)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c}\right\}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{t}{3}-1\right)|\vec{a}|^2 + \frac{t}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{t}{9}|\vec{c}|^2\\ &\qquad + \frac{1}{3}\left(\frac{2t}{3}-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{2t}{9}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{1}{3}\left(\frac{2t}{3}-1\right)\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

ここで，条件より

$$\begin{aligned}&|\vec{a}|^2 = 1, \quad |\vec{b}|^2 = 4, \quad |\vec{c}|^2 = 2\\ &\vec{a}\cdot\vec{b} = 1, \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 0, \quad \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\end{aligned}$$

を代入して整理すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{1}{3}\left(\frac{t}{3}-1\right) + \frac{4t}{9} + \frac{2t}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{2t}{3}-1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2t}{3}-1\right)\\ &= \frac{11}{9}t - 1\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ より

$$\frac{11}{9}t - 1 = 0$$

$0 < t < 1$ より

$$t = \frac{9}{11} \qquad (\text{答})$$

問題

【1】平面 ABC 上の点 P は，実数 $s,\ t$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= (1-s-t)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix}2-s\\-s+t\\1+s\end{pmatrix}\ \cdots①$$

と表せる．OP⊥(平面 ABC) のとき，すなわち P=H のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ \text{かつ}\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

をみたし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3s-t-1 = 0,\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -s+t = 0$$

よって，$s = t = \dfrac{1}{2}$ なので，① より

$$\mathrm{H}\left(\frac{3}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right),\ \mathrm{OH} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\qquad(\text{答})$$

【2】(1) 実数 $s,\ t$ を用いて

$$\begin{aligned}\ell_1 &: \frac{x-3}{2} = 1-y = z-5 = s \\ \ell_2 &: x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3} = t\end{aligned}$$

とおき，2 直線 $\ell_1,\ \ell_2$ 上の点をそれぞれ A, B とすると

$$\mathrm{A}(2s+3,\ -s+1,\ s+5),\quad \mathrm{B}(t+2,\ 2t-1,\ 3t-1)$$

と表せる．

$\ell_1,\ \ell_2$ が交わると仮定すると，A = B として

$$\begin{cases}2s+3 = t+2\ \cdots①\\ -s+1 = 2t-1\ \cdots②\\ s+5 = 3t-1\ \cdots③\end{cases}$$

①, ②より

$$s = 0,\ t = 1$$

これは③をみたさないので，ℓ_1 と ℓ_2 は交わらない．

また，ℓ_1, ℓ_2 の方向ベクトルはそれぞれ

$$\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ \overrightarrow{d_1} \not\parallel \overrightarrow{d_2}$$

よって，ℓ_1 と ℓ_2 は平行ではない．

したがって，ℓ_1, ℓ_2 は同一平面上にない．（証明終）

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} t-2s-1 \\ 2t+s-2 \\ 3t-s-6 \end{pmatrix}$ であり，$\overrightarrow{d_1} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{d_2} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると

$$\begin{cases} 2(t-2s-1)-(2t+s-2)+(3t-s-6)=0 \\ (t-2s-1)+2(2t+s-2)+3(3t-s-6)=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} t-2s=2 \\ 14t-3s=23 \end{cases}$$

これを解くと

$$s=-\frac{1}{5}, \quad t=\frac{8}{5}$$

$$\therefore\ \mathrm{A}\left(\frac{13}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{24}{5}\right), \quad \mathrm{B}\left(\frac{18}{5},\ \frac{11}{5},\ \frac{19}{5}\right), \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求める直線 AB の方程式は

$$x-\frac{13}{5} = y-\frac{6}{5} = -\left(z-\frac{24}{5}\right) \qquad \text{(答)}$$

【3】$x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z+1=0$ より

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$$

よって，この球面は中心 C(1, −3, 4)，半径 5 の球面である．

中心 C と平面 $x-2y+2z=6$ との距離は

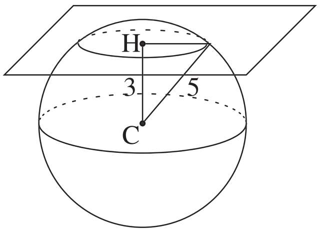
$$\frac{|1-2\cdot(-3)+2\cdot 4-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3<5\ (=\text{球の半径})$$

よって，平面と球面は交わる．　　　　（証明終）

また，交線の円の半径を r とすると

$$r^2=5^2-3^2=16 \qquad \therefore \quad r=4 \qquad (\text{答})$$

図 20.1



【4】(1) $PQ \perp \ell$ より，点 Q は P を通り ℓ に垂直な平面 π 上にあるから

$$\pi \text{ と } S \text{ が共有点をもつ } \cdots\cdots(\sharp)$$

ことが必要である．

ここで，($\sharp$) のとき，π と S の共有点は円 C(点円を含む) を描く．P から C に引いた接線の接点を Q とし，R から平面 π に下ろした垂線の足を H とすれば，H は C の中心であり

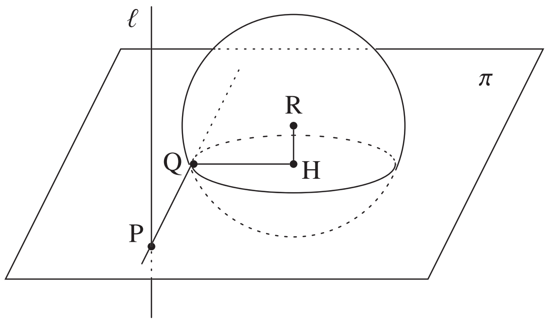
$$HQ \perp PQ \text{ かつ } RH \perp \pi \qquad \therefore \quad RQ \perp PQ$$

すなわち

$$PQ \perp \ell,\ PQ \perp QR$$

となり，題意をみたす．

図 20.2



以上から，($\sharp$) は題意をみたすための必要十分条件であるから，以下，($\sharp$) をみたす P の存在範囲を求める．

A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) とおくと，$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\ell : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2},\ z = 0$$

であるから，P の x 座標を p とおくと

$$P(p,\ -2p+2,\ 0)$$

となる．

また，平面 π は $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるから，平面 π の方程式は

$$x - 2y = 5p - 4$$

と表せる．

ここで，(♯) をみたすためには，平面 π と点 R との距離が 1 以下であることが必要十分条件であるから

$$\frac{|5p-4|}{\sqrt{5}} \leqq 1$$
$$\iff \quad -\sqrt{5} \leqq 5p-4 \leqq \sqrt{5}$$
$$\iff \quad \frac{4-\sqrt{5}}{5} \leqq p \leqq \frac{4+\sqrt{5}}{5}$$

よって，点 P の存在範囲は

$$xy\text{ 平面上の } y=-2x+2\left(\frac{4-\sqrt{5}}{5} \leqq x \leqq \frac{4+\sqrt{5}}{5}\right)$$

で表される線分上である．　　(答)

(2) PQ ⊥ QR より，R から直線 ℓ に下ろした垂線の足を I とすると

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2=\mathrm{PR}^2-1 \geqq \mathrm{IR}^2-1$$

よって，P が I と一致するとき，PQ の長さは最小となる．
また，P が I と一致するとき，平面 π は R を通るから

$$0-2\cdot 0=5p-4 \qquad \therefore \quad p=\frac{4}{5}$$

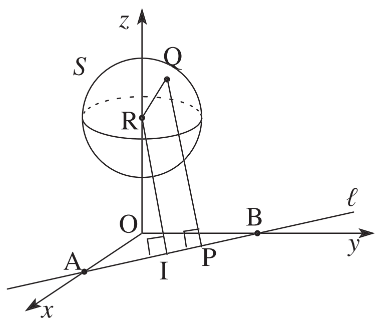
すなわち

$$\mathrm{I}\left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right)$$

よって，求める P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right) \qquad \text{(答)}$$

図 20.3



【5】(1) $\overrightarrow{\mathrm{NP}}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r-1 \end{pmatrix}$ より，直線 NP 上の点は，実数 t を用いて

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} p \\ q \\ r-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} tp \\ tq \\ t(r-1)+1 \end{pmatrix}$$

とかける．直線 NP が Q を通るから

$$\begin{pmatrix} tp \\ tq \\ t(r-1)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad t = \frac{1}{1-r} \quad (\mathrm{P} \neq \mathrm{N} \text{ より } r \neq 1)$$

$$\therefore\quad u = \frac{p}{1-r},\ v = \frac{q}{1-r} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与条件より

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\pi : x = \frac{1}{2}$$

点 P は S と π の交線上を動くので

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 \ \cdots ①$$

$$p = \frac{1}{2} \ \cdots ②$$

(1) より

$$u = \frac{p}{1-r} \ \cdots ③$$

$$v = \frac{q}{1-r} \ \cdots ④$$

②, ③より，$u \neq 0$ だから

$$r = 1 - \frac{1}{2u} \ \cdots ⑤$$

④, ⑤より

$$q = \frac{v}{2u} \ \cdots ⑥$$

②, ⑤, ⑥を①へ代入して

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2u}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2u}\right)^2 = 1$$

$$u^2 - 4u + v^2 + 1 = 0$$

$$\therefore\quad (u-2)^2 + v^2 = 3$$

よって，点 Q が描く軌跡の方程式は

$$(x-2)^2 + y^2 = 3,\ z = 0$$

であるから，

xy 平面上の中心 $(2,\ 0,\ 0)$, 半径 $\sqrt{3}$ の円

を表す．　　(答)

添削課題

【1】$\mathrm{AP} = 4s$, $\mathrm{CQ} = 4t$ より

$$\mathrm{P}(3,\ 0,\ 4s),\ \mathrm{Q}(0,\ 2,\ 4t)$$

である．

さて，線分 AC 上の点を R とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3-3u \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \leqq u \leqq 1)$$

と表せる．

ここで，直線 DR が O，P，Q を含む平面に垂直であるための条件は $\overrightarrow{\mathrm{DR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから，このとき

$$\begin{pmatrix} 3-3u \\ 2u \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4s \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 3-3u \\ 2u \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4t \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad 9 - 9u - 16s = 0, \quad 4u - 16t = 0$$

$$\therefore \quad u = 4t, \quad 16s + 36t = 9$$

$0 < t < 1$, $0 < s < 1$, $0 \leqq u \leqq 1$ とあわせて，s, t のみたす条件は

$$16s + 36t = 9,\ 0 < t < \frac{1}{4} \qquad (答)$$

M2JS/M2J

高２選抜東大数学

高２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	