M2JD

本科 2 期 10 月度

解答

Z 会東大進学教室

高 2 東大理系数学Ⅲ

Lecture 4　積分法 (1)　不定積分と定積分 - 解答

演習問題 $4-1$

$\boxed{1}$　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx$

(4) $\displaystyle\int (3x-1)^4\,dx$　(5) $\displaystyle\int \sqrt{7x+1}\,dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$

$\boxed{2}$　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt[3]{x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(1+x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$　(4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}\,dx$

解答・解説

$\boxed{1}$

以下，C を積分定数とする．

(1)　(与式) $\displaystyle = \int x^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1}+C = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C$　(答)

(2)　(与式) $\displaystyle = \int x^{\frac{5}{2}}x\,dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1}+C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$　(答)

(3)　(与式) $\displaystyle = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C = -\frac{1}{2}x^{-2}+C = -\frac{1}{2x^2}+C$　(答)

(4)　(与式) $\displaystyle = \frac{1}{5\cdot 3}(3x-1)^5+C = \frac{1}{15}(3x-1)^5+C$　(答)

(5)　(与式) $\displaystyle = \int (7x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot 7}(7x+1)^{\frac{1}{2}+1}+C = \frac{2}{21}\sqrt{(7x+1)^3}+C$　(答)

(6)　(与式) $\displaystyle = \int (2x+3)^{-3}\,dx = \frac{1}{(-3+1)\cdot 2}(2x+3)^{-3+1}+C = -\frac{1}{4}\frac{1}{(2x+3)^2}+C$　(答)

$\boxed{2}$

(1) (与式) $= \displaystyle\int_0^2 x^{\frac{1}{3}}\,dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^2 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{16} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ (答)

(2) (与式) $= \displaystyle\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$ (答)

(3) (与式) $= \displaystyle\int_1^3 (x+1)^{-2}\,dx = \left[-(x+1)^{-1}\right]_1^3 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ (答)

(4) (与式) $= [\log|x|]_{\frac{1}{e}}^{e} = \log e - \log\dfrac{1}{e} = 1 - (-1) = 2$ (答)

演習問題 4 − 2

1 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (e^x + 2\cos x)\,dx$　(2) $\displaystyle\int \left(2\sin x + \frac{1}{x}\right) dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$

(4) $\displaystyle\int e^{2x+1}\,dx$　(5) $\displaystyle\int \sin 3x\,dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(2x+1)}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \sin(2x+3)\,dx$　(8) $\displaystyle\int \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx$　(9) $\displaystyle\int \tan 3x\,dx$

2 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{\log 3}^{\log 5} e^{2x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{\cos^2 3x}\,dx$

解答・解説

1

以下，C を積分定数とする．

(1) (与式) $= e^x + 2\sin x + C$ (答)

(2) (与式) $= -2\cos x + \log x + C$ (答)

(3) (与式) $= \tan x + C$ (答)

(4) (与式) $= \dfrac{1}{2}e^{2x+1} + C$ (答)

(5) (与式) $= -\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$ (答)

(6) (与式) $= \dfrac{1}{2}\tan(2x+1) + C$ (答)

(7) (与式) $= -\dfrac{1}{2}\cos(2x+3) + C$ (答)

(8) (与式) $= \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C$ (答)

(9) (与式) $= -\dfrac{1}{3}\log|\cos 3x| + C$ (答)

$\boxed{2}$

(1) (与式) $= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$ (答)

(2) (与式) $= \left[\dfrac{1}{2}e^{2x}\right]_{\log 3}^{\log 5} = \dfrac{1}{2}\left(e^{2\log 5} - e^{2\log 3}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\log 25} - e^{\log 9}\right) = \dfrac{25-9}{2} = 8$ (答)

(3) (与式) $= \left[\dfrac{1}{3}\tan 3x\right]_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} = \dfrac{1}{3}\left(\tan\dfrac{\pi}{3} - \tan\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ (答)

演習問題 4 − 3

1 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{4-x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 3x \cos 2x\,dx$ (5) $\displaystyle\int \sin^2 4x\,dx$ (6) $\displaystyle\int \cos 5x \cos x\,dx$

2 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$ (3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \cos^2 2x\,dx$

解答・解説

1

以下，C を積分定数とする．

(1) 部分分数分解を行う．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{1}{(x-3)(x-2)}\,dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx \\
&= \log|x-3| - \log|x-2| + C \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

注意 4.1

対数法則から

$$
\log|x-3| - \log|x-2| + C = \log\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C
$$

と一つにまとめてもよいし，そのままでもよい．以降も同様である．

(2) 部分分数分解を行う．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{1}{(2-x)(2+x)}\,dx \\
&= \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\left(-\log|2-x| + \log|2+x|\right) + C \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

(3) 部分分数分解を行う．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}\,dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) dx \\
&= \log|x+1| + \log|x+2| + C \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

(4) 積和の公式を用いる．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x \right) + C \\
&= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

(5) 2 倍角の公式（積和の公式）を用いる．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 8x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{8}\sin 8x \right) + C \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}\sin 8x + C \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

(6) 積和の公式を用いる．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C \\
&= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + C \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$

(1) 部分分数分解を行う．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
&= \left[\log|x| - \log|x+1| \right]_1^2 \\
&= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) \\
&= 2\log 2 - \log 3 \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

(2) 部分分数分解を行う．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx \\
&= \int_2^3 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\log|x-1| - \log|x+1|\right]_2^3 \\
&= \frac{1}{2}\left\{(\log 2 - \log 1) - (\log 4 - \log 3)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\log 2 - 2\log 2 + \log 3\right) \\
&= \frac{1}{2}(\log 3 - \log 2) \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

(3) 2 倍角の公式（積和の公式）を用いる．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{4}\left(\sin\frac{5}{3}\pi - \sin\frac{\pi}{3}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

演習問題 4 − 4

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\cos x|\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{4} \sqrt{|2-x|}\,dx$

解答・解説

(1)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx \\ &= [\sin x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0-1) \\ &= 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_{0}^{2} \sqrt{2-x}\,dx + \int_{2}^{4} \sqrt{x-2}\,dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 \\ &= \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} + \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

演習問題 4 − 5

m, n は自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ を求めよ．

解答・解説

積和の公式を用いると

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\left\{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right\}$$

ゆえに

i) $m \fallingdotseq n$ のとき

$$\begin{aligned}&-\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left\{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right\}dx\\ =&\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right\}\right]_0^{\pi}\\ =&0\end{aligned}$$

ii) $m = n$ のとき

与式は

$$-\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos 2mx - 1\right)dx$$

となるから，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} -\frac{1}{2}\left(\cos 2mx - 1\right)dx &= \left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2m}\sin 2mx - x\right\}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

以上より，求める値は

$$\begin{cases} 0 & (m \fallingdotseq n \text{ のとき})\\ \dfrac{\pi}{2} & (m = n \text{ のとき})\end{cases} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 4 − 6

定積分 $\displaystyle\int_0^\pi (1 - a\sin x - b\sin 2x)^2\,dx$ を最小にする定数 a, b の値を求めよ.

解答・解説

被積分関数を整理すると

$$
\begin{aligned}
&(1 - a\sin x - b\sin 2x)^2\\
=&1 + a^2\sin^2 x + b^2\sin^2 2x - 2(a\sin x + b\sin 2x) + 2ab\sin x\sin 2x\\
=&1 + \frac{a^2(1-\cos 2x)}{2} + \frac{b^2(1-\cos 4x)}{2} - 2(a\sin x + b\sin 2x) - ab(\cos 3x - \cos x)
\end{aligned}
$$

この式を $f(x)$ とする.

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) =&\int_0^\pi f(x)dx\\
=&\left[x + a^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) + b^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right) + \cdots\right]_0^\pi\\
=&\pi + \frac{\pi}{2}a^2 + \frac{\pi}{2}b^2 - 4a\\
=&\frac{\pi}{2}\left(a - \frac{4}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi}{2}b^2 + \pi - \frac{8}{\pi}
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$a = \frac{4}{\pi},\ b = 0 \qquad (\text{答})$$

のとき，最小値 $\pi - \dfrac{8}{\pi}$ をとる.

添削課題 4 − 1

1 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int (2x-1)^3\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt[4]{(2x+3)^3}\,dx$

(5) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3x-4}$

2 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+3}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_9^{25} \frac{1+\sqrt{x}}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{9-x^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx$

解答・解説

1

C を積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C.$ (答)

(2) $\displaystyle\int \left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{3}x^3+x+\log|x|+C.$ (答)

(3) $\displaystyle\int (2x-1)^3dx = \frac{1}{4\cdot 2}(2x-1)^4+C = \frac{1}{8}(2x-1)^4+C.$ (答)

(4) $\displaystyle\int (2x+3)^{\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{2\cdot\left(\frac{3}{4}+1\right)}(2x+3)^{\frac{3}{4}+1}+C = \frac{2}{7}(2x+3)^{\frac{7}{4}}+C.$ (答)

(5) 被積分関数を $x+1$ で整理する．

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+1}\,dx &= \int (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx \\
&= \int \left\{(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right\} dx \\
&= \frac{1}{\frac{3}{2}+1}(x+1)^{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x+1)^{\frac{1}{2}+1} + C \\
&= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(6) 被積分関数を部分分数に分解する．

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x+1)(x-4)} &= \int \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{5}\left(\log|x-4| - \log|x+1|\right) + C. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1) $\displaystyle\int_0^1 (x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right).$ (答)

(2) $\displaystyle\int_0^1 2(x+1)^{-2}\,dx = \left[\frac{2}{-2+1}(x+1)^{-1}\right]_0^1 = -2\left(\frac{1}{2}-1\right) = 1.$ (答)

(3) 被積分関数を和の形に直す．

$$\begin{aligned}
\int_9^{25}\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx &= \int_9^{25}\left(\frac{1}{x} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\
&= \left[\log x + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\right]_9^{25} \\
&= \left[\log x + 2\sqrt{x}\right]_9^{25} \\
&= (\log 25 - \log 9) + 2\left(\sqrt{25} - \sqrt{9}\right) \\
&= 2\log\frac{5}{3} + 4. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(4) 被積分関数を部分分数に分解する．

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-3}{(x-3)(x+3)}\,dx &= -\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx\\ &= -\frac{1}{2}\left[\log|x-3|-\log(x+3)\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{2}\left[\log\frac{3-x}{3+x}\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{2}\log\frac{2}{4}\\ &= \frac{1}{2}\log 2. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(5) 被積分関数を部分分数に分ける．まず，

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x-4)} = \frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-4}$$

をみたす a，b を求める．

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{(x-3)(x-4)} &= \frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-4}\\ &= \frac{(a+b)x+(-4a-3b)}{(x-3)(x-4)}\end{aligned}$$

分子を比較して

$$a+b=2, \quad -4a-3b=1.$$

連立して解くと

$$a=-7, \quad b=9.$$

すなわち

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx &= \int_1^2 \left(\frac{9}{x-4}-\frac{7}{x-3}\right)dx\\ &= \left[9\log|x-4|-7\log|x-3|\right]_1^2\\ &= 9(\log 2-\log 3)-7(\log 1-\log 2)\\ &= 16\log 2-9\log 3. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

添削課題 **4 − 2**

1 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int e^{2x+3}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \cos 3x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}\right)\,dx$

(5) $\displaystyle\int \cos 3x\cos 2x\,dx$

(6) $\displaystyle\int \sin 7x\cos 3x\,dx$

(7) $\displaystyle\int \tan 3x(1+\cos 3x)\,dx$

(8) $\displaystyle\int \tan^2 2x\,dx$

2 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x\sin 2x\,dx.$

(4) $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 5} e^{3x}\,dx.$

解答・解説

1

C を積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int e^{2x+3}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C.$ (答)

(2) 被積分関数を変形する．

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}\,dx &= \int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^x-1}\,dx\\ &= \int \left(e^{2x}+e^x+1\right)\,dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}+e^x+x+C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int \cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$ (答)

(4) $\displaystyle\int \sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}\right)\,dx=-\frac{6}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}\right)+C.$ (答)

(5) 積和の公式を用いる．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right)+C \\ &= \frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(6) 積和の公式を用いる．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{1}{2}\int(\sin 10x+\sin 4x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+C \\ &= -\frac{1}{20}\cos 10x-\frac{1}{8}\cos 4x+C \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(7) $(\text{与式}) = \displaystyle\int(\tan 3x+\sin 3x)dx = -\frac{1}{3}\log|\cos 3x|-\frac{1}{3}\cos 3x+C$ (答)

(8) $(\text{与式}) = \displaystyle\int\left(\frac{1}{\cos^2 2x}-1\right)dx = \frac{1}{2}\tan 2x-x+C$ (答)

$\boxed{2}$

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1.$ (答)

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = 2(1-0) = 2.$ (答)

(3) 積を和に直す公式を用いる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 5x\sin 2x\,dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\cos 7x-\cos 3x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}\sin 7x-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{2}{21}. \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 5}e^{3x}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_{\log 2}^{\log 5} = \frac{1}{3}(e^{3\log 5}-e^{3\log 2}) = \frac{1}{3}(5^3-2^3) = 39.$ (答)

Lecture 5　積分法 (2) 部分積分と置換積分 - 解答

演習問題 5 − 1

1　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\cos x\,dx.$　(2) $\displaystyle\int xe^x\,dx.$　(3) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx.$

(4) $\displaystyle\int \log(2x+1)\,dx.$　(5) $\displaystyle\int x^2e^{\frac{x}{2}}\,dx.$

2　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^{1-x}\,dx.$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx.$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x)\,dx.$

解答・解説

1

(1)　x を微分，$\cos x$ を積分する．

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx\\ &= x\sin x + \cos x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)　x を微分，e^x を積分する．

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx\\ &= xe^x - e^x + C\\ &= (x-1)e^x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)　x を微分，$\sin 2x$ を積分する．

$$\begin{aligned}\int x\sin 2x\,dx &= x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,dx\\ &= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4)　$1 = \dfrac{1}{2}(2x+1)'$ を積分，$\log(2x+1)$ を微分する．

$$\begin{aligned}
\int \log(2x+1)\,dx &= \int \frac{1}{2}(2x+1)' \cdot \log(2x+1)\,dx \\
&= \frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1) - \int \frac{1}{2}(2x+1)\cdot\frac{1}{2x+1}\cdot 2\,dx \\
&= \frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1) - \int dx \\
&= \frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1) - x + C. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(5)　x^2 を微分，$e^{\frac{x}{2}}$ を積分する．その後もう 1 度部分積分を実行する．

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx &= x^2 \cdot 2e^{\frac{x}{2}} - \int 2x \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx \\
&= 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4\int x \cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx \\
&= 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4\left(x \cdot 2e^{\frac{x}{2}} - \int 1 \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx\right) \\
&= 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} + 8\int e^{\frac{x}{2}}\,dx \\
&= 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} + 16e^{\frac{x}{2}} + C \\
&= \left(2x^2 - 8x + 16\right) e^{\frac{x}{2}} + C. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1)　x を微分，e^{1-x} を積分する．

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{1-x}\,dx &= \left[-xe^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{1-x}\right)\,dx \\
&= \left(-1\cdot e^0\right) + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 \\
&= -1 + (-1 + e) \\
&= e - 2. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(2)　x を微分，$\cos 2x$ を積分する．

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx &= \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3)　$1=(1+x)'$ を積分，$\log(1+x)$ を微分する．

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(1+x)\,dx &= \int_0^1 (1+x)'\log(1+x)\,dx \\ &= \big[(1+x)\log(1+x)\big]_0^1 - \int_0^1 (1+x)\frac{1}{1+x}\,dx \\ &= 2\log 2 - \int_0^1 dx \\ &= 2\log 2 - 1. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

演習問題 5 − 2

不定積分 $\displaystyle\int e^x \cos 2x dx$ を求めよ.

解答・解説

$I = \displaystyle\int e^x \cos 2x dx$ とする.

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^x \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx \\
&= e^x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \sin 2x dx \\
&= \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' dx \\
&= \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\left\{e^x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx\right\} \\
&= \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}I
\end{aligned}
$$

ゆえに，C を積分定数として

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{4}I &= \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x + C \\
\therefore \quad I &= \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x + C \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

演習問題 5 − 3

$\boxed{1}$ 次の不定積分について，[ ] で与えられた置換を行うことで求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \quad [\,t=x^3+1\,]$ (2) $\displaystyle\int \sin^6 x\cos x\,dx \quad [\,t=\sin x\,]$

(3) $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\,dx \quad [\,t=\tan x\,]$ (4) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^4}{x}\,dx \quad [\,t=\log x\,]$

$\boxed{2}$ 次の定積分について，[ ] で与えられた置換を行うことで求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad [\,t=-\sqrt{x}\,]$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx \quad [\,t=\sqrt{x}+1\,]$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x(x^2+1)^4\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sin x\cos^4 x\,dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

解答・解説

$\boxed{1}$

(1) $t=x^3+1$ とおくと，

$$dt=3x^2\,dx. \qquad \therefore \quad x^2\,dx=\frac{1}{3}dt.$$

よって

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \int \frac{1}{3}\sqrt{t}\,dt\\ &= \frac{2}{9}t^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{9}(x^3+1)\sqrt{x^3+1}+C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $t=\sin x$ とおくと

$$dt=\cos x\,dx.$$

よって

$$\begin{aligned}\int \sin^6 x \cos x \, dx &= \int t^6 \, dt \\ &= \frac{1}{7}t^7 + C \\ &= \frac{1}{7}\sin^7 x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $t = \tan x$ とおくと

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\, dx &= \int t^3 \, dt \\ &= \frac{1}{4}t^4 + C \\ &= \frac{1}{4}\tan^4 x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4) $t = \log x$ とおくと

$$dt = \frac{1}{x}\, dx.$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{(\log x)^4}{x}\, dx &= \int t^4 \, dt \\ &= \frac{1}{5}t^5 + C \\ &= \frac{1}{5}(\log x)^5 + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1) $t = -\sqrt{x}$ とおくと

$$dt = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx. \qquad \therefore \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = -2\, dt, \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & 4 \\ \hline t & -1 & \to & -2 \end{array}$$

より

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx &= \int_{-1}^{-2} e^t(-2)\, dt \\ &= 2\int_{-2}^{-1} e^t \, dt \\ &= 2\left[e^t\right]_{-2}^{-1} \\ &= \frac{2(e-1)}{e^2}. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $t=\sqrt{x}+1$ とおくと，$x=(t-1)^2$．よって

$$dx=2(t-1)\,dt, \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 1 & \to & 2 \end{array}$$

より

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx &= \int_1^2 \sqrt{t}\cdot 2(t-1)\,dt \\ &= 2\int_1^2 (t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})\,dt \\ &= 2\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \\ &= \frac{4}{5}\left(2^{\frac{5}{2}}-1\right)-\frac{4}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right) \\ &= \frac{8}{15}\left(\sqrt{2}+1\right). \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

(1) $(x^2+1)'=2x$ より

$$(\text{与式})=\frac{1}{2}\int (x^2+1)'(x^2+1)^4\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(x^2+1)^5+C=\frac{1}{10}(x^2+1)^5+C \qquad \text{(答)}$$

(2) $(x^2+3)'=2x$ より

$$(\text{与式})=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx=\frac{1}{2}\log(x^2+3)+C \qquad \text{(答)}$$

(3) $(\cos x)'=-\sin x$ より

$$(\text{与式})=-\int (\cos x)'\cos^4 x\,dx=-\frac{1}{5}\cos^5 x\,dx \qquad \text{(答)}$$

(4) $(e^x+1)'=e^x$ より

$$(\text{与式})=\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx=\log(e^x+1)+C \qquad \text{(答)}$$

演習問題 5 − 4

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x^2+1}$　　(4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+4}$

解答・解説

(1) $x=2\sin t$ とおくと

$$dx = 2\cos t\,dt. \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\pi}{6} \end{array}$$

より

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4(1-\sin^2 t)}(2\cos t)dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2t)dt \\ &= 2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) $x=\sin t$ とおくと

$$dx = \cos t\,dt. \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

より

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4} \qquad (\text{答})$$

(3) $x=\tan t$ とおくと

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt. \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\pi}{6} \end{array}$$

より

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6} \qquad (\text{答})$$

(4)

$$(\text{与式}) = \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)^2+3}$$

より，$x-1=\sqrt{3}\tan t$ とおくと

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt. \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & 4 \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

より

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3(1+\tan^2 t)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi \qquad (\text{答})$$

演習問題 5 − 5

次の定積分を求めよ．

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{x^4}{x^3 - 1}\, dx.$$

解答・解説

まず，

$$\frac{x^4}{x^3 - 1} = x + \frac{x}{x^3 - 1}.$$

次に，$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$ であるから，

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

をみたす実数 a，b，c を求める．右辺を通分すると

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3 - 1}$$

これが x の恒等式になるとき[*1]

$$a + b = 0, \quad a - b + c = 1, \quad a - c = 0.$$

これを解くと

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{3}.$$

すなわち

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-x+1}{x^2 + x + 1}.$$

また，右辺の第 2 項は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{-x+1}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

であり，さらに

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

より，

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

[*1] 分数式が恒等式になるように係数を定めるには，このように，未定係数を文字で置き，整理，比較します．

において $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと，

$$\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)}$$

であり，

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta,\qquad \begin{array}{c|ccc} x & -2 & \to & 0 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{3} & \to & \frac{\pi}{6} \end{array}$$

となるから，与えられた式は

$$\int_{-2}^{0}\left(x+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$\begin{aligned}
&=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\log\left(x^2+x+1\right)\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}\left(\tan^2\theta+1\right)}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&=\left(\frac{1}{3}\log|-1|-\frac{1}{6}\log 1\right)-\left\{\frac{1}{2}(-2)^2+\frac{1}{3}\log|-3|-\frac{1}{6}\log 3\right\}+\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta \\
&=-2-\frac{1}{6}\log 3+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

添削課題 **5 − 1**

1 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^{x+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int x\cos 3x\,dx$ (3) $\displaystyle\int x\sin x\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \log(x+1)\,dx$ (5) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ (6) $\displaystyle\int x\sin^2\frac{x}{2}\,dx$

2 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)e^{-x}\,dx.$ (2) $\displaystyle\int_1^{e^7} \log x\,dx.$ (3) $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\log x\,dx.$

解答・解説

1

(1) x を微分，e^{x+1} を積分する．

$$\begin{aligned}\int xe^{x+1}\,dx &= xe^{x+1} - \int 1\cdot e^{x+1}\,dx\\ &= xe^{x+1} - e^{x+1} + C\\ &= (x-1)e^{x+1} + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) x を微分，$\cos 3x$ を積分する．

$$\begin{aligned}\int x\cos 3x\,dx &= x\cdot\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right) - \int 1\cdot\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)dx\\ &= \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) 被積分関数は

$$x\sin x\cos x = \frac{1}{2}x\sin 2x$$

となるから，x を微分，$\sin 2x$ を積分する．

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2}x\sin 2x\,dx &= \frac{1}{2}x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \frac{1}{2}\int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\\ &= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4) $1=(x+1)'$ を積分，$\log(x+1)$ を微分する．

$$\begin{aligned}\int \log(x+1)\,dx &= \int 1\cdot\log(x+1)\,dx\\ &= (x+1)\log(x+1) - \int (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= (x+1)\log(x+1) - \int dx\\ &= (x+1)\log(x+1) - x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(5) $1=x'$ を積分，$(\log x)^2$ を微分する．

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2\,dx &= \int 1\cdot(\log x)^2\,dx\\ &= x(\log x)^2 - \int x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx\\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(6) まず半角公式を用いて次数を下げる．

$$\begin{aligned}\int x\sin^2\frac{x}{2}\,dx &= \int x\frac{1-\cos x}{2}\,dx\\ &= \int\frac{x}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int x\cos x\,dx\\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos x\,dx\end{aligned}$$

次に 2 つめの積分で，x を微分，$\cos x$ を積分すると

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx\\ &= x\sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int x\sin^2\frac{x}{2}\,dx &= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}(x\sin x + \cos x) + C\\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1)　$2x+1$ を微分，e^{-x} を積分する．

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+1)e^{-x}\,dx &= \Big[-(2x+1)e^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 2\cdot\left(-e^{-x}\right)\,dx \\ &= -\left(\frac{3}{e}-1\right)+2\int_0^1 e^{-x}\,dx \\ &= 1-\frac{3}{e}+2\Big[-e^{x}\Big]_0^1 \\ &= 3-\frac{5}{e}. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)　$1=x'$ を積分，$\log x$ を微分する．

$$\begin{aligned}\int_1^{e^7} \log x\,dx &= \int_1^{e^7} x'\cdot\log x\,dx \\ &= [x\log x]_1^{e^7} - \int_1^{e^7} x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= [x\log x - x]_1^{e^7} \\ &= \left(e^7\cdot 7 - e^7\right) - (1\cdot 0 - 1) \\ &= 6e^7+1. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)　$\sqrt{x}$ を積分，$\log x$ を微分する．

$$\begin{aligned}\int_1^{e} \sqrt{x}\log x\,dx &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 0 - \left[\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^e \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9}(e^{\frac{3}{2}}-1) \\ &= \frac{2}{9}e\sqrt{e}+\frac{4}{9}. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

添削課題 **5 − 2**

1　次の不定積分について，[ ] で与えられた置換を行うことで求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx \quad [\,t=x^2-1\,]$　　(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx \quad [\,t=\cos x\,]$

(3) $\displaystyle\int x\sin(2x^2)\,dx \quad [\,t=2x^2\,]$　　(4) $\displaystyle\int xe^{x^2+1}\,dx \quad [\,t=x^2+1\,]$

2　次の定積分について，[ ] で与えられた置換を行うことで求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx \quad [\,t=\sqrt{x+1}\,]$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+2\sqrt{x}}\,dx \quad [\,t=1+2\sqrt{x}\,]$

解答・解説

1

(1) $t=x^2-1$ とおくと $x^2=t+1$ であり，

$$dt = 2x\,dx. \qquad \therefore \quad x\,dx = \frac{1}{2}dt.$$

よって

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx &= \int x\cdot x^2\sqrt{x^2-1}\,dx \\
&= \int \frac{1}{2}(t+1)\sqrt{t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int \left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C \\
&= \frac{1}{5}\left(x^2-1\right)^2\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}+C. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(2) まず

$$\begin{aligned}
\sin^3 x\cos^2 x &= \sin^2 x\cos^2 x\sin x \\
&= (1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin x
\end{aligned}$$

で，$t=\cos x$ とおくと

$$dt = -\sin x\,dx. \qquad \therefore \quad \sin x\,dx = -dt.$$

よって

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x\,dx \\ &= \int (1-t^2)t^2(-1)\,dt \\ &= \int (t^4-t^2)\,dt \\ &= \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + C \\ &= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $t = 2x^2$ とおくと

$$dt = 4x\,dx. \qquad \therefore \quad x\,dx = \frac{1}{4}\,dt.$$

よって

$$\begin{aligned}\int x\sin(2x^2)\,dx &= \int \frac{1}{4}\sin t\,dt \\ &= -\frac{1}{4}\cos t + C \\ &= -\frac{1}{4}\cos(2x^2) + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4) $t = x^2 + 1$ とおくと

$$dt = 2x\,dx. \qquad \therefore \quad x\,dx = \frac{1}{2}\,dt.$$

よって

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2+1}\,dx &= \int \frac{1}{2}e^t\,dt \\ &= \frac{1}{2}e^t + C \\ &= \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1) $t=\sqrt{x+1}$ とおくと $x=t^2-1$．よって

$$dx = 2t\,dt, \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 3 \\ \hline t & 1 & \to & 2 \end{array}$$

より，

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int_1^2 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt \\ &= 2\int_1^2 \left(t^2-1\right)\,dt \\ &= 2\left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3}. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $t=1+2\sqrt{x}$ とおくと $x=\dfrac{1}{4}(t-1)^2$．よって

$$dx = \frac{1}{2}(t-1)\,dt, \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 1 & \to & 3 \end{array}$$

より

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+2\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^3 \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}(t-1)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{5}\left(3^{\frac{5}{2}}-1\right) - \frac{1}{3}(3^{\frac{3}{2}}-1) \\ &= \frac{4}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{15}. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

添削課題 $\mathbf{5-3}$

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9}$

解答・解説

(1) $x=\sin t$ とおくと

$$dx=\cos t\,dt. \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{1}{2} \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\pi}{6} \end{array}$$

より

$$(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt=\frac{\pi}{6} \qquad (\text{答})$$

(2) まず，被積分関数は

$$\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$$

と変形されるから，$x-1=\sin\theta$ とおくと

$$dx=\cos\theta\,d\theta, \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & 2 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

この区間で $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx &= \int_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}. \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

(3) $x=3\tan t$ とおくと

$$dx=\frac{3}{\cos^2 t}\,dt. \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 3 \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

より

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9(1+\tan^2 t)} \cdot \frac{3}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{12} \qquad (\text{答})$$

Lecture 6　積分法 (3)　面積 - 解答

演習問題 6 − 1

次の曲線，直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $y = \sqrt{x+1}$，x 軸，$x = 0$，$x = 1$

(2) $y = e^{-x}$，x 軸，$x = -1$，$x = 1$

(3) $y = \log x$，x 軸，$x = 2$，$x = 3$

(4) $y = 2 - x$，$y = \dfrac{1}{x^2}$

(5) $y = \cos x$，$y = \cos^2 x$　$\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(6) $y = e^x$，$y = e^{3x}$，$y = e^{2-x}$

解答・解説

(1)　求める面積を S とする．

$$S = \int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3} \qquad \text{(答)}$$

(2)　求める面積を S とする．

$$S = \int_{-1}^1 e^{-x}\,dx = -\left[e^{-x}\right]_{-1}^1 = -(e^{-1} - e^1) = e - \frac{1}{e} \qquad \text{(答)}$$

(3)　求める面積を S とする．

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C$$

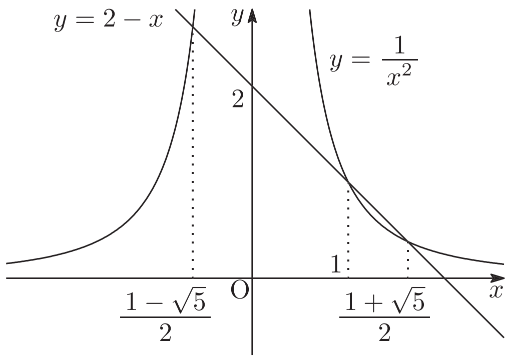
より

$$\begin{aligned} S &= \int_2^3 \log x\,dx \\ &= [x\log x - x]_2^3 \\ &= (3\log 3 - 3) - (2\log 2 - 2) \\ &= 3\log 3 - 2\log 2 - 1 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4)　求める面積を S とする．境界である直線，曲線の交点は

$$2 - x = \frac{1}{x^2} \qquad \therefore \quad x = 1,\ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

位置関係は下図の通り．



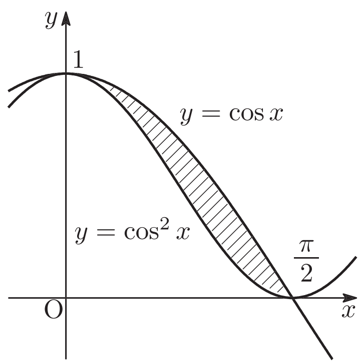
ゆえに，求める面積は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left\{(2-x)-\frac{1}{x^2}\right\} dx \\
&= \left[2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}\right]_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \left(2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)-\left(2-\frac{1}{2}+1\right) \\
&= \frac{5\sqrt{5}-11}{4} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(5) 求める面積を S とする．境界である曲線の交点は

$$\cos x = \cos^2 x \qquad \therefore \quad \cos x = 0,\ 1$$

より，$x=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ で共有点を持つ．$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $\cos x \geqq \cos^2 x$ より



$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x-\cos^2 x\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x-\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\right) dx \\
&= \left[\sin x-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1-\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= 1-\frac{\pi}{4} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

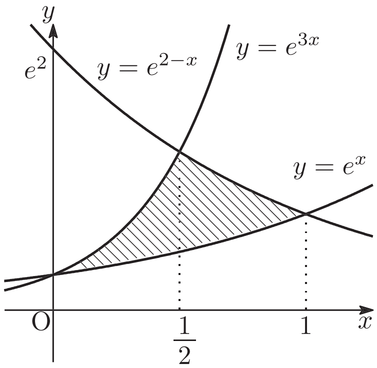
(6) 求める面積を S とする.

境界である曲線 $y=e^{3x}$, $y=e^{2-x}$ の交点は

$$3x=2-x \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{2}$$

また，曲線 $y=e^{x}$, $y=e^{2-x}$ の交点は

$$x=2-x \qquad \therefore \quad x=1$$



ゆえに，求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(e^{3x}-e^{x}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(e^{2-x}-e^{x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}e^{3x}-e^{x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-e^{2-x}-e^{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \frac{1}{3}\left(e^{\frac{3}{2}}-1\right)-\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)-\left(e-e^{\frac{3}{2}}\right)-\left(e-e^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{4}{3}e\sqrt{e}-2e+\frac{2}{3} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

演習問題 6 − 2

xy 平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi), \qquad C_2 : y = \cos\frac{x}{2} \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

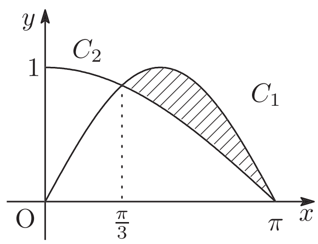
について，次の問いに答えよ．

(1) C_1，C_2 の交点の x 座標を求めよ．

(2) C_1，C_2 の囲む部分の面積を求めよ．

解答・解説

(1) C_1，C_2 の方程式を連立する．



$$\sin x = \cos\frac{x}{2}$$
$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$$
$$2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$
$$\therefore \quad \cos\frac{x}{2} = 0, \ \ \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

よって

$$x = \frac{\pi}{3}, \ \ \pi. \qquad \text{(答)}$$

(2) 問題の図形は上図の斜線部．求める面積を S として

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\sin x - \cos\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \left[-\cos x - 2\sin\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \{-(-1) - 2\} - \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}. \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

演習問題 6 − 3

xy 平面上の曲線 $y = \sin 2x + 2\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

解答・解説

曲線 $y = \sin 2x + 2\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ を $y = f(x)$ とする．

$$f(x) = 2\sin x\cos x + 2\sin x = 2\sin x(\cos x + 1) \geqq 0$$

ゆえに，$0 \leqq x \leqq \pi$ で常に $f(x) \geqq 0$ である．$f(0) = f(\pi) = 0$ であり，$0 < x < \pi$ で $f(x) > 0$ であることとあわせ，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} (\sin 2x + 2\sin x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - 2\cos x\right]_0^{\pi} \\ &= 4 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

演習問題 6 − 4

xy 平面上の曲線

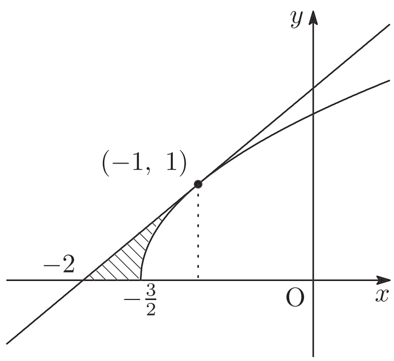
$$C : y = \sqrt{2x+3}$$

と，点 $(-2,\ 0)$ から曲線 C に引いた接線 l について，次の問いに答えよ．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) C，l および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

解答・解説



(1) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ とおく．

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

で，$x = t$ における曲線 C の接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x-t).$$

これが $(-2,\ 0)$ を通るから

$$0 - f(t) = f'(t)(-2-t)$$
$$\therefore \quad f(t) = f'(t)(t+2).$$

よって

$$\sqrt{2t+3} = \frac{1}{\sqrt{2t+3}}(t+2)$$
$$2t+3 = t+2.$$
$$\therefore \quad t = -1.$$

$f(-1) = 1$，$f'(-1) = 1$ であるから，求める接線の方程式は

$$y - (1) = 1 \cdot \{x - (-1)\} \qquad \therefore \quad y = x+2. \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \{(-1)-(-2)\} \cdot 1 - \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \sqrt{2x+3}\,dx \\ &= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} \\ &= \frac{1}{6}. \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

演習問題 6 − 5

曲線 $y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれる部分の面積が曲線 $y=k\sin\dfrac{x}{2}$ によって 2 等分されるとき，k の値を求めよ．

解答・解説

2 曲線の共有点は

$$\sin x = k\sin\frac{x}{2}$$
$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = k\sin\frac{x}{2}$$
$$\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}-k\right)=0$$

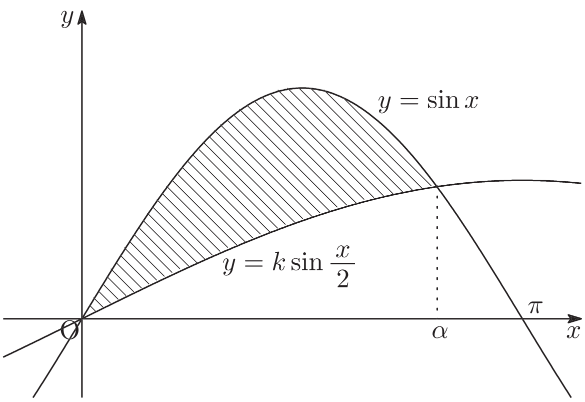
ここで，$0 \leqq \dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $0 \leqq \cos\dfrac{x}{2} \leqq 1$．すなわち

$$0 \leqq \frac{k}{2} \leqq 1 \qquad \therefore \quad 0 \leqq k \leqq 2$$

この範囲の下で

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{k}{2}$$

を満たす x を $x=\alpha$ とすれば，点 $(\alpha, \sin\alpha)$ で曲線 $y=\sin x$, $y=k\sin\dfrac{x}{2}$ は交わる（下図）．



ここで，曲線 $y=\sin x$，x 軸の囲む部分の面積を S とすれば

$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$

ゆえに

$$\int_0^{\alpha}\left(\sin x - k\sin\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot 2 \qquad \cdots ①$$

が成り立つときの実数 k の値を求める．左辺の定積分は

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \left[-\cos x + 2k\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\alpha} \\
&= -(\cos\alpha - 1) + 2k\left(\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right) \\
&= -\cos\alpha + 2k\cos\frac{\alpha}{2} + 1 - 2k \\
&= -\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) + 2k\cos\frac{\alpha}{2} + 1 - 2k \\
&= -2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2k\cos\frac{\alpha}{2} + 2 - 2k \\
&= -2\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 2k\cdot\frac{k}{2} + 2 - 2k \\
&= \frac{k^2}{2} - 2k + 2
\end{aligned}$$

ゆえに，$0 \leqq k \leqq 2$ に注意して，① より

$$\frac{k^2}{2} - 2k + 2 = 1 \qquad \therefore \quad k = 2 - \sqrt{2} \qquad (\text{答})$$

添削課題 6 − 1

(1) 曲線 $y = e^x + x\,(x \geqq 0)$ と直線 $x = 1$，x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) 曲線 $y = \sqrt[3]{x^2}\,(x \geqq 0)$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) $0 \leqq x \leqq \pi$ において，x 軸と曲線 $y = (1+\cos x)\sin x$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(4) 曲線 $y = xe^x$ と x 軸，および 2 直線 $x = -1$，$x = 1$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ．

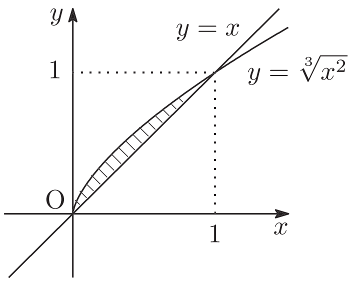
(5) 区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，2 曲線 $y = \sin x$，$y = \cos 2x$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答・解説

(1) 求める面積を S とする．

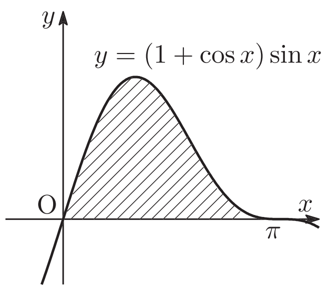
$$S = \int_0^1 (e^x + x)\,dx = \left[e^x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = e - \frac{1}{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める面積を S とする．



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^{\frac{2}{3}} - x)\,dx \\ &= \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) $0 \leqq x \leqq \pi$ において，$y = (1+\cos x)\sin x \geqq 0$ である．ゆえに，求める面積は



$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi (1+\cos x)\sin x dx \\ &= \int_0^\pi \left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) dx \\ &= \left[-\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^\pi \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(-1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= 2 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

注意 6.1

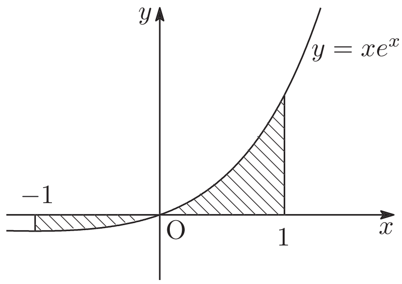
部分積分法により

$$S = -\int_0^{\pi} (1+\cos x)(1+\cos x)' dx = -\left[\frac{1}{2}(1+\cos x)^2\right]_0^{\pi} = 2 \qquad \text{(答)}$$

(4) $e^x > 0$ である．ゆえに，$y = xe^x$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における符号は

$$\begin{cases} -1 \leqq x \leqq 0 \text{ のとき，} y \leqq 0 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき，} y \geqq 0 \end{cases}$$

よって，右図のような位置関係となる．



求める面積の和 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0} (-xe^x)dx + \int_0^1 xe^x dx \\ &= -\left[xe^x\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^x dx + \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= -\frac{1}{e} + \left[e^x\right]_{-1}^{0} + e - \left[e^x\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - (e-1) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

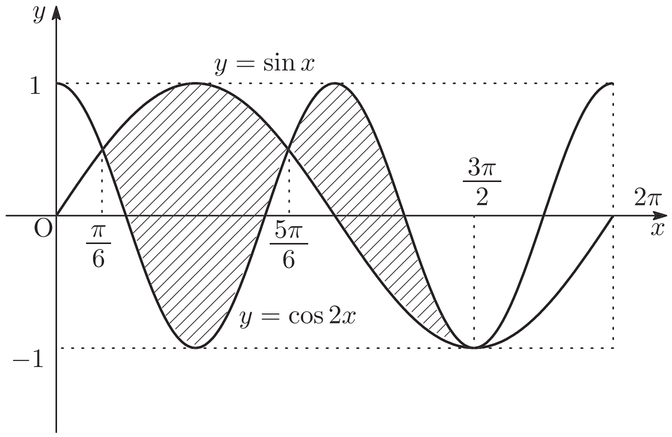
(5) 求める面積を S とする．2 曲線の交点を求める．

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos 2x \\ \sin x &= 1 - 2\sin^2 x \\ 2\sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \\ \sin x &= \frac{1}{2},\ -1 \end{aligned}$$

よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ では

$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$$

で 2 曲線は交わる．したがって，2 曲線の位置関係は下図のようになる．求める面積 S は，図の斜線部分の面積の和となる．



ゆえに

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} (\sin x - \cos 2x)dx + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (\cos 2x - \sin x)dx \\
&= \left[-\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} + \left[\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x\right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{9\sqrt{3}}{4} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

添削課題 6 − 2

座標平面上の曲線 $y = \log x$ の点 $(1, 0)$ における接線を L とする．この曲線と直線 L と直線 $x = e$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．ただし，$\log$ は自然対数である．

解答・解説

$f(x) = \log x$ とおく．$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ より，$f'(1) = 1$．ゆえに，直線 L の方程式は

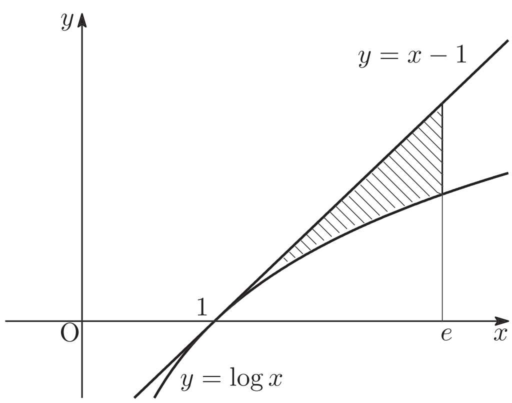
$$y = 1 \cdot (x - 1) \qquad \therefore \quad y = x - 1$$

求める面積を S とする．部分積分法により

$$\int \log x\,dx = \int (x)' \log x\,dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C$$

であることから

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \{(x-1) - \log x\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 - (x\log x - x)\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}(e-1)^2 - \{(e-e) - (0-1)\} \\ &= \frac{1}{2}(e-1)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$



添削課題 $\mathbf{6-3}$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で 2 つの曲線 $y=\sin x$, $y=k\cos x$ を考える．ただし，$k>0$ とする．この 2 つの曲線の交点の x 座標を $\alpha, \beta\,(0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi)$ とし，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲でこの 2 つの曲線に囲まれた図形の面積を S とする．

(1) k と β を α を用いて表せ．

(2) S を k を用いて表せ．

(3) $S=4$ のとき，$\alpha \leqq x \leqq \theta$ の範囲でこの 2 つの曲線および直線 $x=\theta$ で囲まれた図形の面積が 2 となるような θ の値を求めよ．

解答・解説

(1) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で

$$\sin x = k\cos x$$

の解を求める．$x=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$ はこの方程式の解でない．すなわち，$\cos x \neq 0$ より

$$\tan x = k$$

この式の解が $x=\alpha, \beta$ である．

$\tan x$ の周期性から，　$\beta=\alpha+\pi$　(答)

(2) (1) より

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}, \quad \sin\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$$

であることに注意する．求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta} (\sin x - k\cos x)dx \\
&= \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} (\sin x - k\cos x)dx \\
&= \Big[-\cos x - k\sin x\Big]_{\alpha}^{\alpha+\pi} \\
&= -(-\cos\alpha - \cos\alpha) - k(-\sin\alpha - \sin\alpha) \\
&= 2(\cos\alpha + k\sin\alpha) \\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} + k\cdot\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right) \\
&= 2\sqrt{k^2+1} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3) $S=4$ のとき

$$2\sqrt{k^2+1}=4 \qquad \therefore \quad k=\sqrt{3}$$

である．すなわち

$$(\cos\alpha,\, \sin\alpha)=\left(\frac{1}{2},\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \therefore \quad \alpha=\frac{\pi}{3}$$

すなわち，$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{4}{3}\pi$ のもとで

$$\begin{aligned} T &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\theta}(\sin x-\sqrt{3}\cos x)dx \\ &= 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\theta}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)dx \\ &= 2-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

ゆえに，$T=2$ となるのは

$$\begin{aligned} 2-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) &= 2 \\ \cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) &= 0 \\ \theta-\frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{2} \\ \therefore \quad \theta &= \frac{5}{6}\pi \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

Lecture 7　積分法 (4)　回転体の体積 - 解答

演習問題 7 − 1

次の問いにそれぞれ答えよ．

(1) 放物線 $y = 2 - x^2$ と x 軸で囲まれる部分を，x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

(2) 曲線 $y = \tan x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ と直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$，および x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

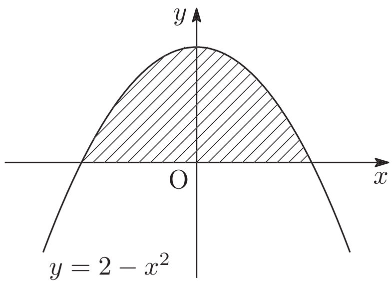
(3) 曲線 $y = \dfrac{\log x}{x}$ と直線 $x = e$，および x 軸で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

(4) 曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = \dfrac{x}{2}$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

(5) 曲線 $y = e^{-x}$ と 2 直線 $y = e$，$y = e^2$ および y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

解答・解説

(1) 求める体積を V とする．問題の体積を V とすると，V は右図の斜線部を x 軸の周りに 1 回転して得られる図形の体積である．y 軸に関する対称性から



$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}V &= \int_0^{\sqrt{2}} \pi \left(2 - x^2\right)^2 dx \\
&= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(x^4 - 4x^2 + 4\right) dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{32\sqrt{2}}{15}\pi
\end{aligned}
$$

ゆえに，$V = \dfrac{64\sqrt{2}}{15}\pi$　　(答)

(2) 求める体積を V とする．

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \pi \left[\tan x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi - \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{(答)}$$

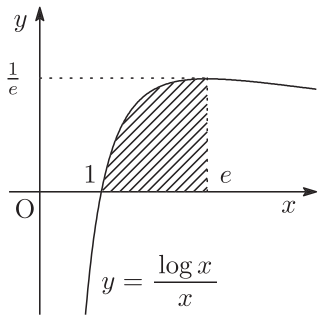
(3) 求める体積を V とする．$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

より，$x=e$ で極大値をとる．また

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

$y=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフと x 軸との交点は，$x=1$ のみ．よって $y=f(x)$ のグラフは図のようになり，求める立体の体積は，図の斜線部を x 軸の周りに 1 回転させたものである．



体積を V とすると

$$V=\int_1^e \pi\left\{f(x)\right\}^2dx=\pi\int_1^e(\log x)^2x^{-2}dx$$

部分積分法により

$$\int_1^e(\log x)^2x^{-2}dx=\left[-x^{-1}(\log x)^2\right]_1^e-\int_1^e\left(-x^{-1}\right)\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=-\frac{1}{e}+2\int_1^e x^{-2}\log x dx$$

さらに

$$\int_1^e x^{-2}\log x dx=\left[-x^{-1}\log x\right]_1^e-\int_1^e\left(-x^{-1}\cdot\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{e}+\int_1^e x^{-2}dx$$
$$=-\frac{1}{e}+\left[-x^{-1}\right]_1^e=1-\frac{2}{e}$$

ゆえに求める体積は

$$V=\pi\left\{-\frac{1}{e}+2\left(1-\frac{2}{e}\right)\right\}=\pi\left(2-\frac{5}{e}\right) \qquad \text{(答)}$$

(4) 求める体積を V とする．境界である直線，曲線の交点は

$$\sqrt{x}=\frac{x}{2} \qquad \therefore x=0,\ 4$$

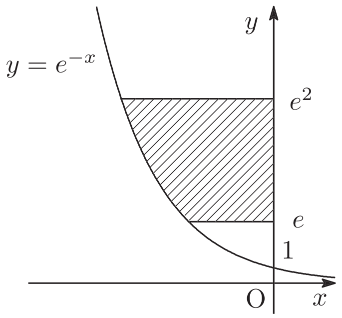
ゆえに，求める体積は

$$\begin{aligned} V&=\int_0^4 \pi\left\{(\sqrt{x})^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right\}dx \\ &=\pi\int_0^4\left(x-\frac{1}{4}x^2\right)dx \\ &=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^3\right]_0^4 \\ &=\frac{8}{3}\pi \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(5) 求める体積を V とする．
与えられた関数は

$$y=e^{-x} \iff x=-\log y$$

ここで求める体積は，図の斜線部を y 軸の周りに 1 回転させた立体の体積である．それを V とすると



$$\begin{aligned} V&=\int_e^{e^2}\pi(-\log y)^2dy \\ &=\pi\int_e^{e^2}(y)'(\log y)^2\,dy \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2}(y)'(\log y)^2\,dy&=\left[y(\log y)^2\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}y\cdot 2\log y\cdot\frac{1}{y}dy \\ &=\left(4e^2-e\right)-2\int_e^{e^2}\log y dy \\ &=4e^2-e-2\left[y\log y-y\right]_e^{e^2} \\ &=4e^2-e-2\left(2e^2-e^2\right) \\ &=2e^2-e \end{aligned}$$

ゆえに

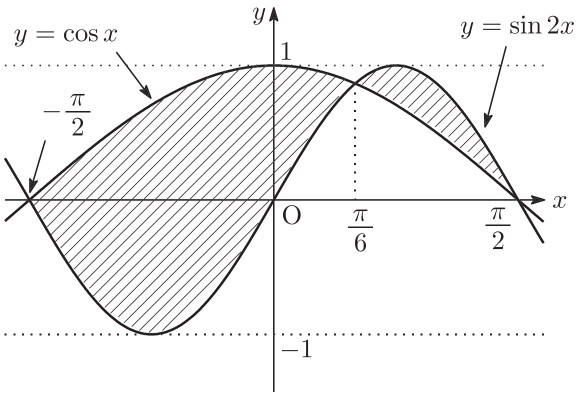
$$V=\pi\left(2e^2-e\right) \qquad \text{(答)}$$

演習問題 7 − 2

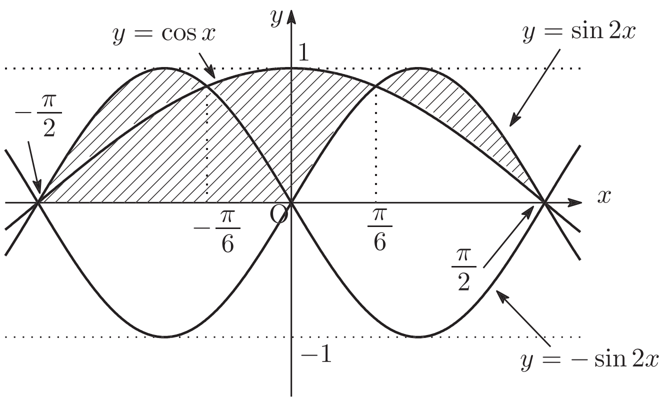
$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，2 曲線 $y=\cos x$, $y=\sin 2x$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解答・解説

x 軸の周りに回転させる領域は下図．



この領域は回転軸である x 軸を跨いでいるので，下図の斜線部の領域を x 軸周りに回転してできる図形と，体積を求める図形は同じ．



y 軸に関する対称性に注意して，求める立体の体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \pi\cos^2 x\,dx + 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\sin^2 2x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \pi\sin^2 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\cos^2 x\,dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos^2 x - \sin^2 2x)\,dx + \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2 2x - \cos^2 x)\,dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 + \cos 2x - \frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx + \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 4x - \frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx \\
&= \pi\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \pi\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

演習問題 7 − 3

$C: y=\cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，曲線 C と x 軸，y 軸とで囲まれた部分を，y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

解答・解説

$$V=\int_0^1 \pi x^2 dy$$

において，$y=\cos x$ と置換すると

$$dy=-\sin x dx,$$

y	0	$\to$	1
x	$\dfrac{\pi}{2}$	$\to$	0

であるから

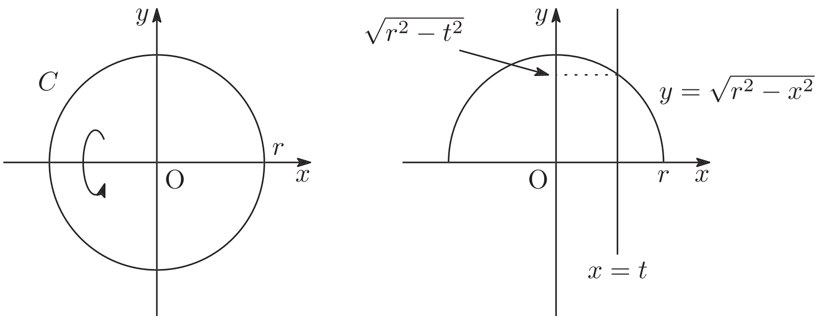
$$\begin{aligned}
V &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi x^2 \cdot (-\sin x) dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx \\
&= \pi \left\{ \Big[x^2(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x(-\cos x) dx \right\} \\
&= \pi \left\{ 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx \right\} \quad \cdots\cdots ① \\
&= 2\pi \left\{ \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right\} \\
&= 2\pi \left(\frac{\pi}{2}-1\right) \\
&= \pi(\pi-2)
\end{aligned}$$

演習問題 7 − 4

半径 r の球面を S とする．S の体積 V は，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを示せ．

解答・解説

原点を中心とする，半径 r の円を C とする．C を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体が，問題の球面 S である．



S の，平面 $x=t$ $(-r \leqq t \leqq r)$ による断面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=\pi\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)^2=\pi\left(r^2-t^2\right)$$

であるから，これが t の偶関数であることに気をつけて，求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} S(t)\,dt \\ \frac{V}{2\pi} &= \int_{0}^{r}\left(r^2-t^2\right)\,dt \\ &= \left[r^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^r=\frac{2}{3}r^3. \end{aligned}$$

以上より，

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3. \qquad \text{〔証明終〕}$$

添削課題 **7 − 1**

次の問いにそれぞれ答えよ．

(1) $y = x^2\sqrt{x}$，$x = 2$，x 軸の囲む部分を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

(2) $y = e^{2x}$，$x = 1$，$x = 2$，x 軸の囲む部分を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

(3) 曲線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(4) 曲線 $y = \sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，直線 $y = x$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ に囲まれた部分を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(5) 曲線 $y = e^x$ の $1 \leqq y \leqq e$ の部分を，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(6) $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，曲線 $y = \cos x$ と直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれた部分を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解答・解説

(1) 求める体積を V とする．

$$V = \int_0^2 \pi(x^2\sqrt{x})^2\,dx = \pi\int_0^2 x^5\,dx = \frac{\pi}{6}\Big[x^6\Big]_0^2 = \frac{32}{3}\pi \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める体積を V とする．

$$V = \int_1^2 \pi(e^{2x})^2\,dx = \pi\int_1^2 e^{4x}\,dx = \frac{\pi}{4}\Big[e^{4x}\Big]_1^2 = \frac{e^8 - e^4}{4}\pi \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める体積を V とする．題意より，$V = \displaystyle\int_0^1 \pi y^2 dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ である．$x = \tan\theta$ とおくと

$$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

ゆえに

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1d\theta = \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{(答)}$$

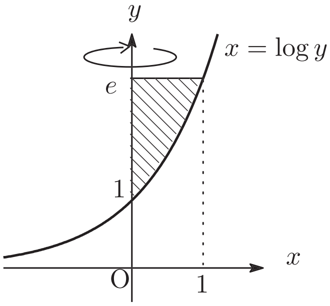
(4) 求める体積を V とする．

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(x^2 - \sin^2 x)\,dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - \frac{1-\cos 2x}{2}\right)\,dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\right)\,dx \\
&= \pi\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right\} \\
&= \frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(5) 求める体積を V とする．

$y = e^x \iff x = \log y$ であるから

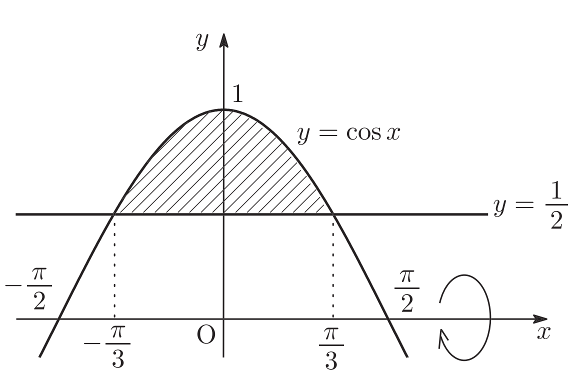
$$V = \int_1^e \pi x^2 dy = \pi\int_1^e (\log y)^2 dy$$



部分積分法により

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\left\{\left[y(\log y)^2\right]_1^e - \int_1^e y\cdot 2\log y\cdot\frac{1}{y}dy\right\} \\
&= \pi\left(e - 2\int_1^e \log y\,dy\right) \\
&= \pi\left(e - 2\left[y\log y - y\right]_1^e\right) \\
&= \pi(e-2) \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(6) $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，グラフの位置関係は下図の通り．



対称性に注意して，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= 2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi\cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx\right\} \quad \cdots ① \\
&= 2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4}dx\right) \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\right)dx \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

注意 7.1

① の後者の積分は，底面の半径が $\dfrac{1}{2}$，高さ $\dfrac{\pi}{3}$ の円柱の体積を表す．

添削課題 $\mathbf{7-2}$

不等式

$$x^2-2 \leqq y \leqq x$$

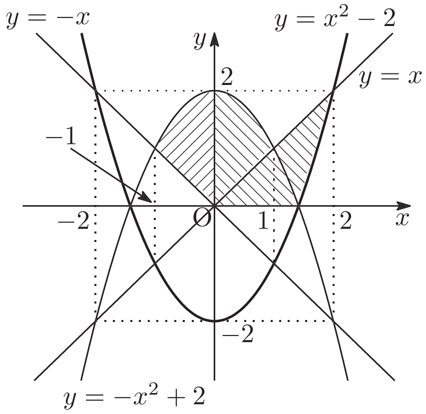
の表す領域 D を，x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

解答・解説

領域 D は回転軸をまたぐ．

ゆえに，体積を求める立体は，D のうち $y \leqq 0$ の部分を x 軸について折り返してできる右図の斜線部分を，x 軸のまわりに回転させてできる立体と同じ．

折り返した部分の境界は，$y=-x^2+2$, $y=-x$ であることに注意する．



求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^{1}(-x^2+2)^2\,dx-\pi\int_{-1}^{0}(-x)^2\,dx+\pi\int_{1}^{2}x^2\,dx-\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^2-2)^2\,dx \\
&= 2\pi\int_{0}^{1}(x^4-4x^2+4)\,dx-\pi\int_{-1}^{0}(-x)^2\,dx+\pi\int_{1}^{2}x^2\,dx-\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^4-4x^2+4)\,dx \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1-\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2-\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_{\sqrt{2}}^{2} \\
&= \frac{60+32\sqrt{2}}{15}\pi \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

添削課題 **7 − 3**

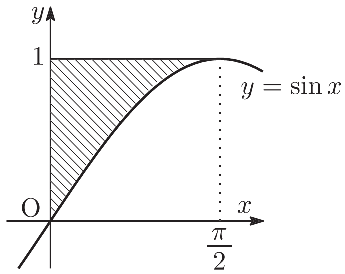
曲線 $y = \sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，直線 $y = 1$，y 軸の囲む部分を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

解答・解説

y 軸まわりに回転させる部分

$$\sin x \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

は右図斜線部.



ゆえに，求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^1 x^2\, dy$$

と表される．ここで，$y = \sin x$ から

$$dy = \cos x dx$$

ゆえに

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx \qquad \cdots ①$$

ここで，部分積分法により

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x\, dx &= \int x^2 (\sin x)'\, dx \\
&= x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx \\
&= x^2 \sin x - 2\int x(-\cos x)'\, dx \\
&= x^2 \sin x - 2(-x\cos x - \int (-\cos x)\, dx) \\
&= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\, dx \\
&= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C
\end{aligned}$$

である．ゆえに，① より

$$\begin{aligned} V &= \pi\Big[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 1 - 2\cdot 1\right\} \\ &= \frac{\pi^3}{4} - 2\pi \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

M2JD

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号		氏　名	