M1T

本科 2 期 10 月度

# 解答

Ｚ会東大進学教室

# 高 1 難関大数学

## １７章　ベクトル（４）

### 問題

【1】求める直線上の点を P$(x,\ y)$ とし，点 A，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{p}$ とする．またベクトルの成分を縦書きで表示する．

(1) 求める直線のベクトル方程式は，$t$ を実数として

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+4t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = 1 - 3t & \cdots ① \\ y = 2 + 4t & \cdots ② \end{cases}$$

① × 4 + ② × 3 より $t$ を消去すると

$\boldsymbol{4x + 3y = 10}$　　(答)

(2) 求める直線は点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$t$ を実数として

$$\vec{p} = \vec{a} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+7t \\ -1+4t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = -3 + 7t & \cdots ③ \\ y = -1 + 4t & \cdots ④ \end{cases}$$

③ × 4 − ④ × 7 より $t$ を消去すると

$\boldsymbol{4x - 7y = -5}$　　(答)

(3) 求める直線は点 A を通り，$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする直線であるから，

$$\begin{aligned}\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\vec{n}&=0\\ \begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}&=0\\ 3(x-3)-2y&=0\end{aligned}$$

よって求める直線は

$\boldsymbol{3x-2y=9}$　　(答)

【2】 求める円周上の点を P$(x,\ y)$，P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする．

(1) $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ とすると，

$$\left|\vec{p}-\vec{c}\right|=4 \quad\Longleftrightarrow\quad \left|\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}\right|=4$$

両辺を 2 乗して，求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-3)^2=16}$　　(答)

(2) 求める円の中心を C$(\vec{c})$ とすると，C は AB の中点であるから

$$\begin{aligned}\vec{c}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\}\\ &=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

また半径を $r$ とすると

$$\begin{aligned}r&=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\\ &=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\\ &=\left|\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right|\\ &=\left|\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right|\\ &=\sqrt{5}\end{aligned}$$

ゆえに求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=5}$　　(答)

<別解>

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ とすると，円周上の点 P(ただし，P$\neq$ A，P$\neq$ B) に対しAP $\perp$ BP であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$

となる．これは点 P が点 A または点 B と一致するときにも成立する．ゆえに

$$\begin{aligned}\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right)&=0\\ \begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-4\\y-1\end{pmatrix}&=0\\ (x-2)(x-4)+(y+3)(y-1)&=0\\ x^2-6x+y^2+2y+5&=0\end{aligned}$$

ゆえに求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=5} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める円の半径を $r$ とすると，

$$r=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2-1\\5-6\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{10}$$

ゆえに $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ として

$$\begin{aligned}\left|\vec{p}-\vec{c}\right|&=\sqrt{10}\\ \left|\begin{pmatrix}x+2\\y-5\end{pmatrix}\right|&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

よって求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-5)^2=10} \qquad \text{(答)}$$

【3】原点を O とする．

(1) $\vec{p} \neq \vec{a}$ のとき，OB⊥AP である．また $\vec{p}=\vec{a}$ のとき，点 P は点 A に一致する．
よって点 P は，次の図形上の点である．(図 1 参照)

**点 A を通り，直線 OB に垂直な直線**　　(答)

(2) $\vec{p} \neq \vec{0}$ のとき AB⊥OP である．また $\vec{p}=\vec{0}$ のとき，点 P は点 O に一致するから，
点 P は，次の図形上の点である．(図 2 参照)

**点 O を通り，直線 AB に垂直な直線**　　(答)

(3) $\vec{p} \neq \vec{c}$ のとき，AB⊥PC である．また $\vec{p}=\vec{c}$ のとき，点 P は点 C に一致する．
よって点 P は，次の図形上の点である．(図 3 参照)

**点 C を通り，直線 AB に垂直な直線**　　(答)

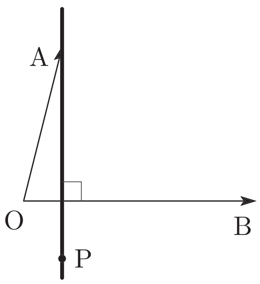
(4) $\vec{p} \neq \vec{a}$ かつ $\vec{p} \neq \vec{b}$ のとき，AP ⊥ BP，すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\vec{p}-\vec{a}\right) \cdot \left(\vec{p}-\vec{b}\right) = 0$$

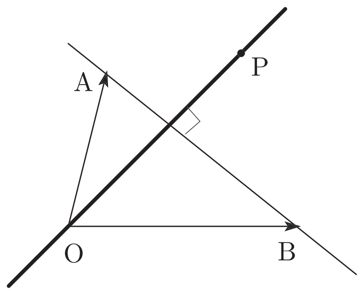
である．$\vec{p}=\vec{a}$ または $\vec{p}=\vec{b}$ のときも上式はみたされる．ゆえに点 P は，次の図形上の点である．(図 4 参照)

**線分 AB を直径とする円周**　　(答)

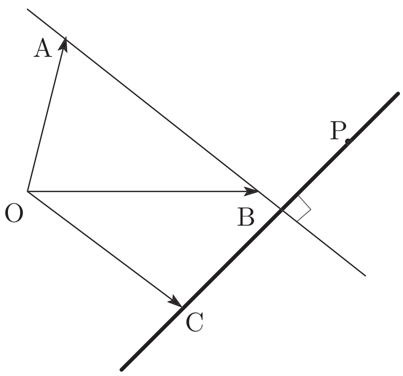
〔図 1〕



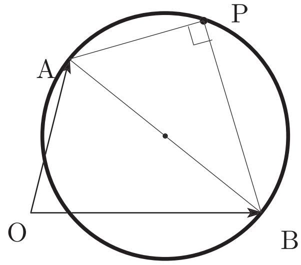

〔図 2〕




〔図 3〕




〔図 4〕



【4】(1) $l_1$ の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ であるから，$t$ を実数として

$$l_1 \ : \ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+t\\t\end{pmatrix}$$

また $l_2$ は 2 点 A(0, 1)，B(2, $-$3) を通るから，$s$ を実数として

$$l_2 \ : \ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1-s)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2s\\1-4s\end{pmatrix}$$

以上より，

$$\begin{cases} l_1 \ : \ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2+t}\\\boldsymbol{t}\end{pmatrix} \\ l_2 \ : \ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2s}\\\boldsymbol{1-4s}\end{pmatrix}\end{cases} \qquad (s,\ t \text{ は実数}) \qquad (\text{答})$$

(2) $l_1$，$l_2$ を連立して

$$\begin{cases} 2+t=2s & \cdots ① \\ t=1-4s & \cdots ② \end{cases}$$

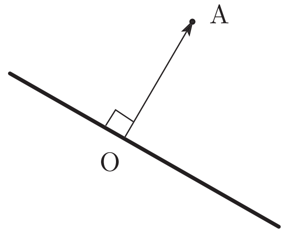
これを解いて，

$$s=\frac{1}{2},\quad t=-1$$

$l_1$ の方程式に代入して，求める交点は

$$\boldsymbol{(1,\ -1)} \qquad (\text{答})$$

【5】(1) 与式の両辺を 2 乗して



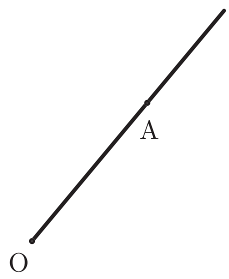

$$\left|\vec{p}+2\vec{a}\right|^2=\left|\vec{p}-2\vec{a}\right|^2$$
$$\left|\vec{p}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{p}+4\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{p}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{p}+4\left|\vec{a}\right|^2$$
$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{p}=0$$

よって，$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき OA ⊥ OP である．
また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも，この式はみたされる．
ゆえに点 P は

**点 O を通り，直線 OA に垂直な直線**　　(答)

上の点である．

(2) $\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を $\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると




$$\vec{a}\cdot\vec{p}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta$$

であるから

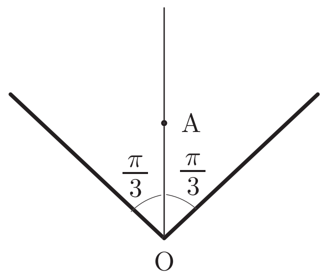
$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$
$$\cos\theta=1\qquad\therefore\ \theta=0$$

となる．また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも与式はみたされ，このとき点 P は点 O に一致する．よって点 P は

**半直線 OA**　　(答)

上の点である．

(3) $\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を $\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると




$$2\vec{a}\cdot\vec{p}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$
$$2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$
$$\cos\theta=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$$

である．
また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも与式はみたされ，このとき点 P は点 O に一致する．
したがって，点 P は

**半直線 OA と $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ の角をなす半直線**　　(答)

上の点である．

【6】$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

ゆえに三角形 ABC は，

$$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$$

の直角三角形である．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

より，点 A を始点として変形すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ に注意して整理すると

$$3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|^2=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

ゆえに

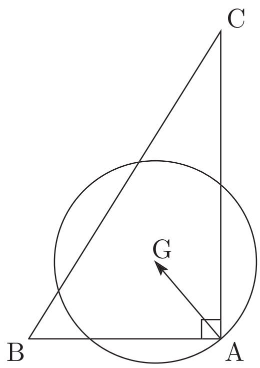
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$$

三角形 ABC の重心を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ より，上式は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|$$

ゆえに点 P は，

**三角形 ABC の重心 G を中心とし，**
**半径 AG の円周上の点．** (答)



【7】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ である．これが直線 $l$ の方向ベクトルであるから，直線 $l$ のベクトル方程式は $s$ を実数として

$$l:\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3s\\4-s\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

一方，A(3, 2)，B(−2, 7) を通る直線 $m$ の方向ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$$

であるから，$m$ のベクトル方程式は，$t$ を実数として

$$m:\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-5t\\2+5t\end{pmatrix}\quad\cdots②$$

交点においては $\vec{p}=\vec{q}$ であるから

$$\begin{cases}1+3s=3-5t\\4-s=2+5t\end{cases}$$

これを解くと，

$$(s,\ t)=\left(0,\ \frac{2}{5}\right)$$

① に代入して，求める交点は

**(1, 4)**　　**(答)**

(2) 直線 $n$ のベクトル方程式を求める．
A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を 3 頂点とする三角形の重心を G($\vec{g}$) とすると

$$\vec{g}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

より，

$$\vec{g}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3+2+4\\0+5+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

また $n$ の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ であるから，$n$ 上の点を P($\vec{p}$) とすると，直線 $n$ のベクトル方程式は $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ として

$$n:\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\3-t\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

一方，D(−1, 3)，E(1, 9) とすると，D($\vec{d}$)，E($\vec{e}$) を直径の両端とする円 $C$ の中心の位置ベクトルは

$$\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+1\\3+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$$

である．また円 $C$ の直径は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(9-3)^2}=2\sqrt{10}$$

であるから，半径を $r$ とすると

$$r = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$$

円周上の点を $\mathrm{Q}(\vec{q})$ とすれば，$\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{10}$$
$$x^2 + (y-6)^2 = 10 \quad \cdots ②$$

交点において $\vec{p} = \vec{q}$ であるから，$x = 2t+1$，$y = -t+3$ を ② に代入すると，

$$\begin{aligned} (2t+1)^2 + (-t+3-6)^2 &= 10 \\ t(t+2) &= 0 \\ t &= 0,\ -2 \end{aligned}$$

① に代入して，求める交点は

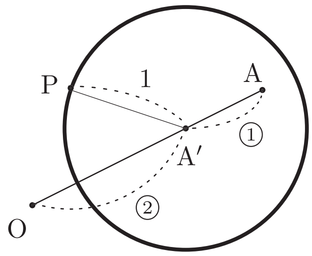
$t = 0$ のとき　**(1, 3)**　　(答)
$t = -2$ のとき　**(−3, 5)**　　(答)

【8】原点を O とする.

(1)

$$\left|3\left(\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)\right|=3$$

$$\left|\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}\right|=1$$




よって，線分 OA を 2: 1 に内分する点を A′ とすると，点 P は

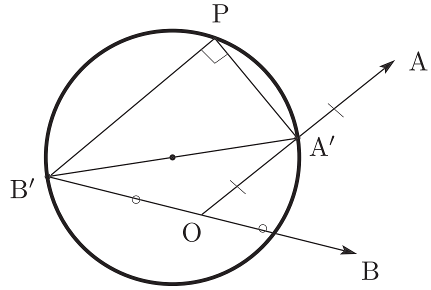
**点 A′を中心とする半径 1 の円周** (答)

上の点である.

(2)

$$2\left(\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot(\vec{p}+\vec{b})=0$$

$$\left(\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\{\vec{p}-(-\vec{b})\}=0$$




$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=-\vec{b}$ とすると，$\mathrm{A'P}\perp\mathrm{B'P}$ である.

また，点 P が A′ または B′ と一致するときも上式はみたされる.

ゆえに線分 OA の中点を A′，O に関して B と対称な点を B′ とすると，点 P は

**線分 A′B′を直径とする円周上** (答)

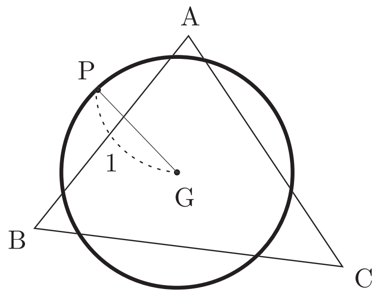
の点である.

(3)

$$\left|(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})\right|=3$$

$$\left|3\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|=3$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=1$$




ここで，△ABC の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$ とすると

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

であるから

$$\left|\vec{p}-\vec{g}\right|=1 \qquad \therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{GP}}\right|=1$$

よって，点 P は

**△ABC の重心 G を中心とする半径 1 の円周上** (答)

の点である.

## 添削課題

【1】(1) 直線上の点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ -3t+2 \end{pmatrix} \qquad (t\text{ は任意の実数})$$

したがって，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2t - 1} \\ \boldsymbol{y = -3t + 2} \end{cases} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ は任意の実数)} \qquad (答)$$

これから，$t$ を消去すると，

$$y = -3 \cdot \frac{x+1}{2} + 2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{3x + 2y - 1 = 0} \qquad (答)$$

(2) 直線上の点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t+2 \end{pmatrix} \quad (t\text{ は任意の実数})$$

したがって，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2t + 1} \\ \boldsymbol{y = -t + 2} \end{cases} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ は任意の実数)} \qquad (答)$$

これから，$t$ を消去すると，

$$x = 2(2-y) + 1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x + 2y - 5 = 0} \qquad (答)$$

(3) 求める直線の方向ベクトルを $\vec{d} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ($u$，$v$ は実数) とすると，ベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直であるから

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore\ -2u + v = 0$$

をみたす．このうち，求める直線の方向ベクトルのひとつとして $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を選ぶと，直線上の点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 2t+3 \end{pmatrix} \quad (t\text{ は任意の実数})$$

したがって，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = t + 2} \\ \boldsymbol{y = 2t + 3} \end{cases} \qquad \textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ は任意の実数)} \qquad \text{(答)}$$

これから，$t$ を消去すると，

$$y = 2(x-2) + 3 \qquad \therefore\ \boldsymbol{2x - y - 1 = 0} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 円周上の点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\left| \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{3}$$

したがって，両辺を 2 乗して

$$\boldsymbol{(x-3)^2 + (y-2)^2 = 3} \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める円の中心の座標は，

$$\left( \frac{1+3}{2}, \frac{4+0}{2} \right) = (2,\ 2)$$

求める円の半径は，

$$\frac{\sqrt{(1-3)^2 + (4-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

となるから，円周上の点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\left| \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$$

$$\therefore\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{5}$$

したがって，両辺を 2 乗して，

$$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $$(3\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{a}=0 \iff 3\left(\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0 \quad\cdots①$$

OA を $1:2$ に内分する点を $\mathrm{A}'$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$ であり，① は，

$$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

よって，点 P は

**OA を 1 : 2 に内分する点を通り, OA に垂直な直線上に存在.** (答)

(2) 両辺を 2 乗して，

$$\begin{aligned}\left|\vec{p}-\vec{a}\right|^2=\left|2\vec{p}-\vec{a}\right|^2 &\iff 3\left|\vec{p}\right|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}=0\\ &\iff 3\left|\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{3}\left|\vec{a}\right|^2\\ &\iff \left|\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{a}\right|=\frac{1}{3}\left|\vec{a}\right|\end{aligned}$$

よって，点 P は，

**OA を 1 : 2 に内分する点を中心とし，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$OA の円周上に存在.** (答)

【4】直線 $\ell$, $m$ 上の任意の点をそれぞれ $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$, $\mathrm{Q}(\overrightarrow{q})$ とすると

$$\overrightarrow{p}=(2+t,\ 5+t),\ \overrightarrow{q}=(-1+2s,\ 3+s)\quad(t,\ s:\text{実数})$$

直線 $\ell$ と $m$ の交点において

$$\begin{cases}2+t=-1+2s\\ 5+t=3+s\end{cases}\qquad\therefore\quad s=1,\quad t=-1$$

したがって，$\ell$ と $m$ の交点の座標は **(1, 4)** (答)

## 問題

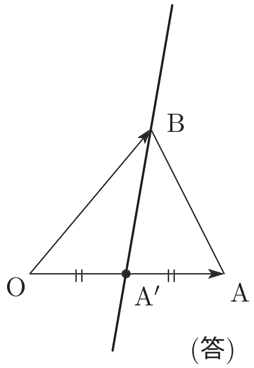
【1】(1) $s' = 2s$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad s' + t = 1$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad s' + t = 1\\ &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\end{aligned}$$

ゆえに点 P は直線 A$'$B 上. (右図)




(答)

(2) $s + t = 2$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$ より

$$\frac{s}{2} + \frac{t}{2} = 1, \quad \frac{s}{2} \geqq 0, \quad \frac{t}{2} \geqq 0$$

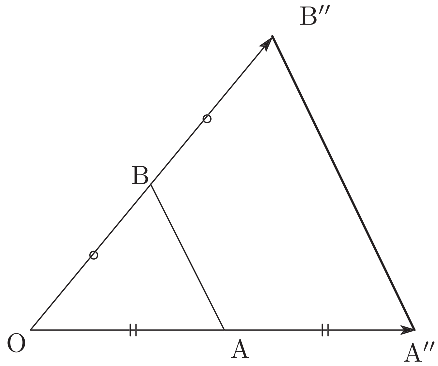
$s'' = \dfrac{s}{2}$, $t'' = \dfrac{t}{2}$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s''\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + t''\left(2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA''}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB''}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと,
$s'' = 1 - t''$ とから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t'')\overrightarrow{\mathrm{OA''}} + t''\overrightarrow{\mathrm{OB''}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA''}} + t''\overrightarrow{\mathrm{A''B''}}\end{aligned}$$

$s'' = 1 - t'' \geqq 0$ より $0 \leqq t'' \leqq 1$.
ゆえに点 P は線分 A$''$B$''$ 上. (右図)

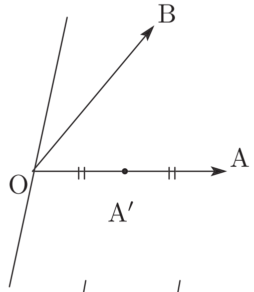



(答)

(3) $2s+t=k$ とおく．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおく．

(i) $k=0$ のとき，$2s=-t$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=-t\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)\\&=t\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\end{aligned}$$



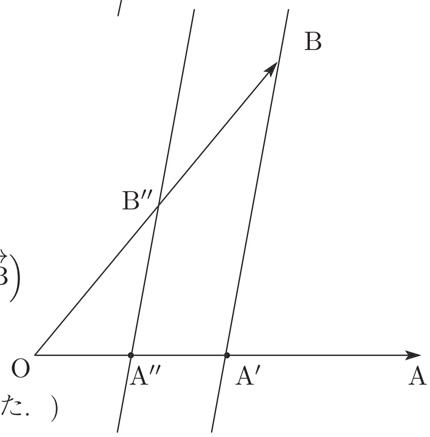

ゆえに点 P は O を通り A′B に平行な直線上を動く．(右図)

(ii) $0<k\leqq 1$ のとき，$2s+t=k$ の両辺を $k$ で割って

$$\frac{2s}{k}+\frac{t}{k}=1$$

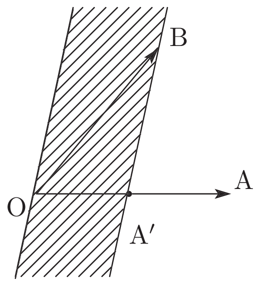
ここで，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{2s}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)+\frac{t}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\frac{2s}{k}\overrightarrow{\mathrm{OA''}}+\frac{t}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB''}}\end{aligned}$$




($\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおいた．)
よって，点 P は直線 A″B″ 上を動く．
ここで $k$ を $0<k\leqq 1$ の範囲で動かすと，直線 A″B″ は A′B と平行に移動する．

以上より，点 P の存在する領域は下図の斜線部（境界含む）．




(答)

(4) $2s+t=k$ とおく.

(i) $k=0$ のとき,

$$2s+t=0,\quad s \geqq 0,\quad t \geqq 0 \text{ より } s=t=0$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$. すなわち P は O と一致する.

(ii) $0<k \leqq 1$ のとき,

(2) と同様に

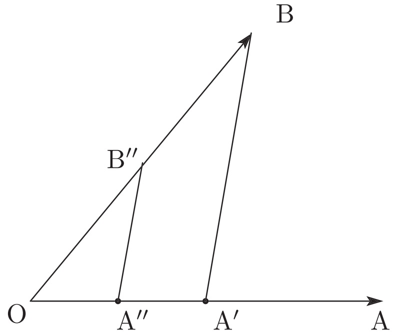
$$\frac{2s}{k}+\frac{t}{k}=1$$

$\dfrac{2s}{k}=1-\dfrac{t}{k} \geqq 0$ である から

$$0 \leqq \frac{t}{k} \leqq 1$$

同様に,

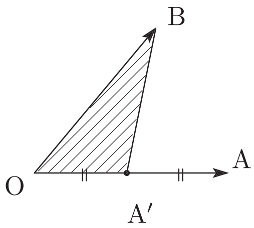
$$0 \leqq \frac{2s}{k} \leqq 1$$




このとき点 P は図の線分 A″B″ 上を動く. ($\because$ (3))

次に $k$ を動かすと, 線分 A″B″ は線分 A′B に平行に移動する. ($\because$ (3))

以上より, 求める領域は下図の斜線部（境界含む）




(答)

【2】

> ポイント　（ベクトルの和）$=\vec{0}$ の扱い方その (1)
>
> 始点を A にそろえ，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表す.

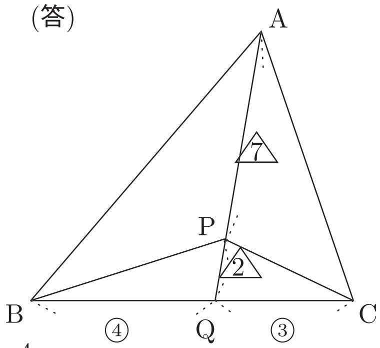
(1)
$$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0} \quad \cdots(*)$$

において始点を A にそろえ，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表すと

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad -2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+4\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)=\vec{0}\\
&\iff \quad -9\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}-4\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\
&\iff \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}\\
&\iff \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}
\end{aligned}$$

ゆえに，辺 BC を 4: 3 に内分する点を Q とすると，

**P は線分 AQ を 7: 2 に内分する点**　　(答)




(2) △ABC の面積を $S$ とすると，

$$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{2}{9}S$$
$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{3}{7}\times\frac{7}{9}\times S=\frac{3}{9}S$$
$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{4}{7}\times\frac{7}{9}\times S=\frac{4}{9}S$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}&=\frac{2}{9}S:\frac{3}{9}S:\frac{4}{9}S\\
&=\mathbf{2:3:4}
\end{aligned}$$
(答)

【3】

**ポイント** (ベクトルの和) $= \vec{0}$ **の扱い方その** (2)

1つを移項し，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1$ を利用して他の2つの内積を求める．

(1) 点Oは△ABCの外心であるから

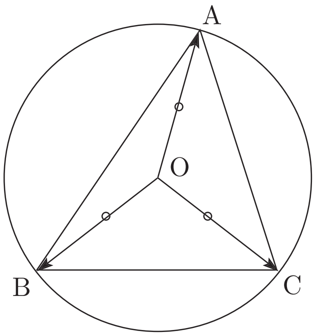
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1$$

与式より

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -4\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

両辺それ自身との内積をとって

$$\begin{aligned} \left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 &= \left|-4\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 \\ 4\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + 12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 9\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 &= 16\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 \\ 12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= 3 \\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$




同様の計算により

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{-\frac{7}{8}} \qquad \text{(答)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{-\frac{11}{16}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，両辺それ自身との内積をとって

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

同様に

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{27}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}}{4}} \qquad \text{(答)}$$

また $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\
&= \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\
&= -\frac{7}{8}-\frac{1}{4}+\frac{11}{16}+1\\
&= \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{27}{8}-\left(\frac{9}{16}\right)^2}\\
&= \boldsymbol{\frac{9\sqrt{15}}{32}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【4】

> ポイント
>
> $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とおくと，点 P は垂心に一致することを示す.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とおく.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{BP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を示す.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

であり，また

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{c} - \vec{b}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})\\ &= \left|\vec{c}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 0\\ &\left(\because \quad \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right|\right)\end{aligned}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

も示される．ゆえに点 P は三角形 ABC の垂心 H に一致する． ［証明終］

(2) 外心 O を始点とする位置ベクトルで考えると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\end{aligned}$$

であるから，O，G，H は一直線上にあり，G は線分 OH を 1 : 2 の比に内分する.

［証明終］

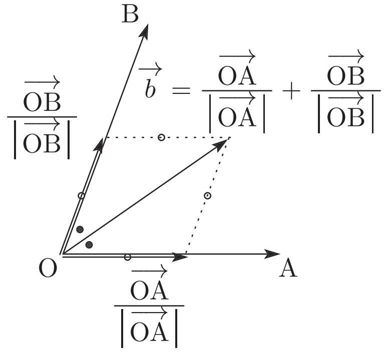
【5】

**ポイント**

一直線上にない3点O，A，Bを考える．Oを始点とし，∠AOBを2等分するベクトルの1つを$\vec{b}$とすると，

$$\vec{b} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$$

と表される．(右図参照)




(1) $$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (12-0,\ -2-3) = (12,\ -5)$$

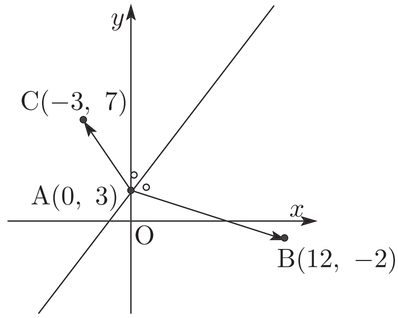
より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{12^2+5^2} = 13.$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-3-0,\ 7-3) = (-3,\ 4)$$

より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5.$

ここで




$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{1}{13}(12,\ -5) + \frac{1}{5}(-3,\ 4) \mathbin{/\!/} 5(12,\ -5) + 13(-3,\ 4)$$

であるから，求めるベクトルは

$$5(12,\ -5)+13(-3,\ 4) = (21,\ 27) \mathbin{/\!/} \mathbf{(7,\ 9)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める直線上の点をP($\vec{p}$)とし，$\vec{p} = (x,\ y)$とすると

$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t(7,\ 9)$$
$$(x,\ y) = (0,\ 3) + (7t,\ 9t) = (7t,\ 3+9t)$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = 7t & \cdots ① \\ y = 3+9t & \cdots ② \end{cases}$$

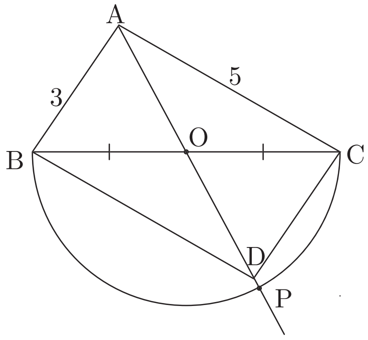
①×9−②×7より，求める方程式は

$$\boldsymbol{9x - 7y = -21} \qquad \text{(答)}$$

【6】BC の中点を O とする．

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = 6$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$




より，上式の両辺それ自身との内積をとって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$36 = 25 + 9 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ゆえに

$$2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -2$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathbf{-1} \quad \textbf{(答)}$$

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) \\ &= 2\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ は定ベクトルであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}\text{が最大} \iff \overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}\text{が最大}$$

ところで

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq \left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \quad (\text{等号は}\overrightarrow{\mathrm{AO}}\text{と}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\text{が同方向のとき成立})$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が同方向のとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は最大値

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$$

をとる．ここで $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = 3$ であり，また

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\ &= \frac{1}{4}(9 + 25 - 2) = 8\end{aligned}$$

より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right| = 2\sqrt{2}$．ゆえに求める最大値は

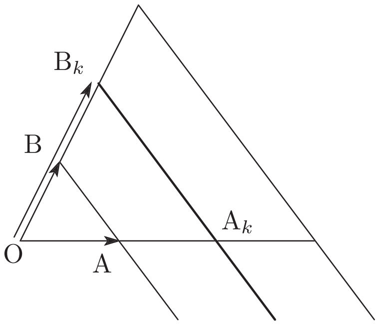
$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \mathbf{16 + 12\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) $s+t=k \quad (1 \leqq k \leqq 3)$ とおくと，

$$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1, \quad \frac{s}{k} \geqq 0$$

であり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{s}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{t}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\end{aligned}$$




ここで $\dfrac{s}{k}=s_k$, $\dfrac{t}{k}=t_k$ とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

をみたす点 $\mathrm{A}_k$，$\mathrm{B}_k$ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s_k\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}+t_k\overrightarrow{\mathrm{OB}_k}$$

ここで $s_k+t_k=1$ より $t_k=1-s_k$．上式に代入して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s_k\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}+(1-s_k)\overrightarrow{\mathrm{OB}_k} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}_k}+s_k\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}-\overrightarrow{\mathrm{OB}_k}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}_k}+s_k\overrightarrow{\mathrm{B}_k\mathrm{A}_k} \qquad (s_k \geqq 0)\end{aligned}$$

よって点 P は半直線 $\mathrm{B}_k\mathrm{A}_k$ 上の点である．

ここで $k$ を $1 \leqq k \leqq 3$ の範囲で動かすと半直線 $\mathrm{B}_k\mathrm{A}_k$ も平行に移動するから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_3}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす点をそれぞれ $\mathrm{A}_3$，$\mathrm{B}_3$ とすると，求める領域は線分 $\mathrm{BB}_3$，半直線 BA および $\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3$ で囲まれた部分，すなわち図 1 の斜線部となる．ただし境界を含む．

(2)

$$\begin{aligned} & s+t=-1, \quad s \leqq 0, \quad t \leqq 0 \\ \iff \quad & (-s)+(-t)=1, \quad -s \geqq 0, \quad -t \geqq 0\end{aligned}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \ \overrightarrow{\mathrm{OB}'}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

をみたす点 $\mathrm{A}'$，$\mathrm{B}'$ をとり，$s'=-s$，$t'=-t$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (-s)(-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+(-t)(-\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= s'\overrightarrow{\mathrm{OA}'}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB}'} \quad (s'+t'=1, \quad s' \geqq 0, \quad t' \geqq 0)\end{aligned}$$

ゆえに点 P は図 2 の線分 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 上の点である．ただし端点を含む．

(3)

$$|s|+|t|=1 \iff \begin{cases} s+t=1,\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0 & \cdots ① \\ -s+t=1,\quad s\leqq 0,\quad t\geqq 0 & \cdots ② \\ s-t=1,\quad s\geqq 0,\quad t\leqq 0 & \cdots ③ \\ -s-t=1,\quad s\leqq 0,\quad t\leqq 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

ここで，① は線分 AB を，④ は (2) より O に関して AB と対称な位置にある線分を表す．

② については，$\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A″ をとり，$s''=-s$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s''\overrightarrow{\mathrm{OA''}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s''+t=1,\quad s''\geqq 0,\quad t\geqq 0)$$

であり，また ③ についても同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OB''}}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 B″ をとり，$t''=-t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t''\overrightarrow{\mathrm{OB''}} \quad (s+t''=1,\quad s\geqq 0,\quad t''\geqq 0)$$

となるから，① から ④ をあわせて，点 P は点 O を対角線の交点とする平行四辺形 A″B″AB の周上に存在する（図 3）．

(4)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (0\leqq s\leqq 1,\quad 1\leqq t\leqq 3)$$

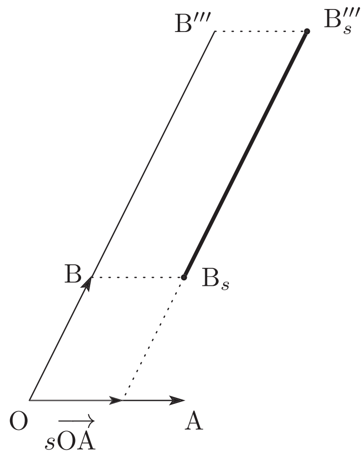
まず $s$ を $0\leqq s\leqq 1$ の範囲に固定する．すなわち

$$s=s_0 \quad (0\leqq s_0\leqq 1)$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s_0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (1\leqq t\leqq 3)$$

であるから点 P は，右図のような線分 $\mathrm{B}_s\mathrm{B}_s'''$ 上に存在する（ただし端点を含む）．

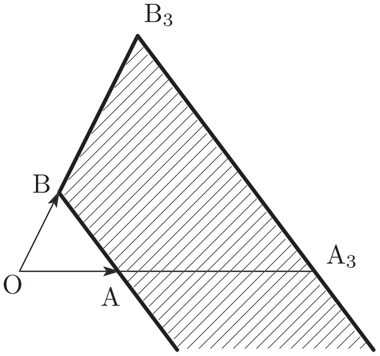



次に $s$ を $0\leqq s\leqq 1$ の範囲で動かして考えると，上の線分 $\mathrm{B}_s\mathrm{B}_s'''$ は線分 OB と平行に移動する．
したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB'''}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'''}}$$

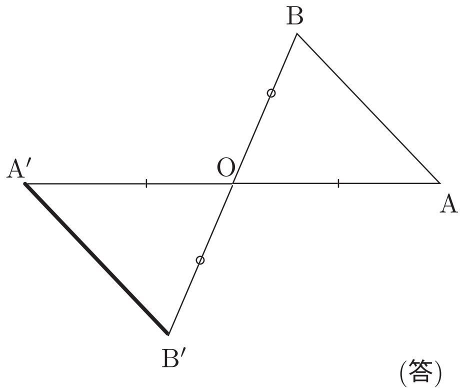
をみたす点 B‴，C，D に対して，点 P は平行四辺形 BCDB‴ の内部および周上に存在する．すなわち図 4 の斜線部（ただし境界を含む）．

〔図 1〕



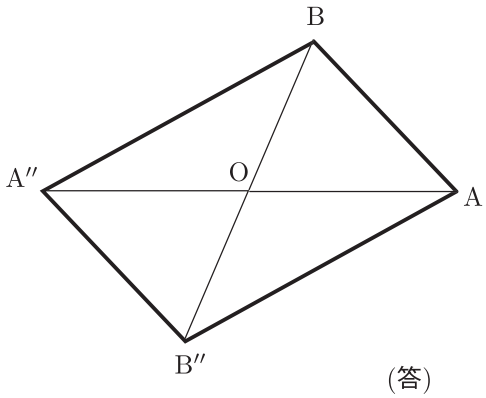

(答)

〔図 2〕



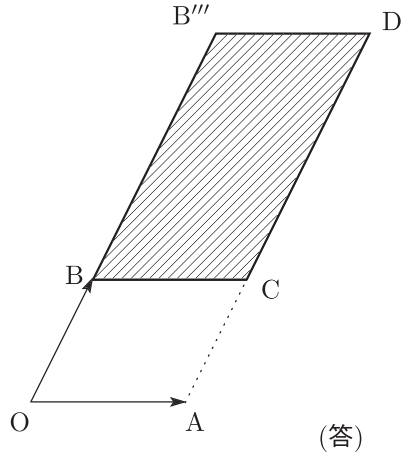

(答)

〔図 3〕




(答)

〔図 4〕




(答)

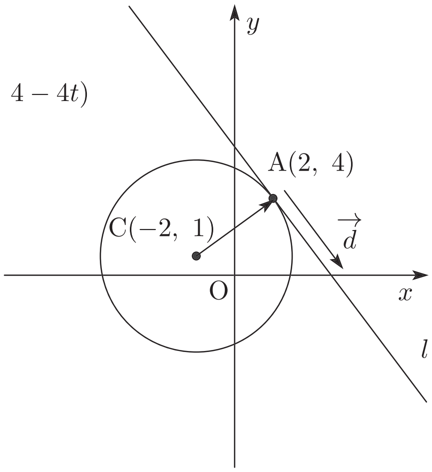
【8】点 C$(-2,\ 1)$，A$(2,\ 4)$ とし，点 A における円の接線を $l$，$l$ の方向ベクトルを $\vec{d}$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2,\ 4) - (-2,\ 1) = (4,\ 3)$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \perp \vec{d}$ であるから $\vec{d} = (3,\ -4)$ とおける．

$l$ 上の点を P$(\vec{p})$ とし，$\vec{p} = (x,\ y)$ とすると

$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{d}$$
$$(x,\ y) = (2,\ 4) + t(3,\ -4) = (2+3t,\ 4-4t)$$




ゆえに

$$\begin{cases} x = 2 + 3t & \cdots ① \\ y = 4 - 4t & \cdots ② \end{cases}$$

① × 4 + ② × 3 より

$$\boldsymbol{4x + 3y = 20} \qquad (\text{答})$$

## 添削課題

【1】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= 3s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

ここで，$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ とすれば，点 P は直線 A′B を動く．よって，点 P の存在範囲は図 1 の直線 A′B 上．　　**(答)**

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= 3s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= 3s\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}}\text{とした}\right)\cdots①$$

ここで，$3s + t = k\ (0 \leqq k \leqq 1)\cdots②$ とすると，

(i) $k = 0$ のとき，$t = -3s$ より，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3s\overrightarrow{\mathrm{OA'}} - 3s\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3s\overrightarrow{\mathrm{BA'}}$ となり，
P は O を通り，BA′ に平行な直線上を動く．

(ii) $0 < k \leqq 1$ のとき，② を $k$ で割ると，$\dfrac{3s}{k} + \dfrac{t}{k} = 1$
一方，① より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3s}{k}\cdot k\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \frac{t}{k}\cdot k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= \frac{3s}{k}\overrightarrow{\mathrm{OA''}} + \frac{t}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\ (\overrightarrow{\mathrm{OA''}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA'}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\text{とした})$$

このとき，P は直線 A″B′ 上を動く．
$0 < k \leqq 1$ の範囲で動かすと，直線 A″B′ は直線 A′B と平行に移動し，$k = 0$ の場合も合わせると，点 P の存在範囲は図 2 の斜線部 (境界含む)．　　**(答)**

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (-t)(-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}\ (\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ t' = -t\text{ とした})$$

ここで，$s = k\ (0 \leqq k \leqq 1)$ と固定し，$t'$ を $0 \leqq t' \leqq 1$ で動かすと，P は $k\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ なる点 $\mathrm{A_1}$ をとり，さらに四角形 $\mathrm{OA_1CB_1}$ が平行四辺形になるような点 C をとったときの線分 $\mathrm{A_1C}$ 上を動く．
$k$ を $0 \leqq k \leqq 1$ で動かすと，線分 $\mathrm{A_1C}$ は，$\mathrm{OB_1}$ と平行に動き，点 P の存在範囲は図 3 の斜線部 (境界含む)．　　**(答)**

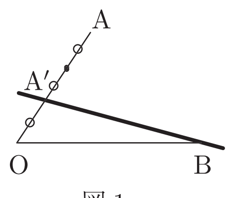


図 1

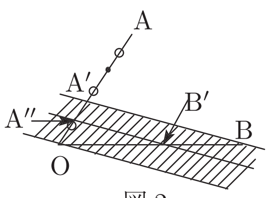


図 2

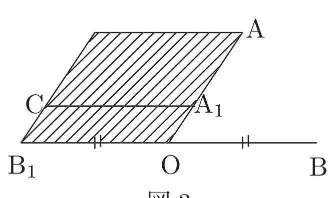


図 3

【2】(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = 6$ より，$\left|\vec{b} - \vec{a}\right| = 6$

$$\iff \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{a}\right|^2 = 36$$

$\left|\vec{a}\right| = 5, \left|\vec{b}\right| = 7$ より，

$-2\vec{a}\cdot\vec{b} = -38 \qquad \therefore\ \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = 19}$ **(答)**

(2) B，H，C は同一直線上に存在するので，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ と表される ($t$ は実数)

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$

以上より，$\{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\}\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = 0$

$$\iff -t\left|\vec{a}\right|^2 + (2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-t)\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

$\left|\vec{a}\right| = 5$，$\left|\vec{b}\right| = 7$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 19$ より，

$$-25t + 19(2t-1) + 49(1-t) = 0 \qquad \therefore\ t = \frac{5}{6}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \boldsymbol{\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}}$ **(答)**

【3】$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$\therefore\ \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$

また，$2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$$

$\therefore\ \mathrm{AB} = \mathrm{BC}$

よって，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ が成り立つので，$\triangle\mathrm{ABC}$ は**正三角形**である．　**(答)**

【4】(1) 与式より，$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-6\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$\Longleftrightarrow (4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}})=(-6\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(-6\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

$$\Longleftrightarrow 16\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+40\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+25\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=36\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1$ より，

$$40\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-5 \qquad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{-\frac{1}{8}} \quad \textbf{(答)}$$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{-\frac{3}{4}}$ **(答)**

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{-\frac{9}{16}} \quad \textbf{(答)}$$

(2) O，A，D は一直線上に存在するので，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

また，与式から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\frac{1}{4}(5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+6\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\frac{5}{4}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{3}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ここで，B，D，C は同一直線上に存在するので，

$$-\frac{5}{4}k-\frac{3}{2}k=1 \qquad \therefore\ k=-\frac{4}{11}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{5}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{6}{11}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{11}(5\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+6\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

$$=\frac{1}{11}\left\{5\cdot 1^2+6\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{22}} \qquad \text{(答)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{11}(5\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+6\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2)$$

$$=\frac{1}{11}\left\{5\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+6\cdot 1^2\right\}=\boldsymbol{\frac{9}{44}} \qquad \text{(答)}$$

## 問題

【1】

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = -\overrightarrow{\mathrm{EA}} = -\vec{\boldsymbol{a}} \qquad (答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{NG}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{c}} \qquad (答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{EG}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}} + \overrightarrow{\mathrm{EH}} = \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}} \qquad (答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = \overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{EA}} + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right) = \vec{\boldsymbol{a}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{b}} \qquad (答)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{GN}} - \overrightarrow{\mathrm{GM}} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EH}}\right) - \overrightarrow{\mathrm{GM}} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\\ &= -\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{b}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{c}} \qquad (答)\end{aligned}$$

【2】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-0 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{\mathbf{19}} \qquad (答)$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-0 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-3 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{22}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

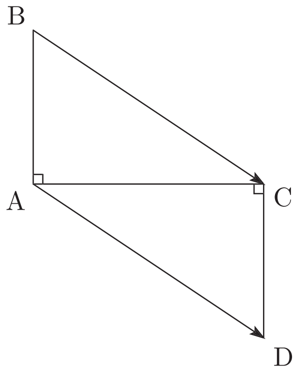
よって

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$$

であるから

$\angle\mathbf{BAC} = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ の直角三角形　　(答)

(3) 右図より




$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

原点を O とすると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$\mathrm{D}(\mathbf{6,\ 0,\ -6})$ (答)

(4) 求める点を E とし, その座標を $(3,\ x,\ y)$ とすると

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|^2 &= 1 + y^2 + (z+1)^2 && \cdots\cdots ① \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2 &= 4 + (y-3)^2 + (z-2)^2 && \cdots\cdots ② \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2 &= 4 + (y-3)^2 + (z+3)^2 && \cdots\cdots ③ \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right| &= \left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right| && \cdots\cdots (*) \end{aligned}$$

であるから, $(*)$ に ②, ③ を代入して

$$\begin{aligned} (z-2)^2 &= (z+3)^2 \\ 10z &= -5 \\ \therefore\quad z &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

①, ② に代入して, 再び $(*)$ とから

$$\begin{aligned} 1 + y^2 + \frac{1}{4} &= 4 + (y-3)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 2\right)^2 \\ 6y &= 18 \\ \therefore\quad y &= 3 \end{aligned}$$

したがって, 求める点の座標は

$\left(\mathbf{3,\ 3,\ -\frac{1}{2}}\right)$ (答)

(5) (2) より, $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \cdot \sqrt{22} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{418}}}{\mathbf{2}} \end{aligned}$$ (答)

【3】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{2}} \qquad (答)$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \mathbf{3} \qquad (答)$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

よって

$$\cos \angle\mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \angle\mathrm{BAC} \leqq \pi$ より

$$\angle\mathrm{BAC} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad (答)$$

(3)

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \sin \angle\mathrm{BAC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad (答) \end{aligned}$$

(4) 求めるベクトルを $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{n} = -x + z = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

また $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{n} = -x + 2y + 2z = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

$\overrightarrow{n}$ は単位ベクトルであるから

$$\left|\overrightarrow{n}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \cdots\cdots ③$$

① より

$$z = x \quad \cdots\cdots ④$$

④ を ② に代入して

$$y=-\frac{1}{2}x \quad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤ を ③ に代入して

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{4}x^2+x^2&=1 \\ x^2&=\frac{4}{9} \\ \therefore\ x&=\pm\frac{2}{3} \end{aligned}$$

それぞれ ④，⑤ に代入して

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}\text{のとき} \quad y=-\dfrac{1}{3},\ z=\dfrac{2}{3} \\ x=-\dfrac{2}{3}\text{のとき} \quad y=\dfrac{1}{3},\ z=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

よって，求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの一つを $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおく．条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{n}=0 \quad \cdots ① \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{n}=0 \quad \cdots ②$$

① より

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-x+z=0 \quad \cdots ①'$$

また ② より

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}=-x+2y+2z=0 \quad \cdots ②'$$

ここで $x=2$ とおくと，

①′より　$z=2$

②′より　$y=\frac{1}{2}(2-4)=-1$

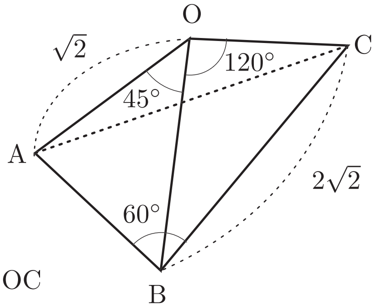
ゆえに

$$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

ここで $\left|\overrightarrow{n}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$ より，求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\right|}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1)




$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$$
$$2 = \sqrt{2}\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\therefore\ |\vec{b}| = \mathbf{2} \qquad (答)$$

(2) $\triangle$OBC に余弦定理を用いると

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BOC}$$
$$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 + |\vec{c}|^2 - 2\cdot 2\cdot|\vec{c}|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\ |\vec{c}|^2 + 2|\vec{c}| - 4 = 0$$

$|\vec{c}| > 0$ に注意してこれを解いて

$$|\vec{c}| = \boldsymbol{\sqrt{5}-1} \qquad (答)$$

(3) $\triangle$OAB に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}\\ &= (\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= 2\end{aligned}$$

また $\triangle$ABC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 - 2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\angle\mathrm{ABC}\\ &= 2 + (2\sqrt{2})^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= 6\end{aligned}$$

$\triangle$OAC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{AOC} &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - \mathrm{AC}^2}{2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}\\ &= \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5}-1)^2 - 6}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\angle\mathrm{AOC} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi} \qquad (答)$$

【5】(1) G は△OAB の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \boldsymbol{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} \\ &= \vec{c} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(-\left|\vec{a}\right|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \left|\vec{b}\right|^2 + 3\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

ここで OA $=$ OB $=$ OC であるから

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right|$$

また△OAB は正三角形より，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \dfrac{\pi}{3}$ だから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2$$

これらを $(*)$ に代入して

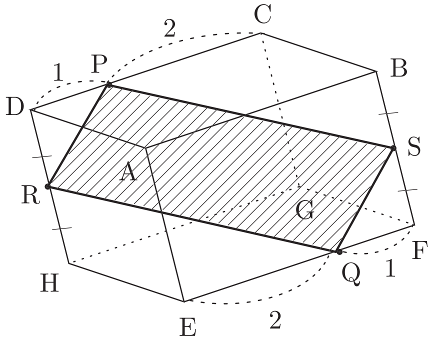
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \frac{1}{9}\left(-\left|\vec{a}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{3}{2}\left|\vec{a}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 + \frac{3}{2}\left|\vec{a}\right|^2\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

ゆえに

OG$\perp$GC　［証明終］

【6】 (1)

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{DR}} - \overrightarrow{\mathrm{DP}} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DH}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}} \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$




(2)

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{SQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{FQ}} - \overrightarrow{\mathrm{FS}} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{FE}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FB}} \\
&= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}
\end{aligned}
$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{SQ}}$$

すなわち，四角形 PRQS の 1 組の対辺が平行でかつ長さが等しいので
四角形 PRQS は平行四辺形である．　［証明終］

## 添削課題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{\boldsymbol{c}}$ (答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{b}}$ (答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{NG}}=\overrightarrow{\mathrm{NF}}+\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}$ (答)

(4) $\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{c}}$ (答)

(5) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{EN}}-\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{a}}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$ (答)

【2】(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$$

よって，M の座標は

$\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$ (答)

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2-1}=-\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}$$

よって，N の座標は

**(5, 7, 0)** (答)

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

よって，G の座標は

$\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)$ (答)

(4) AC を対角線とする平行四辺形をつくるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$$

よって，D の座標は

**(3, 5, 0)** (答)

【3】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$ (答)

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$ (答)

(2) 仮定より，$\left|\vec{a}\right|=3$,　$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$,　$\left|\vec{c}\right|=1$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\&=\{(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}\}\cdot\{(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\}\\&=\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}-\left|\vec{a}\right|^2\\&=2+1+2\vec{b}\cdot\vec{c}-9\end{aligned}$$

ここで，AD⊥AE より，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=2+1-9=\boldsymbol{-6}\qquad(答)$$

(3) △ABC において，三平方の定理より

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=9+2=11$$

また，△AGC において，三平方の定理より

$$\mathrm{AG}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{CG}^2=11+1=12$$

さらに，AG = BH であるから，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|}=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\theta=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$ (答)

【4】$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

OA = AB より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$$

よって

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2\quad&\Longleftrightarrow\quad\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2\\&\Longleftrightarrow\quad\left|\vec{b}\right|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}\quad\cdots①\end{aligned}$$

同様に，BC = OC より

$$\left|\vec{b}\right|^2=2\vec{b}\cdot\vec{c}\quad\cdots②$$

①，② より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}\quad\cdots③$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$ より，したがって

OB⊥AC ［証明終］

## 問題

【1】(1) 直線上の点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ に対して $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{t-1} \\ \boldsymbol{-2t} \\ \boldsymbol{t+3} \end{pmatrix} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ は任意の実数)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 直線上の点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ に対して $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{-t+3} \\ \boldsymbol{2t} \\ \boldsymbol{2t-1} \end{pmatrix} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ は任意の実数)} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ の両方に垂直なベクトルの 1 つを $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ （$\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$）とすると，

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ より， $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad x + y + 3z = 0 \cdots ①$

$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ より， $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad -x + 2y + z = 0 \cdots ②$

ここで $z = 1$ とすると，

① $\iff$ $x + y = -3 \quad \cdots ①'$
② $\iff$ $-x + 2y = -1 \quad \cdots ②'$

①′ + ②′ より

$$3y = -4 \qquad \therefore\ y = -\frac{4}{3}$$

①′ に代入して

$$x = -\frac{5}{3}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

であるから，求める直線の方向ベクトルを $\overrightarrow{d}$ とすると

$$\overrightarrow{d}=\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$$

とおける．ゆえに求める直線のベクトル方程式は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\begin{pmatrix}5t\\4t+1\\-3t-2\end{pmatrix}}\quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意の実数)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1) 2 点 A$(\overrightarrow{a})$，B$(\overrightarrow{b})$ を直径の両端とする球面の中心を C$(\overrightarrow{c})$ とすると，

$$\overrightarrow{c}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$$

である．
また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ は球の直径であるから，半径を $r$ とすると

$$r=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$$

である．以上より，

$$\overrightarrow{c}=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$r=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{3}$$

球面上の点を P$(\overrightarrow{p})$ とすれば，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$ であるから

$$\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3}\quad\text{(答)}$$

(2) 点 $(a, b, c)$ を中心とし，$xz$ 平面に接する球面の半径 $r$ は，中心の $y$ 座標の絶対値に等しい．すなわち $r=|b|=|4|=4$
球面上の点を P$(\overrightarrow{p})$ とすれば，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$ より，

$$\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\right|=4$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=16}\quad\text{(答)}$$

(3) 点 $(a, b, c)$ を中心とし，$x$ 軸に接する球面の半径 $r$ は $r=\sqrt{b^2+c^2}$ である．すなわち $r=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ である．

球面上の点を $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ とすれば，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$ より，

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|=\sqrt{5}$$

$$\therefore \boldsymbol{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5} \quad \textbf{(答)}$$

**【3】** $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は 1 次独立である．

ここで

「4 点 A, B, C, D が同一平面上にある」
$\Longleftrightarrow$「点 B が平面 ACD 上にある」
$\Longleftrightarrow$「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となる実数 $s$，$t$ が存在する」$\cdots(*)$

であるから，条件 $(*)$ がみたされるための $x$ の値を求める．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} 0 \\ x-2 \\ 7 \end{pmatrix}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ x-2 \\ 7 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4s+t \\ 2t \\ s-2t \end{pmatrix}$$

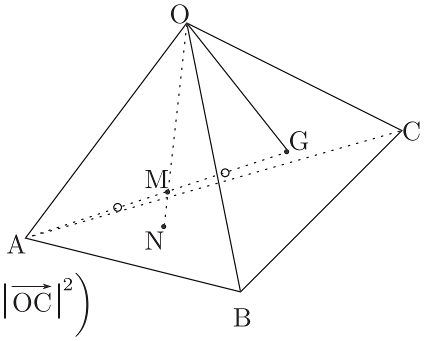
$$\iff \begin{cases} 0=-4s+t & \cdots ① \\ x-2=2t & \cdots ② \\ 7=s-2t & \cdots ③ \end{cases}$$

①，③ より，$(s,\ t)=(-1,\ -4)$．
これを ② に代入して，

$$\therefore\ \boldsymbol{x=-6} \qquad \textbf{(答)}$$

【4】(1) 正四面体 OABC の各面はすべて正三角形であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$




また, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ であり,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=1$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|^2=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$
$$=\frac{1}{9}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left(1+2\cdot\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{3}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

ゆえに

$$\triangle\mathrm{OAG}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{6}}\qquad\text{(答)}$$

(2) M は AG の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

また 3 点 O, M, N は共線であるから（同一直線上にあるから）

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=\frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

4 点 A, B, C, N は共面であるから（同一平面上にあるから）

$$\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}k+\frac{1}{6}k=1\qquad\therefore\ k=\frac{6}{5}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\qquad\text{(答)}$$

【5】(1) $l:(1,\,2,\,-3)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ に平行な直線

$m:(4,\,-3,\,1)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}3\\7\\-2\end{pmatrix}$ に平行な直線

とする．また，$l$ 上の点を $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$，$m$ 上の点を $\mathrm{Q}(\overrightarrow{q})$ とすると

$$\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3s+1\\-s+2\\2s-3\end{pmatrix}\quad(s\text{ は任意の実数})$$

$$\overrightarrow{q}=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\7\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t+4\\7t-3\\-2t+1\end{pmatrix}\quad(t\text{ は任意の実数})$$

であり，交点において $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{q}$ であるから，

$$\begin{cases}3s+1=3t+4 & \cdots①\\-s+2=7t-3 & \cdots②\\2s-3=-2t+1 & \cdots③\end{cases}$$

①，② を連立して解くと，$(s,\ t)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となり，この値は ③ を満たす．
ゆえに

**$l$ と $m$ は 1 点で交わり，その交点は $\left(\dfrac{11}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$** (答)

(2) $l:2$ 点 $(1,\ 2,\ 3)$，$(2,\ 3,\ 5)$ を通る直線
$m:2$ 点 $(-1,\ 2,\ 4)$，$(2,\ 4,\ 1)$ を通る直線
とする．また，$l$ 上の点を $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$，$m$ 上の点を $\mathrm{Q}(\overrightarrow{q})$ とすると，

$$\overrightarrow{p}=(1-s)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+1\\s+2\\2s+3\end{pmatrix}\quad(s\text{ は任意の実数})$$

$$\overrightarrow{q}=(1-t)\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t-1\\2t+2\\-3t+4\end{pmatrix}\quad(t\text{ は任意の実数})$$

であり，交点において $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{q}$ であるから，

$$\begin{cases}s+1=3t-1 & \cdots①\\s+2=2t+2 & \cdots②\\2s+3=-3t+4 & \cdots③\end{cases}$$

①，② を連立して解くと $(s,\ t)=(4,\ 2)$ となるが，この値は ③ を満たさない．
ゆえに $l$ と $m$ は交点をもたない．
ところで $l$ と $m$ の方向ベクトルはそれぞれ

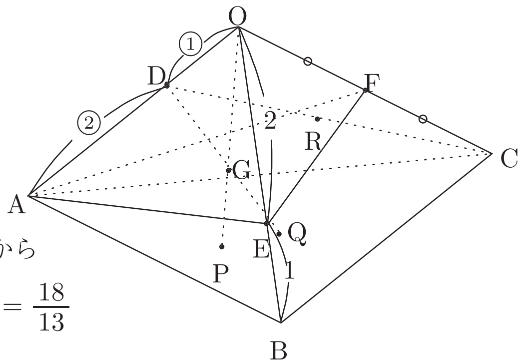
$$\begin{pmatrix}2-1\\3-2\\5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2-(-1)\\4-2\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$$

であるから $l \not\parallel m$.
以上より,

$\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ はねじれの位置にある　　(答)

【6】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\end{aligned}$$




3 点 O, G, P は共線であるから,
$k$ を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}\\&=\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{2}{9}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}\end{aligned}$$

また 4 点 A, B, C, P は共面であるから

$$\frac{1}{3}k+\frac{2}{9}k+\frac{1}{6}k=1 \qquad \therefore\ k=\frac{18}{13}$$

以上より,

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{6}{13}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{4}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{13}\overrightarrow{\mathrm{OC}}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 3 点 D, G, Q は共線であるから, $l$ を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=l\overrightarrow{\mathrm{DG}}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=l\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)\\\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+l\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)\\&=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}l\vec{b}+\frac{1}{6}l\vec{c}\end{aligned}$$

さらに 4 点 Q, A, B, C は共面であるから,

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}l+\frac{1}{6}l=1 \qquad \therefore\ l=\frac{12}{7}$$

以上より,

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{8}{21}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 3 点 C，R，D は共線であるから，$t$ を $0 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数として
CR: RD $= t : 1-t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OD}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OF}}\end{aligned}$$

また 4 点 A，E，F，R は共面であるから

$$\frac{1}{3}t + 2(1-t) = 1 \qquad \therefore\ t = \frac{3}{5}$$

ゆえに

$$\mathrm{CR} : \mathrm{RD} = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} = \mathbf{3 : 2} \qquad (答)$$

## 添削課題

【1】(1) 直線上の任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2t+4} \\ \boldsymbol{t-3} \\ \boldsymbol{3t+5} \end{pmatrix} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意の実数)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 直線上の任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{3t-1} \\ \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{-6t+5} \end{pmatrix} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意の実数)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1)

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = 2 \text{ より}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2} = 2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=4} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) で求めた球の方程式に，$y=0$ を代入して

$$(x-3)^2+(0-1)^2+(z+4)^2=4$$

$$\therefore\ (x-3)^2+(z+4)^2=3$$

したがって

**$zx$ 平面上にあって，点 $\boldsymbol{(3,\ 0,\ -4)}$ を中心とし，半径 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ の円** (答)

【3】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{3}$$
$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\qquad (答)$$

(2) O, D, E は同一直線上にあるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=\frac{1}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ここで, A, B, C, E は同一平面上にあるので,

$$\frac{1}{9}k+\frac{1}{9}k+\frac{2}{3}k=1\qquad\therefore\ k=\frac{9}{8}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OE}}}=\boldsymbol{\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\qquad (答)$$

【4】(1) A, B, C, D が同一平面上に存在するので, $\alpha$, $\beta$ を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表せる.

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}x+2\\-7\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\begin{pmatrix}2\\-5\\-2\end{pmatrix}$ より,

$$\begin{pmatrix}x+2\\-7\\-3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\alpha+2\beta\\3\alpha-5\beta\\\alpha-2\beta\end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{cases}x+2=3\alpha+2\beta & \cdots①\\-7=3\alpha-5\beta & \cdots②\\-3=\alpha-2\beta & \cdots③\end{cases}$$

②, ③ より, $(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2)$

これを ① に代入して

$$\therefore\ \boldsymbol{x=5}\qquad (答)$$

(2) A，C，E は同一直線上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 5-7s \\ 7s-7 \\ 3s \end{pmatrix} \quad (s \text{ は任意の実数})$$

B，D，E は同一直線上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \begin{pmatrix} t \\ 8t-5 \\ 3t+1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

よって

$$\begin{cases} 5-7s = t & \cdots ④ \\ 7s-7 = 8t-5 & \cdots ⑤ \\ 3s = 3t+1 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

④，⑤ を解くと，　$(s,\ t) = \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$.

これは ⑥ を満たす.

よって

$$\mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}},\ \mathbf{2}\right) \qquad (\text{答})$$

M1T
高１難関大数学

Z-KAI

| 会員番号 | |
|---|---|

| 氏　名 | |
|---|---|