M1JK

本科 2 期 10 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 1 東大数学 K

１７章　複素数と高次方程式（２）ー整式の除法・因数定理ー

問題

【1】(1)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -3x & +7 & \\ \cline{2-5}
x+2 \,\big) & x^3 & -x^2 & +x & +14 \\
 & x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & -3x^2 & +x & \\
 & & -3x^2 & -6x & \\ \cline{3-5}
 & & & 7x & +14 \\
 & & & 7x & +14 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

よって，

商：x^2-3x+7，余り：0

(2)

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x^2 & -x & -1 & & \\ \cline{2-6}
x^2+x-1 \,\big) & x^4 & & -3x^2 & +x & -1 \\
 & x^4 & +x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & -x^3 & -2x^2 & +x & \\
 & & -x^3 & -x^2 & +x & \\ \cline{3-6}
 & & & -x^2 & & -1 \\
 & & & -x^2 & -x & +1 \\ \cline{4-6}
 & & & & x & -2
\end{array}$$

よって，

商：x^2-x-1，余り：$x-2$

【2】(1)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +4x & +15 & \\ \cline{2-5}
x-4 \,\big) & x^3 & & -x & -45 \\
 & x^3 & -4x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^2 & -x & \\
 & & 4x^2 & -16x & \\ \cline{3-5}
 & & & 15x & -45 \\
 & & & 15x & -60 \\ \cline{4-5}
 & & & & 15
\end{array}$$

よって，

商：$x^2+4x+15$，余り：15

したがって，

$$\boldsymbol{x^3-x-45}$$
$$\boldsymbol{=(x-4)(x^2+4x+15)+15}$$

(2)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 5x & -7 & & \\ \cline{2-5}
x^2+x-1 \,\big) & 5x^3 & -2x^2 & & -1 \\
 & 5x^3 & +5x^2 & -5x & \\ \cline{2-5}
 & & -7x^2 & +5x & -1 \\
 & & -7x^2 & -7x & +7 \\ \cline{3-5}
 & & & 12x & -8
\end{array}$$

よって，

商：$5x-7$，余り：$12x-8$

したがって，

$$\boldsymbol{5x^3-2x^2-1}$$
$$\boldsymbol{=(x^2+x-1)(5x-7)+12x-8}$$

(3)

$$\begin{array}{r@{\,}l} & x \\ x^2+1 \big) & \overline{x^3\ \ -x+1} \\ & \underline{x^3\ \ +x} \\ & -2x+1 \end{array}$$

よって，

商：x，余り：$-2x+1$

したがって，

$\boldsymbol{x^3-x+1=(x^2+1)x-2x+1}$

【3】(1) $f(x)$ を $x-1$ で割った余りは，

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1-1 \\ &= 1-2+3-1 \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

(2) $f(x)$ を $2x-1$ で割った余りは，

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-6 \\ &= \frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-6 \\ &= -\boldsymbol{\frac{29}{8}} \end{aligned}$$

【4】(1) $f(x)$ を $x+1$ で割った余りは，

$$\begin{aligned} & f(-1) \\ &= (-1)^3+3\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)+5 \\ &= -1+3-m+5 \\ &= -m+7 \end{aligned}$$

この余りが 3 に等しいことから，

$$\begin{aligned} -m+7 &= 3 \\ -m &= -4 \\ m &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

(2) $f(x)$ を $x+3$ で割った余りは，

$$\begin{aligned} & f(-3) \\ &= 2\cdot(-3)^3-m\cdot(-3)^2+10\cdot(-3)+2 \\ &= -54-9m-30+2 \\ &= -9m-82 \end{aligned}$$

この余りが -1 に等しいことから，

$$\begin{aligned} -9m-82 &= -1 \\ -9m &= 81 \\ m &= \boldsymbol{-9} \end{aligned}$$

(3) $f(x)$ を $x+2$ で割った余りは，

$$\begin{aligned}&f(-2)\\&=3\cdot(-2)^3-m\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)+1\\&=-24-4m+4+1\\&=-4m-19\end{aligned}$$

この余りが 1 に等しいことから，

$$\begin{aligned}-4m-19&=1\\-4m&=20\\m&=\mathbf{-5}\end{aligned}$$

(4) $f(x)$ を $2x-1$ で割った余りは，

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{1}{2}\right)\\&=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1\\&=\frac{5}{8}-2+\frac{m}{2}+1\\&=\frac{m}{2}-\frac{3}{8}\end{aligned}$$

この余りが 2 に等しいことから，

$$\begin{aligned}\frac{m}{2}-\frac{3}{8}&=2\\4m-3&=16\\4m&=19\\m&=\boldsymbol{\frac{19}{4}}\end{aligned}$$

【5】(1) 組立除法から，

$$\begin{array}{r|rrrr}-1 & 1 & 3 & 7 & -2\\ & & -1 & -2 & -5\\\hline & 1 & 2 & 5 & \boxed{-7}\end{array}$$

よって，

商：$\boldsymbol{x^2+2x+5}$，余り：$\boldsymbol{-7}$

(2) 組立除法から，

$$\begin{array}{r|rrrr}3 & -1 & 8 & -6 & -5\\ & & -3 & 15 & 27\\\hline & -1 & 5 & 9 & \boxed{22}\end{array}$$

よって，

商：$\boldsymbol{-x^2+5x+9}$，余り：$\boldsymbol{22}$

(3) 組立除法から，

$$\begin{array}{r|rrrr}2 & 1 & 0 & -6 & 1\\ & & 2 & 4 & -4\\\hline & 1 & 2 & -2 & \boxed{-3}\end{array}$$

よって，

商：$\boldsymbol{x^2+2x-2}$，余り：$\boldsymbol{-3}$

(4) 組立除法から，

$$\begin{array}{r|rrrrrr}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\\hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0}\end{array}$$

よって，

商：$\boldsymbol{x^4+x^3+x^2+x+1}$，余り：$\boldsymbol{0}$

(5) 組立除法から，

$$\begin{array}{r|rrrr}\frac{3}{2} & 2 & 5 & 0 & -8\\ & & 3 & 12 & 18\\\hline & 2 & 8 & 12 & \boxed{10}\end{array}$$

よって，$2x^3+5x^2-8$ を，$x-\dfrac{3}{2}$ で割った商と余りは，

商：$2x^2+8x+12$，余り：10

であるから，求める商と余りは，

商：$\boldsymbol{x^2+4x+6}$，余り：$\boldsymbol{10}$

(6) 組立除法から，

$$\begin{array}{r|rrrr}-\frac{1}{2} & 4 & 0 & 3 & -3\\ & & -2 & 1 & -2\\\hline & 4 & -2 & 4 & \boxed{-5}\end{array}$$

よって，$4x^3+3x-3$ を，$x+\dfrac{1}{2}$ で割った商と余りは，

商：$4x^2-2x+4$，余り：-5

であるから，求める商と余りは，

商：$\boldsymbol{2x^2-x+2}$，余り：$\boldsymbol{-5}$

【6】(1)

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + m\cdot(-3)^2 + 9\cdot(-3) - 9 \\ &= -27 + 9m - 27 - 9 \\ &= 9m - 63 \end{aligned}$$

整式 $f(x)$ は $x+3$ で割り切れるから，
因数定理より，

$$\begin{aligned} 9m - 63 &= 0 \\ 9m &= 63 \\ m &= \mathbf{7} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 + 2m\cdot 3^2 - (m+5)\cdot 3 - 2 \\ &= 27 + 18m - 3m - 15 - 2 \\ &= 15m + 10 \end{aligned}$$

整式 $f(x)$ は $x-3$ で割り切れるから，
因数定理より，

$$\begin{aligned} 15m + 10 &= 0 \\ 15m &= -10 \\ m &= -\boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4 + m\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (2m-4)\cdot\frac{3}{2} + 3 \\ &= \frac{81}{8} + \frac{9}{4}m + 3m - 6 + 3 \\ &= \frac{21}{4}m + \frac{57}{8} \end{aligned}$$

整式 $f(x)$ は $2x-3$ で割り切れるから，因数定理より，

$$\begin{aligned} \frac{21}{4}m + \frac{57}{8} &= 0 \\ \frac{21}{4}m &= -\frac{57}{8} \\ m &= -\boldsymbol{\frac{19}{14}} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^5 - m^2\cdot(-1)^2 + 2m\cdot(-1) + 4 \\ &= -1 - m^2 - 2m + 4 \\ &= -m^2 - 2m + 3 \end{aligned}$$

整式 $f(x)$ は $x+1$ で割り切れるから，因数定理より，

$$\begin{aligned} -m^2 - 2m + 3 &= 0 \\ m^2 + 2m - 3 &= 0 \\ (m+3)(m-1) &= 0 \\ m &= \mathbf{-3,\ 1} \end{aligned}$$

【7】(1)

$$\begin{aligned}P(-1) &= (-1)^3 + (-1)^2 + a \cdot (-1) + b \\ &= -1 + 1 - a + b \\ &= -a + b\end{aligned}$$

整式 $P(x)$ は $x+1$ で割り切れるから，
因数定理より，

$$-a + b = 0 \ \cdots ①$$

また，

$$\begin{aligned}P(-3) &= (-3)^3 + (-3)^2 + a \cdot (-3) + b \\ &= -27 + 9 - 3a + b \\ &= -3a + b - 18\end{aligned}$$

整式 $P(x)$ は $x+3$ でも割り切れるから，因数定理より，

$$-3a + b - 18 = 0 \ \cdots ②$$

② − ① から，

$$\begin{aligned}-2a - 18 &= 0 \\ -2a &= 18 \\ \therefore\ a &= -9\end{aligned}$$

これを①に代入して，

$$\begin{aligned}-(-9) + b &= 0 \\ 9 + b &= 0 \\ \therefore\ b &= -9\end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a = -9,\ b = -9}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + (-1) + b \\ &= -1 + a - 1 + b \\ &= a + b - 2 \end{aligned}$$

整式 $P(x)$ は $x+1$ で割り切れるから,
因数定理より,

$$a + b - 2 = 0 \ \cdots ①$$

また,

$$\begin{aligned} P(3) &= 3^3 + a \cdot 3^2 + 3 + b \\ &= 27 + 9a + 3 + b \\ &= 9a + b + 30 \end{aligned}$$

整式 $P(x)$ は $x-3$ で割り切れるから,
因数定理より,

$$9a + b + 30 = 0 \ \cdots ②$$

② − ① から,

$$\begin{aligned} 8a + 32 &= 0 \\ 8a &= -32 \\ \therefore\ a &= -4 \end{aligned}$$

これを①に代入して,

$$\begin{aligned} (-4) + b - 2 &= 0 \\ b - 6 &= 0 \\ \therefore\ b &= 6 \end{aligned}$$

よって,

$$\boldsymbol{a = -4,\ b = 6}$$

【8】(1)

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^3 - 3\cdot 2^2 + a\cdot 2 + b \\ &= 8 - 12 + 2a + b \\ &= 2a + b - 4 \end{aligned}$$

整式 $P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから，因数定理より，

$$2a + b - 4 = 0 \quad \cdots ①$$

また，

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 - 3\cdot 1^2 + a\cdot 1 + b \\ &= 1 - 3 + a + b \\ &= a + b - 2 \end{aligned}$$

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが -2 であるから，剰余の定理より，

$$a + b - 2 = -2 \quad \cdots ②$$

① − ② より，

$$\begin{aligned} a - 2 &= 2 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

これを①に代入して，

$$\begin{aligned} 8 + b - 4 &= 0 \\ b + 4 &= 0 \qquad \therefore\ b = -4 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a = 4,\ b = -4}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(5) &= a\cdot 5^3 + b\cdot 5^2 + c\cdot 5 + d \\ &= 125a + 25b + 5c + d \end{aligned}$$

$P(x)$ を $x-5$ で割ったときの余りが 2 であるから，剰余の定理より，

$$125a + 25b + 5c + d = 2 \quad \cdots ①$$

また，

$$\begin{aligned} P(-3) &= a\cdot(-3)^3 + b\cdot(-3)^2 + c\cdot(-3) + d \\ &= -27a + 9b - 3c + d \end{aligned}$$

$P(x)$ を $x+3$ で割ったときの余りが 9 であるから，剰余の定理より，

$$-27a + 9b - 3c + d = 9 \quad \cdots ②$$

また，

$$\begin{aligned} P(-1) &= a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d \\ &= -a + b - c + d \end{aligned}$$

$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが 5 であるから，剰余の定理より，

$$-a + b - c + d = 5 \quad \cdots ③$$

また，

$$\begin{aligned} P(1) &= a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \\ &= a + b + c + d \end{aligned}$$

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 3 であるから，剰余の定理より，

$$a + b + c + d = 3 \quad \cdots ④$$

①〜④より，

$$\begin{cases} 125a + 25b + 5c + d = 2 & \cdots ① \\ -27a + 9b - 3c + d = 9 & \cdots ② \\ -a + b - c + d = 5 & \cdots ③ \\ a + b + c + d = 3 & \cdots ④ \end{cases}$$

④ $-$ ③ より，

$$\begin{aligned} &2a + 2c = -2 \\ &\quad \therefore\ c = -a - 1 \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

③ $+$ ④ より，

$$\begin{aligned} &2b + 2d = 8 \\ &\quad \therefore\ d = 4 - b \quad \cdots ⑥ \end{aligned}$$

①に⑤，⑥を代入すると，

$$\begin{aligned} 125a + 25b + 5(-a-1) + (4-b) &= 2 \\ 120a + 24b &= 3 \\ \therefore\ 40a + 8b &= 1 \quad \cdots ⑦ \end{aligned}$$

②に⑤，⑥を代入すると，

$$\begin{aligned} -27a + 9b - 3(-a-1) + (4-b) &= 9 \\ \therefore\ -24a + 8b &= 2 \quad \cdots ⑧ \end{aligned}$$

⑦ $-$ ⑧ より，

$$\begin{aligned} &64a = -1 \\ &\therefore\ a = -\frac{1}{64} \end{aligned}$$

よって，⑦より，$b = \dfrac{13}{64}$

⑤より，$c = -\dfrac{63}{64}$

⑥より，$d = \dfrac{243}{64}$

よって，

$$\boldsymbol{a = -\frac{1}{64},\ b = \frac{13}{64},\ c = -\frac{63}{64},\ d = \frac{243}{64}}$$

【9】(1) $x = 2 - i$ より，

$$\begin{aligned} x &= 2 - i \\ x - 2 &= -i \\ (x-2)^2 &= (-i)^2 \\ x^2 - 4x + 4 &= i^2 \\ x^2 - 4x + 4 &= -1 \\ x^2 - 4x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

よって，

$$x^2 - 4x + 5 = \mathbf{0}$$

(2) $P(x) = x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 11x - 10$ とおく．
$P(x)$ を $x^2 - 4x + 5$ で割ると，

$$\begin{array}{r|rrrrr} & x^2 & -4x & -1 & & \\ \hline x^2-4x+5 & x^4 & -8x^3 & +20x^2 & -11x & -10 \\ & x^4 & -4x^3 & +5x^2 & & \\ \hline & & -4x^3 & +15x^2 & -11x & \\ & & -4x^3 & +16x^2 & -20x & \\ \hline & & & -x^2 & +9x & -10 \\ & & & -x^2 & +4x & -5 \\ \hline & & & & 5x & -5 \end{array}$$

よって，

$$P(x) = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x - 1) + 5x - 5$$

これに $x = 2 - i$ を代入すると，
(1) の結果より，

$$\begin{aligned} P(2-i) &= 0 + 5 \cdot (2 - i) - 5 \\ &= 10 - 5i - 5 \\ &= \mathbf{5 - 5}\boldsymbol{i} \end{aligned}$$

【10】(1) $x = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ より，

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ 2x &= -1 + \sqrt{3}i \\ 2x + 1 &= \sqrt{3}i \\ (2x+1)^2 &= (\sqrt{3}i)^2 \\ 4x^2 + 4x + 1 &= 3i^2 \\ 4x^2 + 4x + 1 &= -3 \\ 4x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ x^2 + x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

よって，

$$x^2 - 3x + 4 = (x^2 + x + 1) - 4x + 3$$

とし，$P(x) = (x^2+x+1) - 4x + 3$ とする．

これに $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を代入すると，

$$\begin{aligned} P\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) &= 0 - 4 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + 3 \\ &= 2 - 2\sqrt{3}i + 3 \\ &= \boldsymbol{5 - 2\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

(2) $Q(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 6x - 6$ とおく．

$Q(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割ると，

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & x^3 & -3x^2 & +4x & & & \\ \hline
x^2+x+1 & x^5 & -2x^4 & +2x^3 & +x^2 & +6x & -6 \\
 & x^5 & +x^4 & +x^3 & & & \\ \cline{2-7}
 & & -3x^4 & +x^3 & +x^2 & & \\
 & & -3x^4 & -3x^3 & -3x^2 & & \\ \cline{3-7}
 & & & 4x^3 & +4x^2 & +6x & \\
 & & & 4x^3 & +4x^2 & +4x & \\ \cline{4-7}
 & & & & & 2x & -6
\end{array}$$

よって，

$$Q(x) = (x^2+x+1)(x^3 - 3x^2 + 4x) + 2x - 6$$

これに $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を代入すると，

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) &= 0 + 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - 6 \\ &= -1 + \sqrt{3}i - 6 \\ &= \boldsymbol{-7 + \sqrt{3}i} \end{aligned}$$

【11】(1) $P(x)=3x^3+ax^2-bx-3$ とおく．

$P(x)$ が $(x+3)(x-1)$ で割り切れることから，$P(x)$ は $(x+3)(x-1)$ を因数にもつ．

したがって，$P(x)$ は $x+3$, $x-1$ の両方で割り切れる．

因数定理から，$P(-3)=0$ かつ $P(1)=0$ が成り立つ．

これより，

$$\begin{aligned}&P(-3)\\ =&3\cdot(-3)^3+a\cdot(-3)^2-b\cdot(-3)-3\\ =&-81+9a+3b-3\\ =&9a+3b-84\end{aligned}$$

から，

$$\begin{aligned}9a+3b-84&=0\\ 9a+3b&=84\\ 3a+b&=28 \ \cdots①\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}P(1)&=3\cdot1^3+a\cdot1^2-b\cdot1-3\\ &=3+a-b-3\\ &=a-b\end{aligned}$$

から，

$$a-b=0 \ \cdots②$$

①＋② より，

$$\begin{aligned}4a&=28\\ \therefore\ a&=7\end{aligned}$$

これを②に代入して，

$$\begin{aligned}7-b&=0\\ \therefore\ b&=7\end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=7,\ b=7}$$

(2) $P(x)=x^3+ax^2+x+b$ とおく．

$P(x)$ が $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ で割り切れることから，

$P(x)$ は $(x+3)(x-1)$ を因数にもつ．

したがって，$P(x)$ は $x+3$, $x-1$ の両方で割り切れる．

因数定理から，$P(-3)=0$ かつ $P(1)=0$ が成り立つ．

これより，

$$\begin{aligned}&P(-3)\\ =&(-3)^3+a\cdot(-3)^2+(-3)+b\\ =&-27+9a-3+b\\ =&9a+b-30\end{aligned}$$

から，

$$\begin{aligned}9a+b-30&=0\\ 9a+b&=30 \ \cdots①\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}P(1)&=1^3+a\cdot1^2+1+b\\ &=1+a+1+b\\ &=a+b+2\end{aligned}$$

から，

$$\begin{aligned}a+b+2&=0\\ a+b&=-2 \ \cdots②\end{aligned}$$

①－② より，

$$\begin{aligned}8a&=32\\ a&=4\end{aligned}$$

これを②に代入して，

$$\begin{aligned}4+b&=-2\\ b&=-6\end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=4,\ b=-6}$$

(3) $P(x)=x^4+3x^3+ax^2+bx+c$ とおく．

$P(x)$ が $(x+1)(x-1)(x-2)$ で割り切れることから，

$P(x)$ は $(x+1)(x-1)(x-2)$ を因数にもつ．

したがって，$P(x)$ は $x+1$，$x-1$，$x-2$ で割り切れる．

因数定理から，$P(-1)=0$ かつ $P(1)=0$ かつ $P(2)=0$ が成り立つ．

これより，

$$\begin{aligned}P(-1)&=(-1)^4+3\cdot(-1)^3\\&\qquad+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c\\&=1-3+a-b+c\\&=a-b+c-2\end{aligned}$$

から，

$$\begin{aligned}a-b+c-2&=0\\a-b+c&=2\quad\cdots①\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}P(1)&=1^4+3\cdot1^3+a\cdot1^2+b\cdot1+c\\&=1+3+a+b+c\end{aligned}$$

から，

$$\begin{aligned}1+3+a+b+c&=0\\a+b+c&=-4\quad\cdots②\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}P(2)&=2^4+3\cdot2^3+a\cdot2^2+b\cdot2+c\\&=16+24+4a+2b+c\end{aligned}$$

から，

$$\begin{aligned}16+24+4a+2b+c&=0\\4a+2b+c&=-40\quad\cdots③\end{aligned}$$

② − ① より，

$$\begin{aligned}2b&=-6\\b&=-3\quad\cdots④\end{aligned}$$

④を①に代入すると，

$$\begin{aligned}a-(-3)+c&=2\\a+c&=-1\quad\cdots①'\end{aligned}$$

④を③に代入すると，

$$\begin{aligned}4a+2\cdot(-3)+c&=-40\\4a+c&=-34\quad\cdots③'\end{aligned}$$

③′ − ①′ より，

$$\begin{aligned}3a&=-33\\a&=-11\quad\cdots⑤\end{aligned}$$

⑤を ①′ に代入して，

$$\begin{aligned}-11+c&=-1\\c&=10\quad\cdots⑥\end{aligned}$$

④，⑤，⑥より，

$$\boldsymbol{a=-11,\ b=-3,\ c=10}$$

(4) $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく.
$P(x)$ は $x^2-1=(x+1)(x-1)$ で割り切れることから,
$P(x)$ は $(x+1)(x-1)$ を因数にもつ.
したがって，$P(x)$ は $x+1$, $x-1$ の両方で割り切れる.
因数定理から，$P(-1)=0$ かつ $P(1)=0$ が成り立つ.

これより,

$$\begin{aligned}&P(-1)\\=&(-1)^3+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c\\=&-1+a-b+c\end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned}-1+a-b+c&=0\\a-b+c&=1 \quad \cdots①\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}P(1)&=1^3+a\cdot1^2+b\cdot1+c\\&=1+a+b+c\end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned}1+a+b+c&=0\\a+b+c&=-1 \quad \cdots②\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}&P(-2)\\=&(-2)^3+a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c\\=&-8+4a-2b+c\end{aligned}$$

$P(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りは 3 であるから，剰余の定理から,

$$\begin{aligned}-8+4a-2b+c&=3\\4a-2b+c&=11 \quad \cdots③\end{aligned}$$

② − ① より,

$$\begin{aligned}2b&=-2\\b&=-1 \quad \cdots④\end{aligned}$$

④を①に代入すると,

$$\begin{aligned}a+(-1)+c&=-1\\a+c&=0 \quad \cdots①'\end{aligned}$$

④を③に代入すると,

$$\begin{aligned}4a-2\cdot(-1)+c&=11\\4a+c&=9 \quad \cdots③'\end{aligned}$$

③′ − ①′ より,

$$\begin{aligned}3a&=9\\a&=3 \quad \cdots⑤\end{aligned}$$

⑤を ①′ に代入して,

$$\begin{aligned}3+c&=0\\c&=-3 \quad \cdots⑥\end{aligned}$$

④，⑤，⑥より,

$$\boldsymbol{a=3,\ b=-1,\ c=-3}$$

【12】(1) 2 次式で割ると余りは 1 次以下の式だから，
整式 $f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $g(x)$ とし，余りを $ax+b$ とすると，

$$f(x)=(x-1)(x-2)g(x)+ax+b$$

剰余の定理より，$f(1)=2$，$f(2)=3$ が成り立つ．

したがって，

$$\begin{aligned}f(1)&=(1-1)(1-2)g(1)+a\cdot 1+b\\&=0\cdot(-1)\cdot g(1)+a+b\\&=a+b\end{aligned}$$

から，

$$a+b=2 \quad \cdots ①$$

一方，

$$\begin{aligned}f(2)&=(2-1)(2-2)g(2)+a\cdot 2+b\\&=1\cdot 0\cdot g(2)+2a+b\\&=2a+b\end{aligned}$$

から，

$$2a+b=3 \quad \cdots ②$$

② − ① より，

$$a=1$$

これを①に代入して，

$$\begin{aligned}1+b&=2\\b&=1\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは，

$$\boldsymbol{x+1}$$

(2) 2 次式で割ると余りは 1 次以下の式だから，
整式 $f(x)$ を $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$ で割ったときの商を $g(x)$ とし，
余りを $ax+b$ とすると，

$$f(x)=(x-2)(x-4)g(x)+ax+b$$

剰余の定理より，$f(2)=3$，$f(4)=17$ が成り立つ．

したがって，

$$\begin{aligned}f(2)&=(2-2)(2-4)g(2)+a\cdot 2+b\\&=0\cdot(-2)\cdot g(2)+2a+b\\&=2a+b\end{aligned}$$

から，

$$2a+b=3 \quad \cdots ①$$

一方，

$$\begin{aligned}f(4)&=(4-2)(4-4)g(4)+a\cdot 4+b\\&=2\cdot 0\cdot g(4)+4a+b\\&=4a+b\end{aligned}$$

から，

$$4a+b=17 \quad \cdots ②$$

② − ① より，

$$\begin{aligned}2a&=14\\a&=7\end{aligned}$$

これを①に代入して，

$$\begin{aligned}14+b&=3\\b&=-11\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ を x^2-6x+8 で割ったときの余りは，

$$\boldsymbol{7x-11}$$

(3) 3 次式で割ると余りは 2 次以下の式だから，
整式 $f(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $g(x)$ とし，
余りを ax^2+bx+c とすると，

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)g(x)+ax^2+bx+c$$

剰余の定理より，$f(1)=2$，$f(2)=3$，$f(3)=6$ が成り立つ．
したがって，

$$\begin{aligned} f(1)&=(1-1)(1-2)(1-3)g(1)+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \\ &=a+b+c \end{aligned}$$

から，

$$a+b+c=2 \ \cdots ①$$

一方，

$$\begin{aligned} f(2)&=(2-1)(2-2)(2-3)g(2)+a\cdot 2^2+b\cdot 2+c \\ &=4a+2b+c \end{aligned}$$

から，

$$4a+2b+c=3 \ \cdots ②$$

また，

$$\begin{aligned} f(3)&=(3-1)(3-2)(3-3)g(3)+a\cdot 3^2+b\cdot 3+c \\ &=9a+3b+c \end{aligned}$$

から，

$$9a+3b+c=6 \ \cdots ③$$

①〜③より，

$$\begin{cases} a+b+c=2 & \cdots ① \\ 4a+2b+c=3 & \cdots ② \\ 9a+3b+c=6 & \cdots ③ \end{cases}$$

② − ① より，$3a+b=1 \ \cdots ④$ ③ − ② より，$5a+b=3 \ \cdots ⑤$ ⑤ − ④ より，

$$\begin{aligned} &2a=2 \\ \therefore\ &a=1 \end{aligned}$$

④ より，$b=-2$ ① より，$c=3$ よって，$f(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りは，

$$\boldsymbol{x^2-2x+3}$$

(4) 2 次式で割ると余りは 1 次以下の式だから，
整式 $f(x)$ を $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $g(x)$ とし，余りを $ax+b$ とすると，

$$f(x)=(x-1)(x-2)g(x)+ax+b\ \cdots①$$

整式 $f(x)$ を x^2-4x+3，x^2-5x+6 で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-4x+3)Q_1(x)-x+10\\&=(x-1)(x-3)Q_1(x)-x+10\ \cdots②\\f(x)&=(x^2-5x+6)Q_2(x)+2x+1\\&=(x-2)(x-3)Q_2(x)+2x+1\ \cdots③\end{aligned}$$

①，②に $x=1$ を代入すると，

$$f(1)=a+b=9\ \cdots④$$

①，③に $x=2$ とすると，

$$f(2)=2a+b=5\ \cdots⑤$$

⑤ − ④ より，

$$a=-4$$

これを④に代入して，

$$\begin{aligned}&-4+b=9\\&\quad\therefore\ b=13\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りは，

$$\boldsymbol{-4x+13}$$

１８章　複素数と高次方程式（３）－高次方程式－

問題

【1】(1) $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ とおくと，$f(2)=0$ だから，$f(x)$ は $x-2$ を因数にもつ．
組立除法より，

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3-2x^2+x-2 \\
&= (x-2)(x^2+1)
\end{aligned}
$$

$f(x)=0$ だから，$(x-2)(x^2+1)=0$
したがって，

$$x-2=0 \text{ または } x^2+1=0$$

$x^2+1=0$ を解くと，$x=\pm i$
ゆえに，

$$\boldsymbol{x=2,\ \pm i}$$

(2) $f(x)=2x^3-3x^2+1$ とおくと，$f(1)=0$ だから，$f(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
組立除法より，

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\
 & & 2 & -1 & -1 \\
\hline
 & 2 & -1 & -1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3-3x^2+1 \\
&= (x-1)(2x^2-x-1)
\end{aligned}
$$

$f(x)=0$ だから，

$$
\begin{aligned}
(x-1)(2x^2-x-1)&=0 \\
(x-1)(2x+1)(x-1)&=0 \\
(x-1)^2(2x+1)&=0
\end{aligned}
$$

したがって，

$$x-1=0 \text{ または } 2x+1=0$$

ゆえに，$\boldsymbol{x=1,\ -\dfrac{1}{2}}$

(3) $f(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$ とおくと，$f(1)=0$ だから，$f(x)$ は $x-1$ を因数にもつ.
組立除法より，

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
 & & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

よって，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4-3x^3+3x^2-3x+2 \\ &= (x-1)(x^3-2x^2+x-2) \end{aligned}$$

ここで，$g(x)=x^3-2x^2+x-2$ とおくと，$g(2)=0$ だから，$g(x)$ は $x-2$ を因数にもつ.
組立除法より，

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\
 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

よって，

$$g(x)=(x-2)(x^2+1)$$

であるので，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4-3x^3+3x^2-3x+2 \\ &= (x-1)(x-2)(x^2+1) \end{aligned}$$

$f(x)=0$ だから，

$$(x-1)(x-2)(x^2+1)=0$$

したがって，

$$x-1=0 \text{ または } x-2=0 \text{ または } x^2+1=0$$

$x^2+1=0$ を解くと，

$$x=\pm i$$

ゆえに，$\boldsymbol{x=1,\ 2,\ \pm i}$

(4) $f(x)=x^4-x^3-5x^2-x-6$ とおくと，$f(3)=0$ だから，$f(x)$ は $x-3$ を因数にもつ.
組立除法より，

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 1 & -1 & -5 & -1 & -6 \\ & & 3 & 6 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

よって，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4-x^3-5x^2-x-6 \\ &= (x-3)(x^3+2x^2+x+2) \end{aligned}$$

ここで，$g(x)=x^3+2x^2+x+2$ とおくと，$g(-2)=0$ だから，$g(x)$ は $x+2$ を因数にもつ.
組立除法より，

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

よって，

$$g(x)=(x+2)\left(x^2+1\right)$$

であるので，

$$f(x)=(x-3)(x+2)(x^2+1)$$

$f(x)=0$ だから，

$$(x-3)(x+2)(x^2+1)=0$$

したがって，

$$x-3=0 \text{ または } x+2=0 \text{ または } x^2+1=0$$

$x^2+1=0$ を解くと，$x=\pm i$
ゆえに，$\boldsymbol{x=3,\ -2,\ \pm i}$

【2】(1) $x=0$ のとき,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 0^4+4\cdot 0^3+5\cdot 0^2+4\cdot 0+1\\ &= 1 \fallingdotseq 0\end{aligned}$$

となるので，$x=0$ は解ではない.
そこで，両辺を x^2 $(\fallingdotseq 0)$ で割って整理すると,

$$\begin{aligned}x^2+4x+5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}&=0\\ \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5&=0\end{aligned}$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}x^2+\frac{1}{x^2}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\\ &=t^2-2\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}(t^2-2)+4t+5&=0\\ \boldsymbol{t^2+4t+3}&\boldsymbol{=0}\end{aligned}$$

(2) (1) より,

$$\begin{aligned}t^2+4t+3&=0\\ (t+1)(t+3)&=0\\ t&=-1,\ -3\end{aligned}$$

$t=-1$ のとき,

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}&=-1\\ x^2+1&=-x\\ x^2+x+1&=0 \qquad \therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

$t=-3$ のとき,

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}&=-3\\ x^2+1&=-3x\\ x^2+3x+1&=0 \qquad \therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}}$$

【3】1 の虚数立方根 ω は,

$$\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

をみたす.

(1)

$$\begin{aligned}\omega^6 &= \omega^{3\times 2}\\ &= (\omega^3)^2\\ &= 1^2\\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\omega^{91} + \omega^{38}\\ =&\omega^{3\times 30+1} + \omega^{3\times 12+2}\\ =&\omega^{3\times 30}\cdot\omega + \omega^{3\times 12}\cdot\omega^2\\ =&(\omega^3)^{30}\cdot\omega + (\omega^3)^{12}\cdot\omega^2\\ =&1^{30}\cdot\omega + 1^{12}\cdot\omega^2\\ =&\omega + \omega^2\\ =&(\omega^2+\omega+1) - 1\\ =&0 - 1\\ =&\mathbf{-1}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\omega^{12} + \omega^9 + 1 &= \omega^{3\times 4} + \omega^{3\times 3} + 1\\ &= (\omega^3)^4 + (\omega^3)^3 + 1\\ &= 1^4 + 1^3 + 1\\ &= 1 + 1 + 1\\ &= \mathbf{3}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\omega^5 + \omega^4 + \omega^3 &= \omega^3(\omega^2 + \omega + 1)\\ &= 1\cdot 0\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}(\omega - 5)(\omega + 6) &= \omega^2 + \omega - 30\\ &= (\omega^2 + \omega + 1) - 31\\ &= 0 - 31\\ &= \mathbf{-31}\end{aligned}$$

(6) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ から,

$$\omega^2 + 1 = -\omega,\ \omega + 1 = -\omega^2,\ \omega + \omega^2 = -1$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}(1 - \omega + \omega^2)^4 + (1 + \omega - \omega^2)^4 &= (-\omega - \omega)^4 + (-\omega^2 - \omega^2)^4\\ &= (-2\omega)^4 + (-2\omega^2)^4\\ &= 16\omega^4 + 16\omega^8\\ &= 16\omega^{3+1} + 16\omega^{3\times 2+2}\\ &= 16\cdot\omega^3\cdot\omega + 16\cdot\omega^{3\times 2}\cdot\omega^2\\ &= 16\cdot\omega^3\cdot\omega + 16\cdot(\omega^3)^2\cdot\omega^2\\ &= 16\cdot 1\cdot\omega + 16\cdot 1^2\cdot\omega^2\\ &= 16\omega + 16\omega^2\\ &= 16(\omega + \omega^2)\\ &= 16\cdot(-1)\\ &= \mathbf{-16}\end{aligned}$$

【4】(1) $x^2+x+1=0$ は 2 個の虚数解をもち，その 1 つを ω とすると，

$$\begin{aligned}\omega^3-1&=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)\\&=0\end{aligned}$$

となるから，

$$\omega^3=1$$

が成り立つ．
ここで，$f(x)=x^{11}-2x^{10}$ とおく．
2 次式で割ると，余りは 1 次式以下だから，整式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $g(x)$ とし，余りを $ax+b$ とすると，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+x+1)g(x)+ax+b\\&=(x-\omega)(x-\omega^2)g(x)+ax+b\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}f(\omega)&=\omega^{11}-2\omega^{10}\\&=\omega^{3\times3+2}-2\omega^{3\times3+1}\\&=\omega^{3\times3}\cdot\omega^2-2\cdot\omega^{3\times3}\cdot\omega\\&=(\omega^3)^3\cdot\omega^2-2\cdot(\omega^3)^3\cdot\omega\\&=1^3\cdot\omega^2-2\cdot1^3\cdot\omega\\&=\omega^2-2\omega\\&=(-\omega-1)-2\omega\\&=-3\omega-1\end{aligned}$$

より，$f(\omega)=-3\omega-1$ が成り立つ．
したがって，

$$\begin{aligned}f(\omega)&=(\omega-\omega)(\omega-\omega^2)g(\omega)+a\omega+b\\&=a\omega+b\end{aligned}$$

から，

$$a\omega+b=-3\omega-1$$

ω は虚数，a，b は実数なので，

$$a=-3,\ b=-1$$

よって，$f(x)$ を x^2+x+1 で割った余りは $\boldsymbol{-3x-1}$

(2) $x^3-1=0$ は1個の実数解と2個の虚数解をもち，その1つを ω とする．
ここで，$f(x)=(x+1)^6$ とおく．
3次式で割ると，余りは2次式以下だから，整式 $f(x)$ を x^3-1 で割ったときの商を $g(x)$ とし，余りを ax^2+bx+c とすると，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3-1)g(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)g(x)+ax^2+bx+c \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} f(\omega) &= (\omega+1)^6 \\ &= (-\omega^2)^6 \\ &= \omega^{12} \\ &= \omega^{3\times 4} \\ &= (\omega^3)^4 \\ &= 1^4 \\ &= 1 \end{aligned}$$

より，$f(\omega)=1$ が成り立つ．
したがって，

$$\begin{aligned} f(\omega) &= (\omega-1)(\omega-\omega)(\omega-\omega^2)g(\omega)+a\omega^2+b\omega+c \\ &= a\omega^2+b\omega+c \\ &= a(-\omega-1)+b\omega+c \\ &= -a\omega-a+b\omega+c \\ &= (-a+b)\omega+(-a+c) \end{aligned}$$

から，

$$(-a+b)\omega+(-a+c)=1$$

ここで，ω は虚数，$-a+b$，$-a+c$ は実数なので，

$$-a+b=0,\ -a+c=1$$

また，

$$\begin{aligned} f(1) &= (1+1)^6 \\ &= 2^6 \\ &= 64 \end{aligned}$$

より，$f(1)=64$ が成り立つ．
したがって，

$$\begin{aligned} f(1) &= (1-1)(1-\omega)(1-\omega^2)g(1)+a+b+c \\ &= a+b+c \end{aligned}$$

から，

$$a+b+c=64$$

よって，

$$a=21,\ b=21,\ c=22$$

よって，$f(x)$ を x^3-1 で割った余りは，$\boldsymbol{21x^2+21x+22}$

(3) $x^2+x+1=0$ は 2 個の虚数解をもち，その 1 つを ω とする．
ここで，$f(x)=(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ とおく．
2 次式で割ると，余りは 1 次式以下だから，整式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $g(x)$ とし，余りを $ax+b$ とすると，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)g(x)+ax+b \\ &= (x-\omega)(x-\omega^2)g(x)+ax+b \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} f(\omega) &= (\omega^{100}+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1 \\ &= (\omega^{3\times33+1}+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1 \\ &= (\omega^{3\times33}\cdot\omega+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1 \\ &= \{(\omega^3)^{33}\cdot\omega+1\}^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1 \\ &= (1^{33}\cdot\omega+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1 \\ &= (\omega+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1 \\ &= (-\omega^2)^{100}+(-\omega)^{100}+1 \\ &= \omega^{200}+\omega^{100}+1 \\ &= \omega^{3\times66+2}+\omega^{3\times33+1}+1 \\ &= \omega^{3\times66}\cdot\omega^2+\omega^{3\times33}\cdot\omega+1 \\ &= (\omega^3)^{66}\cdot\omega^2+(\omega^3)^{33}\cdot\omega+1 \\ &= 1^{66}\cdot\omega^2+1^{33}\cdot\omega+1 \\ &= \omega^2+\omega+1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より，$f(\omega)=0$ が成り立つ．
したがって，

$$\begin{aligned} f(\omega) &= (\omega-\omega)(\omega-\omega^2)g(\omega)+a\omega+b \\ &= a\omega+b \end{aligned}$$

から，

$$a\omega+b=0$$

ω は虚数，a，b は実数なので，

$$a=0,\ b=0$$

よって，$f(x)$ を x^2+x+1 で割った余りは $\mathbf{0}$

(4) $x^2+x+1=0$ は 2 個の虚数解をもち，その 1 つを a とすると，

$$\begin{aligned} a^3-1 &= (a-1)(a^2+a+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから，

$$a^3=1$$

が成り立つ．

ここで，$f(a)=a^{3000}+a^{2000}+a^{1000}+1$ とおく．

$$\begin{aligned} f(a) &= a^{3000}+a^{2000}+a^{1000}+1 \\ &= a^{3\times1000}+a^{3\times666+2}+a^{3\times333+1}+1 \\ &= a^{3\times1000}+a^{3\times666}\cdot a^2+a^{3\times333}\cdot a+1 \\ &= (a^3)^{1000}+(a^3)^{666}\cdot a^2+(a^3)^{333}\cdot a+1 \\ &= 1^{1000}+1^{666}\cdot a^2+1^{333}\cdot a+1 \\ &= 1+a^2+a+1 \\ &= (a^2+a+1)+1 \\ &= 0+1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって，**1**

(5) $x^2+x+1=0$ は 2 個の虚数解をもち，その 1 つを ω とすると，

$$\begin{aligned}\omega^3-1&=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)\\&=0\end{aligned}$$

となるから，$\omega^3=1$ が成り立つ.
ここで，$f(x)=x^{20}+ax^{10}+b$ とおく.
整式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $g(x)$ とすると，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+x+1)g(x)\\&=(x-\omega)(x-\omega^2)g(x)\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}f(\omega)&=\omega^{20}+a\omega^{10}+b\\&=\omega^{3\times6+2}+a\omega^{3\times3+1}+b\\&=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+a\cdot(\omega^3)^3\cdot\omega+b\\&=1^6\cdot\omega^2+a\cdot1^3\cdot\omega+b\\&=\omega^2+a\omega+b\\&=(-\omega-1)+a\omega+b\\&=(a-1)\omega+(b-1)\end{aligned}$$

因数定理より，$f(\omega)=0$ が成り立つ.
したがって，

$$(a-1)\omega+(b-1)=0$$

ω は虚数，a, b は実数なので，

$$a=1,\ b=1$$

よって，

$$\boldsymbol{a=1,\ b=1}$$

【5】(1)
$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma &= -\frac{0}{1}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha &= \frac{-4}{1}\\ &= \mathbf{-4}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma &= -\frac{1}{1}\\ &= \mathbf{-1}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} &= \frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\\ &= \frac{-4}{-1}\\ &= \mathbf{4}\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ &= 0^2-2\cdot(-4)=\mathbf{8}\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= (\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma\\ &= 0\cdot\{8-(-4)\}+3\cdot(-1)=\mathbf{-3}\end{aligned}$$

(7) α, β, γ は3次方程式 $x^3-4x+1=0$ の3つの解だから,

$$x^3-4x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と表せる．この式に $x=1$ を代入して,

$$\begin{aligned}1^3-4\cdot1+1 &= (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\\ 1-4+1 &= (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\\ -2 &= (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\\ (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) &= \mathbf{-2}\end{aligned}$$

(8) $\alpha+\beta+\gamma=0$ より,

$$\alpha+\beta=-\gamma,\ \beta+\gamma=-\alpha,\ \gamma+\alpha=-\beta$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) &= (-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)\\ &= -\alpha\beta\gamma\\ &= -(-1)\\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

【6】(1) $f(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - 4$ とおく.

$f(x) = 0$ の解は 1，2 であるから，

$$
\begin{aligned}
&f(1)\\
=&1^4 - 3 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 4\\
=&a + b - 6
\end{aligned}
$$

よって，因数定理より，

$$
\begin{aligned}
a + b - 6 &= 0\\
a + b &= 6 \ \cdots ①
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&f(2)\\
=&2^4 - 3 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4\\
=&4a + 2b - 12
\end{aligned}
$$

したがって，因数定理より，

$$
\begin{aligned}
4a + 2b - 12 &= 0\\
4a + 2b &= 12\\
2a + b &= 6 \ \cdots ②
\end{aligned}
$$

② − ① より，

$$a = 0$$

これを①に代入して，

$$
\begin{aligned}
0 + b &= 6\\
b &= 6
\end{aligned}
$$

$a = 0$, $b = 6$ を $f(x)$ に代入すると，

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x - 4$$

$f(1) = 0$ だから，組立除法より，

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -3 & 0 & 6 & -4\\
 & & 1 & -2 & -2 & 4\\
\hline
 & 1 & -2 & -2 & 4 & \boxed{0}
\end{array}
$$

よって，

$$f(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 - 2x + 4)$$

となる.

$f(2) = 0$ より，

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -2 & -2 & 4\\
 & & 2 & 0 & -4\\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

よって，

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - 2)$$

となる.

$x^2 - 2 = 0$ を解くと，

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 2\\
x &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{a = 0,\ b = 6,}\ \textbf{残りの解は}\ \boldsymbol{\pm\sqrt{2}}$$

(2) 実数係数の方程式が $2-i$ を解にもつから，それと共役な $2+i$ も解である．したがって，残りの解を α とすると，3 次方程式の解と係数の関係より，

$$\begin{aligned}(2-i)+(2+i)+\alpha &= -a \ \cdots ①\\ (2-i)(2+i)+(2+i)\alpha+(2-i)\alpha &= b \ \cdots ②\\ (2-i)(2+i)\alpha &= -15 \ \cdots ③\end{aligned}$$

③から，

$$\begin{aligned}5\alpha &= -15\\ \alpha &= -3 \ \cdots ④\end{aligned}$$

④を①に代入して，

$$\begin{aligned}(2-i)+(2+i)+(-3) &= -a\\ 1 &= -a\\ a &= -1 \ \cdots ⑤\end{aligned}$$

また，④を②に代入して，

$$\begin{aligned}(2-i)(2+i)+(2+i)\cdot(-3)+(2-i)\cdot(-3) &= b\\ -7 &= b\\ b &= -7\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a=-1}$**，**$\boldsymbol{b=-7}$**，残りの解は**　$\boldsymbol{-3}$**，**$\boldsymbol{2+i}$

(3) 実数係数の方程式が $-1+i$ を解にもつから，それと共役な $-1-i$ も解である．したがって，残りの解を α とすると，3 次方程式の解と係数の関係より，

$$\begin{aligned}(-1+i)+(-1-i)+\alpha &= 0 \ \cdots ①\\ (-1+i)(-1-i)+(-1-i)\alpha+(-1+i)\alpha &= a \ \cdots ②\\ (-1+i)(-1-i)\alpha &= -b \ \cdots ③\end{aligned}$$

①から，

$$\begin{aligned}-2+\alpha &= 0\\ \alpha &= 2 \ \cdots ④\end{aligned}$$

④を②に代入して，

$$\begin{aligned}(-1+i)(-1-i)+(-1-i)\cdot 2+(-1+i)\cdot 2 &= a\\ -2 &= a\\ a &= -2 \ \cdots ⑤\end{aligned}$$

④を③に代入して，

$$\begin{aligned}(-1+i)(-1-i)\cdot 2 &= -b\\ 4 &= -b\\ b &= -4\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a=-2}$**，**$\boldsymbol{b=-4}$**，残りの解は**　$\boldsymbol{2}$**，**$\boldsymbol{-1-i}$

問題

【1】(1) $\left(\dfrac{-3+1}{2}, \dfrac{4+1}{2}\right) = \left(\mathbf{-1}, \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)$　**(答)**

(2) $\left(\dfrac{1\times(-3)+2\times 1}{2+1}, \dfrac{1\times 4+2\times 1}{2+1}\right) = \left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \mathbf{2}\right)$　**(答)**

(3) $\left(\dfrac{-2\times(-3)+3\times 1}{3-2}, \dfrac{-2\times 4+3\times 1}{3-2}\right) = (\mathbf{9}, -\mathbf{5})$　**(答)**

(4) $\left(\dfrac{-4\times(-3)+1\times 1}{1-4}, \dfrac{-4\times 4+1\times 1}{1-4}\right) = \left(-\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{3}}, \mathbf{5}\right)$　**(答)**

(5) T は AB を 1 : 2 に内分する点だから

$$\mathrm{T}\left(\frac{-3\times 2+1\times 1}{1+2}, \frac{4\times 2+1\times 1}{1+2}\right) = \left(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}, \mathbf{3}\right)$$　**(答)**

【2】$\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$ とおくと，それぞれの条件より，

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2,\ \frac{y_1+y_2}{2}=0$$
$$\frac{x_1+x_3}{2}=3,\ \frac{y_1+y_3}{2}=1$$
$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=3,\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}=0$$

すなわち，

$$x_1+x_2=4,\ y_1+y_2=0 \quad \cdots ①$$
$$x_1+x_3=6,\ y_1+y_3=2 \quad \cdots ②$$
$$x_1+x_2+x_3=9,\ y_1+y_2+y_3=0 \quad \cdots ③$$

③ − ① より，

$$x_3=5,\ y_3=0$$

③ − ② より，

$$x_2=3,\ y_2=-2$$

これを ① に代入して，

$$x_1=1,\ y_1=2$$

以上より，

A(1, 2), B(3, − 2), C(5, 0)　**(答)**

【3】$a=1$ のとき，A$(0,\ -1)$，B$(0,\ 5)$，C$(-3,\ 4)$ は同一直線上になく，
$a=4$ のとき，A$(0,\ -1)$，B$(3,\ 5)$，C$(3,\ 1)$ は同一直線上にない．
よって，$a \fallingdotseq 1,\ 4$ のもとで考える．
AB の傾きは,

$$\frac{5-(-1)}{(a-1)-0}=\frac{6}{a-1}$$

BC の傾きは,

$$\frac{(-a+5)-5}{(2a-5)-(a-1)}=\frac{-a}{a-4}$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあることより,

$$\frac{6}{a-1}=\frac{-a}{a-4} \qquad \therefore\ 6(a-4)=-a(a-1)$$

整理して,

$$\begin{aligned} &a^2+5a-24=0 \\ \therefore\ &(a+8)(a-3)=0 \end{aligned}$$

より,

$a=-8,\ 3$　　(答)

＜別解＞

$a \fallingdotseq 1$ であることをことわってから，次のように, 直線 AB を求め, それが点 C を通るとして解いてもよい.

直線 AB は,

$$y=\frac{6}{a-1}x-1$$

これが C を通るので,

$$-a+5=\frac{6}{a-1}(2a-5)-1$$

整理して,

$$a^2+5a-24=0$$

(以下同様)

【4】(1) 直線の傾きは, x 軸の正の向きと直線のなす角を θ として, $\tan\theta$ と表される.
よって, 傾きは $\tan 135^\circ = -1$ だから,

$$y = -1(x+1)+3$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = -x + 2} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 2 点 $(3,\ 5)$, $(-6,\ 2)$ を通るから, 求める直線の傾きは

$$\frac{5-2}{3-(-6)} = \frac{1}{3}$$

である. よって, 求める直線の方程式は,

$$y = \frac{1}{3}(x-3)+5$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + 4} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) 2 点の x 座標がともに -3 だから, 求める直線の方程式は,

$$\boldsymbol{x = -3} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) 2 点 $(3,\ 0)$, $(0,\ -2)$ を通るから, 求める直線の傾きは,

$$\frac{0-(-2)}{3-0} = \frac{2}{3}$$

である. よって, 求める直線の方程式は,

$$y = \frac{2}{3}(x-3)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{2}{3}x - 2} \qquad \textbf{(答)}$$

【5】(1) $x-2y+3=0$ より, $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

よって, 求める直線は, 傾きが $\dfrac{1}{2}$ で, 点 $(-1,2)$ を通るので,

$$y=\frac{1}{2}(x+1)+2$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $2x-y+3=0$ より, $y=2x+3$

よって, 求める直線の傾きを m とすると,

$$2m=-1 \quad \text{より}, \quad m=-\frac{1}{2}$$

点 $(-1,2)$ を通るので,

$$y=-\frac{1}{2}(x+1)+2$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) AB の中点を通り, 直線 AB に垂直な直線を求めればよい. AB の中点は

$$\left(\frac{-2+4}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(1,2)$$

直線 AB の傾きは,

$$\frac{3-1}{4-(-2)}=\frac{1}{3}$$

よって, 求める直線の傾きを m とすると,

$$\frac{1}{3}m=-1 \text{ より}, \ m=-3$$

したがって, 点 $(1,2)$ を通るので,

$$y=-3(x-1)+2$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y=-3x+5} \qquad \textbf{(答)}$$

<別解>

線分 AB の垂直二等分線 $\iff$ 2 点 A, B から等距離にある点の集合

つまり, 求める直線上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ は, PA=PB を満たす.

$$\therefore\ \mathrm{PA}^2=\mathrm{PB}^2 \text{ より}, \ (x+2)^2+(y-1)^2=(x-4)^2+(y-3)^2$$

整理して, $\boldsymbol{3x+y=5}$ **(答)**

(4) $5(x+2)+3(y-3)=10$

$$\therefore\ \boldsymbol{5x+3y=9} \qquad \textbf{(答)}$$

【6】Q(a, b) とおくと, 2 点 P, Q を通る直線は, 直線 $l : y = -3x$ と垂直であるから,

$$\frac{b-11}{a-5} = \frac{1}{3}$$

整理して,

$$a - 3b + 28 = 0 \quad \cdots ①$$

また, 2 点 P, Q の中点 $\left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+11}{2}\right)$ は, 直線 l 上にあるので,

$$3 \times \frac{a+5}{2} + \frac{b+11}{2} = 0$$
$$\therefore\ 3a + b + 26 = 0 \quad \cdots ②$$

①, ② より,

$$a = -\frac{53}{5},\ b = \frac{29}{5}$$

したがって,

$$\mathbf{Q}\left(-\frac{\mathbf{53}}{\mathbf{5}},\ \frac{\mathbf{29}}{\mathbf{5}}\right) \qquad \textbf{(答)}$$

【7】点 A の ℓ に関する対称点を $\mathrm{A}'(a,\ b)$ とすると，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{A'P}+\mathrm{PB}$$

であるので，AP+PB が最小になるのは，A′P+PB が最小，すなわち P が直線 A′B と ℓ の交点になるときである．
ここで，A′ について，

(i) $\mathrm{A'A}\perp\ell$

(ii) A′A の中点は ℓ 上に存在する

(i) より，A′A の傾きは $\dfrac{b}{a-1}$ であるので，

$$\frac{b}{a-1}\cdot 2=-1$$
$$a+2b=1 \quad \cdots ①$$

(ii) より，A′A の中点は，$\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ であるので，

$$\frac{b}{2}=2\cdot\frac{a+1}{2}+3$$
$$2a-b=-8 \quad \cdots ②$$

①,② を連立して解いて，$(a,\ b)=(-3,\ 2)$
よって，$\mathrm{A}'(-3,\ 2)$ より，直線 A′B の方程式は，

$$y=\frac{0-2}{3-(-3)}(x-3)$$
$$=-\frac{1}{3}x+1 \quad \cdots ③$$

これと，$\ell: y=2x+3$ との交点は ③ と連立させて

$$2x+3=-\frac{1}{3}x+1$$
$$\therefore\ x=-\frac{6}{7},\quad y=\frac{9}{7}$$

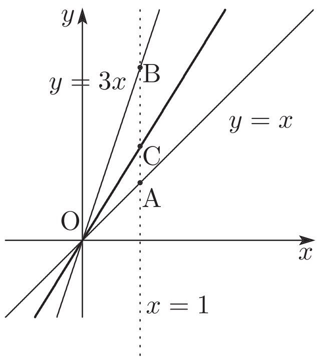
よって，

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}},\ \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}}\right) \quad \textbf{(答)}$$

また，AP+BP の最小値は，

$$\mathrm{A'B}=\sqrt{(-3-3)^2+(2-0)^2}$$
$$=\mathbf{2\sqrt{10}} \quad \textbf{(答)}$$

【8】 求める直線は明らかに原点 O を通る．
また，$y=x$，$y=3x$ と直線 $x=1$ との交点をそれぞれ A，B とすれば，A(1, 1)，B(1, 3) であり，求める直線は ∠AOB の二等分線と AB との交点 C を通る．
ここで，OC は ∠AOB の二等分線なので，



$$
\begin{aligned}
\mathrm{AC}:\mathrm{BC} &= \mathrm{AO}:\mathrm{BO}\\
&= \sqrt{1^2+1^2}:\sqrt{1^2+3^2}\\
&= \sqrt{2}:\sqrt{10}\\
&= 1:\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

よって，C は線分 AB を $1:\sqrt{5}$ の比に内分する点なので，C(1, y_0) とすると，

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{\sqrt{5}\cdot 1+1\cdot 3}{1+\sqrt{5}}\\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

よって，求める直線は，O(0, 0)，$\mathrm{C}\left(1,\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ を結ぶ直線なので，

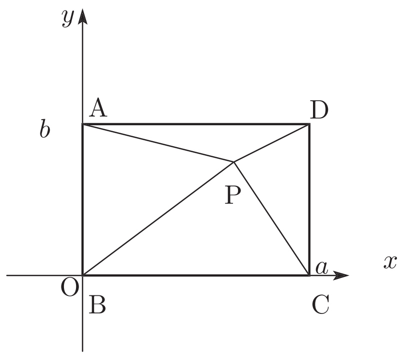
$$\boldsymbol{y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} \qquad \textbf{(答)}$$

【9】 右の図のように座標軸を設定し，

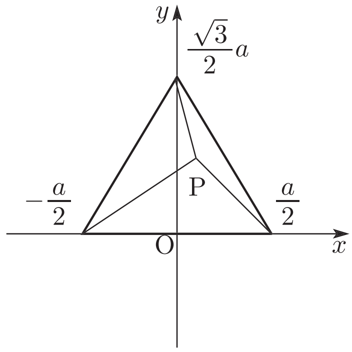
A$(0,b)$，B$(0,0)$，C$(a,0)$，D(a,b)，P(x,y)

とすると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PA}^2+\mathrm{PC}^2 &= x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2\\
&= x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2\\
&= \mathrm{PB}^2+\mathrm{PD}^2 \qquad \text{〔証明終〕}
\end{aligned}
$$



【10】 右図のように $\mathrm{A}\left(-\dfrac{a}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$, $\mathrm{C}\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,



$\mathrm{P}(x, y)$ とすると,

$$\mathrm{AP}^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2$$
$$\mathrm{BP}^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2$$
$$\mathrm{CP}^2 = x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

だから

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = 3x^2 + \left(\sqrt{3}y - \frac{a}{2}\right)^2 \geqq 0$$

よって示された.　　　〔証明終〕

【11】

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 4x - 2y + 3 &= 0 \\ x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3 &= 0 \\ x^2 + 4x - (y+3)(y-1) &= 0 \\ (x+y+3)\{x-(y-1)\} &= 0 \\ (x+y+3)(x-y+1) &= 0 \end{aligned}$$

より, 与式は 2 直線

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 & \cdots ① \\ x - y + 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

を表す. よって①＋②より

$2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -2$

これと①より

$y = -1$

したがって, 求める交点の座標は

$(\mathbf{-2}, \mathbf{-1})$　　**(答)**

添削課題

【1】(1) 点 P の座標を (x, y) とすると

$$x = \frac{2 \times 3 + 3 \times (-2)}{3+2} = 0$$
$$y = \frac{2 \times 9 + 3 \times 4}{3+2} = 6$$

したがって，$\mathbf{P(0, 6)}$　　(答)

(2) 点 Q の座標を (x, y) とすると

$$x = \frac{-1 \times 3 + 2 \times (-2)}{2-1} = -7$$
$$y = \frac{-1 \times 9 + 2 \times 4}{2-1} = -1$$

したがって，$\mathbf{Q(-7, -1)}$　　(答)

(3) 点 R の座標を (x, y) とすると，点 C は 2 点 B，R の中点であるから

$$\frac{-2+x}{2} = 2, \qquad \frac{4+y}{2} = 1$$

よって，$x = 6$，$y = -2$
したがって，$\mathbf{R(6, -2)}$　　(答)

【2】(1) 求める直線は y 軸に平行ではないので，

$$y = \frac{3-(-3)}{1-(-2)}(x-1) + 3$$
$$\boldsymbol{y = 2x + 1} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) x 軸の正の向きとなす角が 60° より，求める直線の傾きは $\sqrt{3}$ である．
また，(3，6) を通るので

$$y = \sqrt{3}(x-3) + 6$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = \sqrt{3}x + 6 - 3\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める直線は $x + 5y + c = 0$　(ただし, c は定数) とおける．
また，点 (5，-3) を通るので，

$$5 + 5 \cdot (-3) + c = 0 \qquad\qquad \therefore c = 10$$

したがって

$$\boldsymbol{x + 5y + 10 = 0} \qquad \textbf{(答)}$$

【3】(1) 2 直線が一致するためには，平行であることが必要なので

$$\begin{aligned} 2k\cdot(-k)-(k+2)(k-1)&=0\\ -3k^2-k+2&=0\\ 3k^2+k-2&=0\\ (3k-2)(k+1)&=0\\ \therefore\ k&=\frac{2}{3},\ -1 \end{aligned}$$

ここで，$k=-1$ のとき，2 直線は,

$$\begin{cases} -2x-2y+1=0 \iff x+y+\dfrac{1}{2}=0\\ x+y+2=0 \end{cases}$$

となり一致しない.

また，$k=\dfrac{2}{3}$ のとき，2 直線は,

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}y+1=0 \iff 4x-y+3=0\\[2ex] \dfrac{8}{3}x-\dfrac{2}{3}y+2=0 \iff 4x-y+3=0 \end{cases}$$

より一致する.

以上より，$\boldsymbol{k=\dfrac{2}{3}}$ **(答)**

(2) (1) の議論より，$\boldsymbol{k=-1}$ **(答)**

(3) 2 直線が垂直であるので

$$\begin{aligned} 2k(k+2)+(k-1)(-k)&=0\\ k^2+5k&=0\\ k(k+5)&=0 \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{k=0,\ -5}$ (答)

【4】(1) C$(a,\ b)$ とすると，$l : y = \dfrac{1}{3}x + 1$ に対して，

AC $\perp l$ より，

$$\frac{b}{a+1} \cdot \frac{1}{3} = -1 \iff 3a + b = -3 \ \cdots ①$$

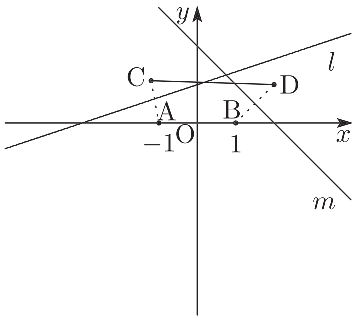
線分 AC の中点 $\left(\dfrac{a-1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ は l 上に存在するので，

$$\frac{a-1}{2} - 3 \cdot \frac{b}{2} + 3 = 0 \iff a - 3b = -5 \ \cdots ②$$

①，② より，$(a,\ b) = \left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$　　$\therefore$ **C** $\left(-\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\right)$　**(答)**

(2) B の m に関する対称点を D とすると，

PA $=$ PC, QB $=$ QD



より，AP+PQ+QB=CP+PQ+QD となる．
これが最小となるのは，CD と l，m との交点をそれぞれ P，Q としたときである．
D$(c,\ d)$ とすると，$m : y = -x + 2$ に対して，BD $\perp m$ より，$\dfrac{d}{c-1} \cdot (-1) = -1$

$$c - d = 1 \ \cdots ③$$

線分 BD の中点 $\left(\dfrac{c+1}{2},\ \dfrac{d}{2}\right)$ は，m 上に存在するので，

$$\frac{c+1}{2} + \frac{d}{2} = 2$$
$$c + d = 3 \ \cdots ④$$

③，④ より，$(c,\ d) = (2,\ 1)$ よって，D$(2,\ 1)$
これより，直線 CD の方程式は

$$y = \frac{1 - \frac{6}{5}}{2 - \left(-\frac{7}{5}\right)}(x - 2) + 1$$
$$= -\frac{1}{17}x + \frac{19}{17} \qquad \therefore\ x + 17y = 19$$

これと l との交点は $\begin{cases} x + 17y = 19 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$ より，$(x,\ y) = \left(\dfrac{3}{10},\ \dfrac{11}{10}\right)$

m との交点は $\begin{cases} x + 17y = 19 \\ x + y = 2 \end{cases}$ より，$(x,\ y) = \left(\dfrac{15}{16},\ \dfrac{17}{16}\right)$

よって，**P** $\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}},\ \dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{10}}\right)$，**Q** $\left(\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{16}},\ \dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{16}}\right)$　**(答)**

２０章　図形と方程式（２）ー点と直線・円ー

問題

【1】(1) 求める長さを d とすると

$$d = \frac{|2 \times (-2) - 3 \times 1 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \boldsymbol{\sqrt{13}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 求める長さを d とすると

$$d = \frac{|2 \times (-4) - 1 \times (-3) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{9\sqrt{5}}{5}} \qquad \textbf{(答)}$$

【2】

$$(2k+1)x - (k-2)y + 7k - 4 = 0 \quad \cdots ①$$

k について整理すると,

$$x + 2y - 4 + k(2x - y + 7) = 0$$

k がどのような値をとっても成り立つので, k についての恒等式と考えると,

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

これを解くと, $x = -2$, $y = 3$.

このとき, ① はつねに成り立つ.

よって, 定点 $(-2,\ 3)$ を通ること, つまり題意は示された.　〔証明終〕

<注>

① は, 2 直線 $x + 2y - 4 = 0$, $2x - y + 7 = 0$ の交点, つまり, $(-2, 3)$ を通る直線を表している.

【3】直線 $x - 2y - 2 = 0$ は，点 $(6, -4)$ を通らないので，求める直線は,

$$4x + 3y + 12 + k(x - 2y - 2) = 0$$

とおける.

点 $(6, -4)$ を通ることによって,

$$\begin{aligned} 4 \times 6 + 3 \times (-4) + 12 + k\{6 - 2 \times (-4) - 2\} &= 0 \\ 24 + 12k &= 0 \\ \therefore\ k &= -2 \end{aligned}$$

したがって,

$$4x + 3y + 12 - 2(x - 2y - 2) = 0$$

整理して,

$$\boldsymbol{2x+7y+16=0} \qquad \text{(答)}$$

＜注＞

2 直線 $4x+3y+12=0$ と $x-2y-2=0$ の交点を求めると,

$$\left(-\frac{18}{11}, -\frac{20}{11}\right)$$

この点と, $(6, -4)$ の 2 点を通る直線としてもできるが, この場合計算がかなり手間である.

【4】①, ② の交点 A の座標を求めると, A$(1, 5)$

②, ③ の交点 B の座標を求めると, B$(5, -1)$

③, ① の交点 C の座標を求めると, C$(-3, -3)$

よって,

$$\mathrm{BC} = \sqrt{(5-(-3))^2+(-1-(-3))^2} = 2\sqrt{17}$$

さらに, A と BC の距離 d は, A と直線 ③ の距離であるから

$$d = \frac{|1\cdot 1+5\cdot(-4)-9|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}} = \frac{28}{\sqrt{17}}$$

よって,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot\frac{28}{\sqrt{17}} = \mathbf{28} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

【5】点 P と直線 AB との距離を d とすると,

$$\triangle\mathrm{ABP} = \frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times d$$

ここで, AB は一定であるから, $\triangle$ABP の面積が最小となるには d を最小にすればよい.

点 P の x 座標を t とおくと, P$(t,\ t^2)$ で, さらに, 直線 AB の方程式は

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$$

つまり, $2x-y-4=0$ であるから,

$$\begin{aligned}d = \frac{|2t-t^2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} &= \frac{|t^2-2t+4|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|(t-1)^2+3|}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

したがって, $t=1$ のとき, d は最小となる.

よって, 求める点 P の座標は,

$$\mathbf{P(1, 1)} \qquad \text{(答)}$$

また, そのときの $\triangle$ABP の面積 S は,

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

より,

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \mathbf{3} \qquad (答)$$

＜別解＞

直線 AB：$y = 2x - 4$ に平行な直線 $y = 2x + k$ が放物線 $y = x^2$ と接するとき, 方程式

$$x^2 = 2x + k \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - k = 0$$

は重解をもつので, 判別式を D とすると,

$$D/4 = (-1)^2 - 1 \times (-k) = 0 \qquad \therefore\ k = -1$$

このとき, 接点の座標が求める点 P の座標となり,

$$x^2 = 2x - 1 \qquad \therefore\ x = 1$$

よって, $\mathbf{P(1, 1)}$ (答)

また, そのときの $\triangle$ABP の面積は,

$$S = 10 - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 4\right) = \mathbf{3} \qquad (答)$$

【6】(1) $\{x - (-1)\}^2 + (y - 3)^2 = 2^2$.

よって,

$$\boldsymbol{(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4} \qquad (答)$$

(2) 半径を r とすると, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$. 点 $(-1, 5)$ を通るので,

$$(-1 - 2)^2 + (5 - 1)^2 = r^2 \qquad \therefore r^2 = 25$$

よって,

$$\boldsymbol{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25} \qquad (答)$$

(3) 円の中心は, 線分 AB の中点だから,

$$\left(\frac{-5 + 7}{2}, \frac{2 + (-2)}{2}\right) = (1, 0)$$

半径は, 中心 $(1, 0)$ と $\mathrm{A}(-5, 2)$ の距離だから,

$$\sqrt{\{1 - (-5)\}^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{40}$$

したがって,

$$\boldsymbol{(x - 1)^2 + y^2 = 40} \qquad (答)$$

(4) 題意より求める円の半径は 2 だから

$$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+2)^2=4} \qquad \text{(答)}$$

(5) x 軸および y 軸に接することから, 円の中心は両座標軸から等距離にある. すなわち円の中心は直線 $y=x$ または $y=-x$ 上にある.
ここで, 直線 $y=x$ と $y=x-1$ の交点は存在せず,$y=-x$ と $y=x-1$ の交点の座標は,

$$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

だから, これが求める円の中心に他ならず, 求める円の方程式は,

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(6) 題意より求める円の半径は原点と $x-2y+4=0$ の距離 d に等しい. よって

$$d=\frac{|0-2\cdot 0+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

より

$$\boldsymbol{x^2+y^2=\frac{16}{5}} \qquad \text{(答)}$$

(7) 中心は直線 $y=x-5$ 上にあるから, 中心の x 座標を t とすると, 中心 C の座標 は

$$\mathrm{C}(t,t-5)$$

と表せる. そして題意より原点との距離は $(2,1)$ と C との距離に等しいから

$$\sqrt{t^2+(t-5)^2}=\sqrt{(t-2)^2+(t-5-1)^2}$$

両辺 2 乗して

$$t^2+t^2-10t+25=t^2-4t+4+t^2-12t+36$$
$$\therefore \quad t=\frac{5}{2} \qquad\qquad \therefore \quad \mathrm{C}\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$$

であり, 半径は

$$\sqrt{t^2+(t-5)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

したがって,

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【7】 (1) ②は

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$$

と変形できる．

よって①は

$$\text{中心 A}(0,0), \qquad \text{半径 } \sqrt{5}$$

の円であり，②は

$$\text{中心 B}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad \text{半径 } \frac{\sqrt{26}}{2}$$

の円である．そして中心間の距離は

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

であり，2 円の半径の和および差の絶対値

$$\sqrt{5} + \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{26}}{2}, \quad \frac{\sqrt{26}}{2} - \sqrt{5} = \frac{\sqrt{26}-2\sqrt{5}}{2}$$

と比べると

$$\frac{\sqrt{26}-2\sqrt{5}}{2} < \frac{\sqrt{10}}{2} < \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{26}}{2}$$

だから，2 円は 2 点で交わる．　〔証明終〕

(2) 求める直線は

$$x^2+y^2-3x-y-4+(-1)(x^2+y^2-5)=0$$

と表せる．よって

$$\boldsymbol{3x+y-1=0} \qquad \text{(答)}$$

(3) 題意をみたす図形は k を定数として

$$x^2+y^2-3x-y-4+k(x^2+y^2-5)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる．これが原点を通るから

$$-4-5k=0 \qquad \therefore \quad k=-\frac{4}{5}$$

これを①に代入して整理すると

$$\boldsymbol{x^2+y^2-15x-5y=0} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) 円上の点 (2, 4) を通ることから，求める直線を，

$$y=m(x-2)+4=mx+(4-2m) \ (m<0)$$

とおき，円の中心（原点）と直線（接線）の距離は円の半径 $2\sqrt{5}$ に等しいので，

$$\frac{|-2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{5}$$

これを解くと

$$\left|-2m+4\right| = 2\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$$
$$(-2m+4)^2 = 20(m^2+1)$$
$$\therefore 4m^2+4m+1=0$$
$$\therefore m=-\frac{1}{2}$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-2)$$

すなわち，

$$\boldsymbol{x+2y=10} \qquad \text{(答)}$$

(2) 円上の点 $(-3,\ -1)$ を通ることから，求める直線を，

$$y=m(x+3)-1=mx+(3m-1)\ (m<0)$$

とおき，円の中心 $(1, 2)$ と直線（接線）の距離は円の半径 5 に等しいので，

$$\frac{\left|m-2+3m-1\right|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5 \qquad \therefore \frac{\left|4m-3\right|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

これを解くと

$$\left|4m-3\right|=5\sqrt{m^2+1}$$
$$(4m-3)^2=25(m^2+1)$$
$$\therefore 9m^2+24m+16=0$$
$$\therefore m=-\frac{4}{3}$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y+1=-\frac{4}{3}(x+3)$$

すなわち，

$$\boldsymbol{4x+3y=-15} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める接線の方程式を $y=2x+n$，すなわち，$2x-y+n=0$ とおくと，$x^2+y^2=3$ と接することより，

$$\frac{|n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$$
$$\therefore |n|=\sqrt{15} \qquad \therefore n=\pm\sqrt{15}$$

したがって，接線の方程式は，

$$\boldsymbol{y=2x\pm\sqrt{15}} \qquad \text{(答)}$$

(4) 求める接線は点 $(-2,\ 4)$ を通り，直線 $x=-2$ は円の接線でないことから，求める直線を，

$$y=m(x+2)+4=mx+(2m+4)$$

とおき，円の中心（原点）と直線（接線）の距離は円の半径 $\sqrt{10}$ に等しいので，

$$\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

これを解く．

$$|2m+4|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$$
$$(2m+4)^2=10(m^2+1)$$
$$\therefore 3m^2-8m-3=0$$
$$\therefore m=-\frac{1}{3},\ 3$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3},\ y=3x+10$$

すなわち，

$$\boldsymbol{x+3y=10,\ 3x-y=-10} \qquad \text{(答)}$$

(5) 求める接線は原点を通り，直線 $x=0$ は円の接線でないことから，求める直線を，

$$y=mx$$

とおき，円の中心 (3, 1) と直線（接線）の距離は円の半径 $\sqrt{2}$ に等しいので，

$$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

これを解く．

$$|3m-1|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$
$$(3m-1)^2=2(m^2+1)$$
$$\therefore 7m^2-6m-1=0$$
$$\therefore m=-\frac{1}{7},\ 1$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{7}x,\ y=x$$

すなわち，

$$\boldsymbol{x+7y=0,\ x-y=0} \qquad \text{(答)}$$

【9】△ABC の重心の座標は，

$$\left(\frac{-3+1+3}{3},\frac{0+4+0}{3}\right)=\left(\boldsymbol{\frac{1}{3},\frac{4}{3}}\right) \qquad \text{(答)}$$

また，垂心は各頂点から各辺へ下ろした垂線同士の交点である．ここで，B から AC に下ろした垂線の方程式は，

$$x=1\cdots\cdots①$$

C から AB に下ろした垂線の方程式は，直線 AB の傾きが 1 であることから

$$y = -(x-3) \qquad\qquad \therefore y = -x + 3 \cdots\cdots ②$$

①，② の交点が △ABC の垂心に他ならないので，①，② より，

$$y = 2$$

よって，求める座標は,

$$(\mathbf{1,\ 2}) \qquad \text{(答)}$$

また, △ABC の外心を $\mathrm{P}(x, y)$ とおくと, $\mathrm{PA} = \mathrm{PB} = \mathrm{PC}$ より,

$$(x+3)^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 = (x-3)^2 + y^2$$

すなわち,

$$\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 \\ (x+3)^2 + y^2 = (x-3)^2 + y^2 \end{cases}$$

それぞれ整理して,

$$\begin{cases} 8x + 8y - 8 = 0 \\ 12x = 0 \end{cases}$$

これを解いて,

$$x = 0,\ y = 1$$

したがって,

$$\mathrm{P}(\mathbf{0, 1}) \qquad \text{(答)}$$

M1JK

高 1 東大数学 K

Z-KAI

会員番号		氏　名	