M1TK

本科 2 期 10 月度

解答

Z会東大進学教室

高 1 難関大数学 K

問題

【1】大，中，小の順に投げるとしてよい．これらは独立試行である．

(1) 2 の目が出る確率は，$\dfrac{1}{6}$

奇数の目が出る確率は，$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

素数の目が出る確率は，$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

したがって，求める確率は，

$$P=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{24}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 1 の目が出る確率は，$\dfrac{1}{6}$

したがって，求める確率は，

$$P=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\mathbf{\frac{1}{216}} \qquad \text{(答)}$$

(3)　大のサイコロ ･･･ どの目が出てもよい．

中のサイコロ ･･･ 大のサイコロと異なる目が出る．

小のサイコロ ･･･ 大，中のサイコロと異なる目が出る．

と考えると，求める確率は，

$$P=1\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{5}{9}} \qquad \text{(答)}$$

【2】1 枚のコインを投げる試行において，表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$，裏が出る確率は $\dfrac{1}{2}$

(1)

$$ {}_5C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = {}_5C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{1}{2^5} = \mathbf{\frac{5}{16}} \quad \text{(答)} $$

(2)　(i) 表が 4 回出る確率は,

$$ {}_5C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = {}_5C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{1} \times \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32} $$

(ii) 表が 5 回出る確率は,

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} $$

(i)，(ii) は排反事象だから，求める確率は,

$$ \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \mathbf{\frac{3}{16}} \quad \text{(答)} $$

(3) 裏が 5 回出る確率は,

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} $$

よって，求める確率は,

$$ 1 - \frac{1}{32} = \mathbf{\frac{31}{32}} \quad \text{(答)} $$

【3】1 回の試合で，T チームが敗れる（D チームが勝つ）確率は,

$$ 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} $$

(1)

$$ {}_5C_3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = {}_5C_2 \times \frac{2^3}{3^5} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{2^3}{3^5} = \mathbf{\frac{80}{243}} \quad \text{(答)} $$

(2)

$$ {}_5C_4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{1}{3} = {}_5C_1 \times \frac{2^4}{3^5} = \frac{5}{1} \times \frac{2^4}{3^5} = \mathbf{\frac{80}{243}} \quad \text{(答)} $$

【4】(1) A，B，C 3 つの事象は独立である．したがって，

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{1}{30}} \qquad \text{(答)}$$

(2)　(i) A と B に合格し，C に失敗するとき，

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{15}$$

(ii) A と C に合格し，B に失敗するとき，

$$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

(iii) B と C に合格し，A に失敗するとき，

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$$

(i)，(ii)，(iii) は排反事象だから，求める確率は，

$$\frac{2}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\mathbf{\frac{7}{30}} \qquad \text{(答)}$$

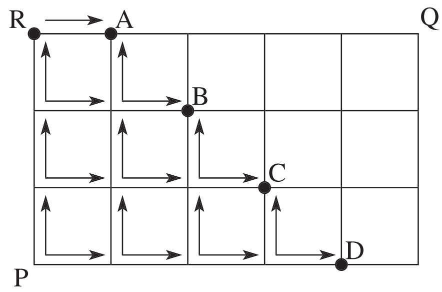
(3) A，B，C すべてに失敗する確率は，

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$$

したがって，求める確率は，

$$1-\frac{4}{15}=\mathbf{\frac{11}{15}} \qquad \text{(答)}$$

【5】　出会う可能性があるのは図のA，B，C，Dのどこかで，太郎がこれらのどこかに着くまでに，図のR以外では，出発点Pおよび途中の交差点で，2通りの選択がある．



いま，PからAへ到達する確率を，

$$P(\mathrm{P} \to \mathrm{A})$$

などとかくことにすると，

$$P(\mathrm{P} \to \mathrm{B}) = {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{2^4}$$

$$P(\mathrm{P} \to \mathrm{C}) = {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{2^4}$$

$$P(\mathrm{P} \to \mathrm{D}) = {}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}$$

また，$P(\mathrm{P} \to \mathrm{A})$ については，余事象を考えて，

$$P(\mathrm{P} \to \mathrm{A}) = 1 - \left(\frac{6}{2^4} + \frac{4}{2^4} + \frac{1}{2^4}\right) = \frac{5}{2^4}$$

一方，図形の対称性より，

$$P(\mathrm{Q} \to \mathrm{A}) = P(\mathrm{P} \to \mathrm{D}),\quad P(\mathrm{Q} \to \mathrm{B}) = P(\mathrm{P} \to \mathrm{C})$$
$$P(\mathrm{Q} \to \mathrm{C}) = P(\mathrm{P} \to \mathrm{B}),\quad P(\mathrm{Q} \to \mathrm{D}) = P(\mathrm{P} \to \mathrm{A})$$

である．

したがって，求める確率は，

$$\begin{aligned}
&P(\mathrm{P} \to \mathrm{A})\cdot P(\mathrm{Q} \to \mathrm{A}) + P(\mathrm{P} \to \mathrm{B})\cdot P(\mathrm{Q} \to \mathrm{B}) \\
&\qquad + P(\mathrm{P} \to \mathrm{C})\cdot P(\mathrm{Q} \to \mathrm{C}) + P(\mathrm{P} \to \mathrm{D})\cdot P(\mathrm{Q} \to \mathrm{D}) \\
&= P(\mathrm{P} \to \mathrm{A})\cdot P(\mathrm{P} \to \mathrm{D}) + P(\mathrm{P} \to \mathrm{B})\cdot P(\mathrm{P} \to \mathrm{C}) \\
&\qquad + P(\mathrm{P} \to \mathrm{C})\cdot P(\mathrm{P} \to \mathrm{B}) + P(\mathrm{P} \to \mathrm{D})\cdot P(\mathrm{P} \to \mathrm{A}) \\
&= 2\left(\frac{5}{2^4}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{6}{2^4}\cdot\frac{4}{2^4}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{29}{128}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【6】(1) 1，2，3 の目の出方は

$$3! = 6 \text{ 通り}$$

であり，これら 6 通りの起こる確率は，それぞれ

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{54}$$

であるので，求める確率は

$$6\cdot\frac{1}{54}=\boldsymbol{\frac{1}{9}} \quad \textbf{(答)}$$

(2) 3 回の目の和が 6 になるのは，

(i) 1 と 2 と 3 の目が 1 回ずつ出る

(ii) 3 回とも 2 の目が出る

のいずれかである．

(i) が起こる確率は，(1) より $\frac{1}{9}$，

(ii) が起こる確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$

(i)，(ii) は互いに排反なので求める確率は

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{216}=\boldsymbol{\frac{25}{216}} \quad \textbf{(答)}$$

(3) 3 回の目の和が 7 になるのは

(i) 3 の目が 2 回，1 の目が 1 回出る

(ii) 3 の目が 1 回，2 の目が 2 回出る

のいずれかである．

(i) が起こる確率は，目の出方が $\frac{3!}{2!}=3$ 通りあることを考えて，

$$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{18}$$

(ii) が起こる確率は，目の出方が $\frac{3!}{2!}=3$ 通りあることを考えて，

$$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{72}$$

(i)，(ii) は互いに排反なので，求める確率は

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{72}=\boldsymbol{\frac{5}{72}} \quad \textbf{(答)}$$

【7】(1)

$$(x-1)^6 = {}_6C_0 \cdot x^6 \cdot (-1)^0 + {}_6C_1 \cdot x^5 \cdot (-1)^1 + {}_6C_2 \cdot x^4 \cdot (-1)^2 + {}_6C_3 \cdot x^3 \cdot (-1)^3$$

$$+ {}_6C_4 \cdot x^2 \cdot (-1)^4 + {}_6C_5 \cdot x^1 \cdot (-1)^5 + {}_6C_6 \cdot x^0 \cdot (-1)^6$$

$$= \mathbf{x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$(x^2-2y)^5 = {}_5C_0 \left(x^2\right)^5 (-2y)^0 + {}_5C_1 \left(x^2\right)^4 (-2y)^1 + {}_5C_2 \left(x^2\right)^3 (-2y)^2$$

$$+ {}_5C_3 \left(x^2\right)^2 (-2y)^3 + {}_5C_4 \left(x^2\right)^1 (-2y)^4 + {}_5C_5 \left(x^2\right)^0 (-2y)^5$$

$$= \mathbf{x^{10} - 10x^8y + 40x^6y^2 - 80x^4y^3 + 80x^2y^4 - 32y^5} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) 展開式の一般項は

$${}_{10}C_r \cdot x^{10-r} \cdot 1^r = {}_{10}C_r x^{10-r}$$

となり，$10-r=5$ を解くと $r=5$．よって，x^5 の係数は

$${}_{10}C_5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{252} \qquad \text{(答)}$$

(2) 展開式の一般項は

$${}_5C_r \cdot (3x)^{5-r} \cdot (-2y)^r = {}_5C_r \cdot 3^{5-r} \cdot (-2)^r \cdot x^{5-r} y^r$$

であるから，x^3y^2 の係数は，$r=2$ として

$${}_5C_2 \cdot 3^3 \cdot (-2)^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 3^3 \cdot (-2)^2 = \mathbf{1080} \qquad \text{(答)}$$

(3) 展開式の一般項は

$${}_6C_r \cdot (x^2)^{6-r} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_6C_r \cdot 2^r \cdot (x^2)^{6-r} \cdot x^{-r} = {}_6C_r \cdot 2^r \cdot x^{12-3r}$$

となり，$12-3r=0$ を解くと $r=4$．よって定数項は

$${}_6C_4 \cdot 2^4 = \mathbf{240} \qquad \text{(答)}$$

【9】(1) 展開式の一般項は

$$\frac{6!}{p!q!r!}\cdot a^p b^q c^r \quad (p+q+r=6)$$

である．a^2bc^3 の係数は

$$p=2,\ q=1,\ r=3$$

として

$$\frac{6!}{2!1!3!}=\mathbf{60} \qquad (答)$$

(2) 展開式の一般項は

$$\frac{8!}{p!q!r!}\cdot x^p y^q (-3z)^r=\frac{8!}{p!q!r!}\cdot(-3)^r\cdot x^p y^q z^r \quad (p+q+r=8)$$

である．x^5yz^2 の係数は

$$p=5,\ q=1,\ r=2$$

として

$$\frac{8!}{5!1!2!}\cdot(-3)^2=\mathbf{1512} \qquad (答)$$

(3) 展開式の一般項は

$$\frac{10!}{p!q!r!}\cdot 1^p\cdot(2x)^q\cdot\left(-x^2\right)^r$$
$$=\frac{10!}{p!q!r!}\cdot 2^q\cdot(-1)^r\cdot x^{q+2r} \quad (p+q+r=10)$$

である．x^3 の項は

$$p+q+r=10,\ q+2r=3$$

であり，p，q，r は非負整数であるから，これをみたすのは

$$(p,\ q,\ r)=(7,\ 3,\ 0),\ (8,\ 1,\ 1)$$

よって，x^3 の係数は

$$\frac{10!}{7!3!}\cdot 2^3+\frac{10!}{8!1!1!}\cdot 2^1\cdot(-1)^1$$
$$=960-180=\mathbf{780} \qquad (答)$$

【10】$(1+x)^n$ を 2 項展開すると

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r x^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n x^n \quad \cdots ①$$

である．

(1) ① 式に，$x=-1$ を代入して

$$(\text{与式}) = (1-1)^n = \mathbf{0} \qquad (\text{答})$$

(2) ① 式に，$x=2$ を代入して

$$(1+2)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 2 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 2^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r \cdot 2^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 2^n$$

ゆえに

$$(\text{与式}) = \mathbf{3^n} \qquad (\text{答})$$

【11】正の方向に 1，2，3 進むことをそれぞれ 1，2，3 と表す．1，2，3 が起こる確率はいずれも $\dfrac{1}{3}$ である．

(1) $x=2$ に立ち止まる場合は

2　または　11

であり，これらは排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{4}{9}} \qquad (\text{答})$$

(2) $x=4$ に立ち止まるまでにさいころを投げる回数で場合を分ける．

$$\begin{cases} 4\text{ 回のとき} & 1111 \\ 3\text{ 回のとき} & 112\text{（の順列）} \\ 2\text{ 回のとき} & 22,\ 13\text{(の順列)} \end{cases}$$

である．

(i) 4 回のとき．

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

(ii) 3 回のとき．

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

(iii) 2 回のとき．

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

以上より，求める確率は

$$\frac{1}{81} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{37}{81}} \qquad (\text{答})$$

(3) 1 回で進めるのは最大で 3 であるから，$x=2$ にも $x=4$ にも立ち止まらないなら $x=3$ に立ち止まる．

$x=2$ に止まらず $x=3$ に止まる場合は

3，　12

のいずれかであるから，その確率は

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

このもとで次が 2 または 3 であるから，求める確率は

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{8}{27}}\qquad\text{(答)}$$

【12】各回の試行において，当たり，大当たりの確率はそれぞれ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},\quad \left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

である．

(1) 余事象を考える．大当たりが 1 回も出ない確率は

$$\left(1-\frac{1}{9}\right)^n=\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

ゆえに求める確率は

$$\boldsymbol{1-\left(\frac{8}{9}\right)^n}\qquad\text{(答)}$$

(2) 当たり，大当たりがどちらも 1 回も出ない確率は

$$\left\{1-\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)\right\}^n=\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

ゆえに求める確率は

$$\boldsymbol{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}\qquad\text{(答)}$$

(3) 余事象「当たりが 1 回も出ないか，または大当たりが 1 回も出ない　$\cdots(*)$」の確率を考える．当たりが 1 回も出ない，大当たりが 1 回も出ない，という事象をそれぞれ A，B とおくと，$(*)$ が起こる確率 $P(A \cup B)$ は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ここで，当たりが 1 回も出ない確率は

$$P(A) = \left(1 - \frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{5}{9}\right)^n$$

大当たりが 1 回も出ない確率は (1) より

$$P(B) = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

当たりも大当たりも 1 回も出ない確率は (2) より

$$P(A \cap B) = \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

以上より，

$$P(A \cup B) = \left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

ゆえに求める確率は

$$\begin{aligned} 1 - P(A \cup B) &= 1 - \left\{\left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right\} \\ &= \mathbf{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{\boldsymbol{n}} - \left(\frac{8}{9}\right)^{\boldsymbol{n}} + \left(\frac{4}{9}\right)^{\boldsymbol{n}}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

添削課題

【1】1 度引いたくじをもとに戻すので，1 回 1 回が独立試行である．
1 回の試行で，1 等が当たる確率は $\dfrac{1}{10}$，2 等が当たる確率は $\dfrac{1}{5}$，3 等が当たる確率は $\dfrac{1}{2}$ である．

(1) $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{100}}$　　(答)

(2) 1 回の試行で，はずれが出る確率は $\dfrac{1}{5}$.
よって，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3=\mathbf{\frac{1}{125}}\quad\text{(答)}$$

【2】コインを投げるとき，1 回 1 回が独立試行である．
また，1 回の試行で，表が出る確率，裏が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である．

(1) ${}_5C_5\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\mathbf{\dfrac{1}{32}}$　　(答)

(2) 5 回のうち，表が 2 回，裏が 3 回出る確率だから，

$${}_5C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\mathbf{\frac{5}{16}}\quad\text{(答)}$$

【3】(1) 4 回の試行の後，P が原点にあるのは，1，2 の目が 2 回，それ以外の目が 2 回出る場合であるから，

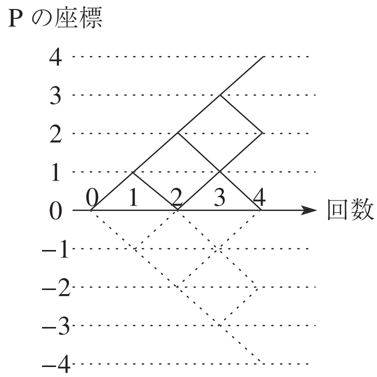
$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{8}{27}}\quad\text{(答)}$$

(2) 4 回の試行の間，P が常に数直線の $x\geqq0$ の範囲にいる場合は，1 回の試行で 1，2 の目が出る事象を A，それ以外の目が出る事象を B とすると，右図より，3 回目までの試行の結果が順に，

$$(A,\ A,\ A),\ (A,\ A,\ B),\ (A,\ B,\ A)$$

であればよい．
よって，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{5}{27}}\quad\text{(答)}$$



【4】(1) 展開したときの一般項は

$$
\begin{aligned}
&{}_7\mathrm{C}_n \left(a^2\right)^n \cdot (3b)^{7-n} \quad (n \text{ は 7 以下の非負整数}) \\
=&{}_7\mathrm{C}_n \cdot 3^{7-n} \cdot a^{2n} \cdot b^{7-n} \quad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

これが，$a^{10}b^2$ になるためには，

$10 = 2n$，$2 = 7 - n$ より，$n = 5$

よって，$(*)$ に $n = 5$ を代入すると，係数は，

$$
\begin{aligned}
{}_7\mathrm{C}_5 \cdot 3^2 &= {}_7\mathrm{C}_2 \cdot 9 \\
&= 21 \cdot 9 \\
&= \mathbf{189} \quad \textbf{(答)}
\end{aligned}
$$

(2) 展開したときの一般項は，l，m，n を非負の整数として

$$
\begin{aligned}
&\frac{5!}{l!m!n!} a^l \cdot (-2b)^m \cdot (3c)^n \quad (l + m + n = 5) \\
=&\frac{5!}{l!m!n!}(-2)^m \cdot 3^n \cdot a^l b^m c^n \quad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

これが，a^2bc^2 になるためには，$l = 2$，$m = 1$，$n = 2$

よって，$(*)$ に $l = 2$，$m = 1$，$n = 2$ を代入すると，係数は

$$
\begin{aligned}
\frac{5!}{2!1!2!} \cdot (-2) \cdot 3^2 &= 30 \cdot (-2) \cdot 9 \\
&= \mathbf{-540} \quad \textbf{(答)}
\end{aligned}
$$

(3) 展開したときの一般項は，l，m，n を非負の整数として

$$
\begin{aligned}
&\frac{8!}{l!m!n!} \cdot \left(x^2\right)^l \cdot (-x)^m \cdot 1^n \quad (l + m + n = 8) \\
=&\frac{8!}{l!m!n!} \cdot (-1)^m \cdot x^{2l+m} \quad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

これが，x^{14} になるためには，

$2l + m = 14 \quad \cdots (**)$

l，m，n の条件に気をつけると，$(**)$ をみたす l，m，n の組合せは，

$(l,\ m,\ n) = (7,\ 0,\ 1)$，$(6,\ 2,\ 0)$

これらを，$(*)$ に代入して，その係数を加えればよく，求める係数は，

$$
\begin{aligned}
\frac{8!}{7!1!} + \frac{8!}{6!2!} \cdot (-1)^2 &= 8 + 28 \\
&= \mathbf{36} \quad \textbf{(答)}
\end{aligned}
$$

【5】$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n \quad \cdots (*)$

を考える．

(1) $(*)$ に $a=b=1$ を代入すると，

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 \cdot 1^n + {}_n\mathrm{C}_1 1^{n-1} \cdot 1 + {}_n\mathrm{C}_2 1^{n-2} 1^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n 1^n$$

よって，$\boldsymbol{2^n}$　**(答)**

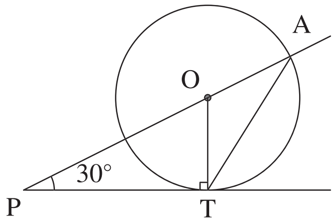
(2) $(*)$ に，$a=1$，$b=-2$ を代入すると，

$$\begin{aligned}(-1)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 \cdot 1^n + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 1^{n-1} \cdot (-2) + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 1^{n-2} \cdot (-2)^2 \\ &\quad + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot (-2)^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 - 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_1 + 2^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-2)^n \cdot {}_n\mathrm{C}_n\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{(-1)^n}$　**(答)**

問題

【1】(1) 仮定より $\angle OPT = 30°$．$\angle OTP = 90°$ より
$\angle POT = 60°$．ゆえに $\angle TOA = 120°$．
$OT = OA$ より $\triangle AOT$ は $OT = OA$ の 2 等辺
3 角形．
ゆえに



$$\angle ATO = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$$

よって

$$\angle PTB = \angle PTA = 90° + 30° = \mathbf{120°} \qquad (答)$$

(2) $\triangle OPT$ は $\angle POT = 60°$，$\angle P = 30°$ の直角 3 角形であるから，

$$PT = \sqrt{3}OT = \mathbf{5\sqrt{3}} \qquad (答)$$

(3) $PO = 2OT = 10$ であるから

$$PA = PO + OA = 10 + 5 = \mathbf{15} \qquad (答)$$

(4) $\angle TAP = \angle TPA = 30°$ であるから，$\triangle TAP$ は 2 等辺 3 角形であり，

$$AT = PT = 5\sqrt{3}$$

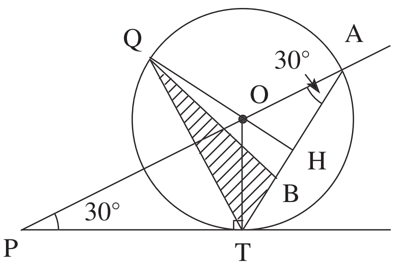
PB は $\angle APT$ を 2 等分するから，

$$AB : BT = PA : PT = 15 : 5\sqrt{3} = \sqrt{3} : 1$$

$AT = 5\sqrt{3}$ であるから

$$BT = \frac{1}{\sqrt{3}+1}AT = \frac{1}{\sqrt{3}+1}5\sqrt{3} = \mathbf{\frac{15 - 5\sqrt{3}}{2}} \qquad (答)$$

(5) 点 Q から AT に下ろした垂線の足を H とすると



$$\triangle \mathrm{BQT} = \frac{1}{2}\mathrm{BT} \cdot \mathrm{QH} = \frac{15 - 5\sqrt{3}}{4}\mathrm{QH}$$

ゆえに QH の長さが最大のとき，△BQT の面積は最大になる．

QH が最大になるのは，QH が円の中心を通るときであり，このとき

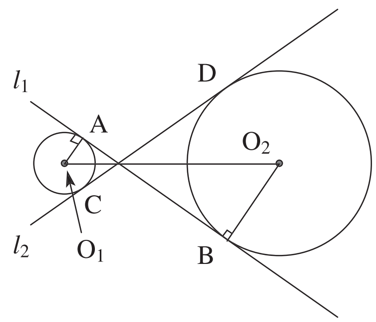
$\mathrm{OH} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA} = \dfrac{5}{2}$ であるから，

$$\mathrm{QH} = \mathrm{QO} + \mathrm{OH} = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

ゆえに △BQT の面積の最大値は

$$\frac{15 - 5\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{15}{2} = \boldsymbol{\frac{225 - 75\sqrt{3}}{8}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $\triangle \mathrm{O_1AE}$，$\triangle \mathrm{O_2BE}$ において対頂角は等しいから



$$\angle \mathrm{O_1EA} = \angle \mathrm{O_2EB} \quad \cdots ①$$

$\mathrm{O_1A} \perp l_1$，$\mathrm{O_2B} \perp l_1$ であるから

$$\angle \mathrm{O_1AE} = \angle \mathrm{O_2BE} = 90° \quad \cdots ②$$

①，② から

$$\triangle \mathrm{O_1AE} \backsim \triangle \mathrm{O_2BE} \quad \cdots ③$$

ゆえに

$$\mathrm{O_1E} : \mathrm{O_2E} = \mathrm{O_1A} : \mathrm{O_2B} = \boldsymbol{1 : 3} \qquad \text{(答)}$$

(2) ③ から

$$\mathrm{AE : BE = O_1A : O_2B} = 1 : 3$$

よって

$$\mathrm{AE} = \frac{1}{4}\mathrm{AB} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$$

ゆえに

$$\mathrm{O_1E} = \sqrt{\mathrm{O_1A}^2 + \mathrm{AE}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

また

$$\mathrm{O_2E} = 3\mathrm{O_1E} = 3\sqrt{5}$$

したがって

$$\mathrm{O_1O_2} = \mathrm{O_1E} + \mathrm{O_2E} = \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = \mathbf{4\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) と同様に

$$\mathrm{CE : DE = O_1C : O_2D} = 1 : 3$$

よって △ACE と △BDE において

$$\mathrm{AE : BE = CE : DE} = 1 : 3 \quad \cdots ④$$

対頂角は等しいから

$$\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{BED} \quad \cdots ⑤$$

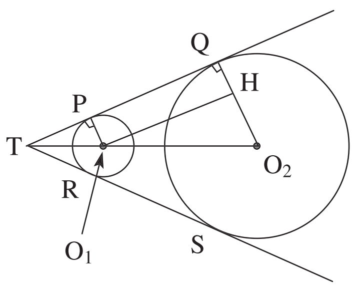
④，⑤から

$$\triangle\mathrm{ACE} \backsim \triangle\mathrm{BDE}$$

相似比は 1 : 3 であるから，面積比は

$$1^2 : 3^2 = \mathbf{1 : 9} \qquad \text{(答)}$$

(4) 点 $\mathrm{O_1}$ から $\mathrm{O_2Q}$ に下ろした垂線の足を H とすると，4 角形 $\mathrm{PO_1HQ}$ は長方形となるから



$$\mathrm{PQ = O_1H}, \quad \mathrm{HQ = O_1P} = 1$$

よって

$$\mathrm{O_2H = O_2Q - HQ} = 3 - 1 = 2$$

直角 3 角形 $\mathrm{O_1O_2H}$ において

$$\mathrm{O_1H} = \sqrt{\mathrm{O_1O_2}^2 - \mathrm{O_2H}^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = 4$$

ゆえに

$$\mathrm{PQ} = \mathbf{4} \qquad \text{(答)}$$

(5) $\triangle$PRT が正 3 角形になるとき，$\angle PTR = 60^\circ$ であるから

$$\angle QTO_2 = 30^\circ$$

よって，$\angle O_2O_1H = 30^\circ$ となるから，直角 3 角形 O_1O_2H において

$$O_1O_2 = 2O_2H = 4$$

また，直角 3 角形 $\triangle O_1PT$ において

$$TP = \sqrt{3}O_1P = \sqrt{3}$$

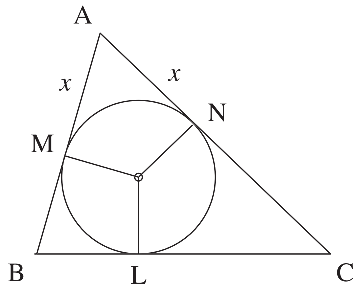
ゆえに

$$TR = TP = \sqrt{3}$$

よって，高さ $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{3}{2}$ より，

$$\triangle PRT = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【3】 辺 BC と内接円との接点を L，辺 CA と内接円との接点を N とすると



$$AM = AN, \quad BL = BM, \quad CN = CL$$

$AM = x$ とおくと，$BM = 6 - x$.
よって $BL = 6 - x$ であるから

$$CL = 7 - (6 - x) = x + 1$$

ゆえに $CN = x + 1$．$AN = x$ であるから

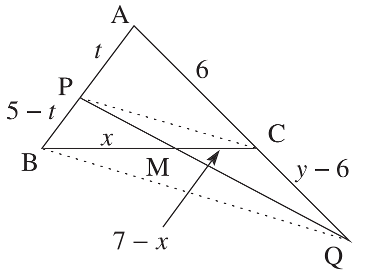
$$x + (x + 1) = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{7}{2}$$

ゆえに

$$AM = \boldsymbol{\frac{7}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) BM = x, AQ = y とおく．$\triangle$ABC と直線 PQ について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$



すなわち

$$\frac{t}{5-t}\cdot\frac{x}{7-x}\cdot\frac{y-6}{y}=1$$

よって

$$t(y-6)x=(5-t)y(7-x)\quad\cdots①$$

また $\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{APQ}$ より

$$\triangle\mathrm{PBC}=\triangle\mathrm{PQC}$$

よって PC // BQ であるから

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}}\qquad\therefore\quad\frac{t}{5}=\frac{6}{y}$$

y について解いて

$$y=\frac{30}{t}\quad\cdots②$$

② を ① に代入すると

$$t\left(\frac{30}{t}-6\right)x=(5-t)\frac{30}{t}(7-x)$$

$0<t<5$ に注意して整理すると

$$tx=5(7-x)\quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{35}{t+5}$$

以上より

$$\mathrm{BM}=\boldsymbol{\frac{35}{t+5}},\quad \mathrm{AQ}=\boldsymbol{\frac{30}{t}}\qquad(答)$$

(2) チェバの定理より

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}=1 \quad \cdots①$$

AE : EB = 5 : 4，AF : FC = 1 : 6 であるから

$$\frac{AE}{EB}=\frac{5}{4},\quad \frac{CF}{FA}=\frac{6}{1} \quad \cdots②$$

また AC = x とおくと，AD は ∠A の 2 等分線であるから

$$AB : AC = BD : DC = 12 : x$$

すなわち

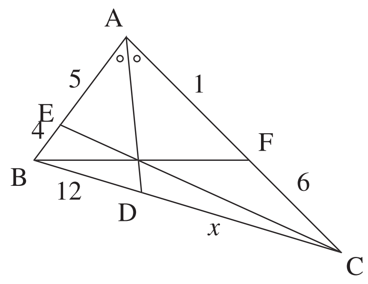
$$\frac{BD}{DC}=\frac{12}{x} \quad \cdots③$$

①，②，③ より

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{12}{x}\cdot\frac{6}{1}=1 \quad \Longleftrightarrow \quad x=90$$

ゆえに

AC = **90** (答)



【5】3 角形 ABC が存在するならば

$$|AB-AC|<BC<AB+AC$$

すなわち

$$|3.6-0.5|=3.1<BC<|3.6+0.5|=4.1$$

辺 BC の長さは整数であるから

BC = **4** (答)

【6】(1) $\triangle$QBC において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DQ}}=1 \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{QA}\cdot\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}\cdot\mathrm{DQ}}$$

〔証明終〕

(2) $\triangle$PAB と $\triangle$PCD において，$\angle$P は共通．また 4 角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle\mathrm{ABP}=\angle\mathrm{CDP}$$

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle\mathrm{PAB}\backsim\triangle\mathrm{PCD}$$

ゆえに

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PC}}$$

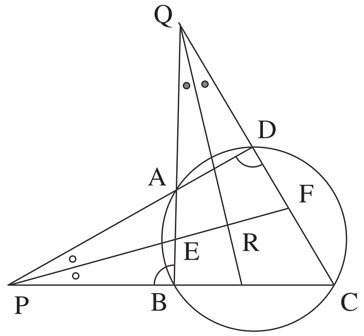
(1) の結果とあわせて

$$\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{QA}\cdot\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}\cdot\mathrm{DQ}}$$

$$\therefore\ \mathrm{PA}\cdot\mathrm{QD}=\mathrm{PB}\cdot\mathrm{QA}$$

〔証明終〕

(3) $\triangle$PBE と $\triangle$PDF において，



PF は $\angle$APB の 2 等分線であるから

$$\angle\mathrm{EPB}=\angle\mathrm{FPD}$$

4 角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle\mathrm{EBP}=\angle\mathrm{FDP}$$

よって 2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle\mathrm{PBE}\backsim\triangle\mathrm{PDF}$$

したがって

$$\angle\mathrm{PEB}=\angle\mathrm{PFD}\quad\cdots①$$

また，対頂角は等しいから

$$\angle\mathrm{PEB}=\angle\mathrm{QEF}\quad\cdots②$$

①，②より

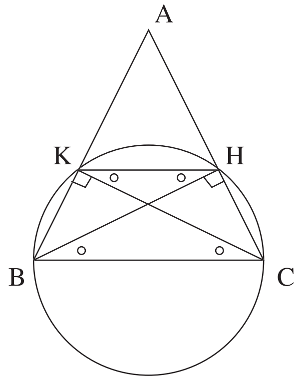
$$\angle\mathrm{QEF}=\angle\mathrm{QFE}$$

よって，2 角が等しいから，$\triangle$QEF は QE = QF の 2 等辺 3 角形である．
2 等辺 3 角形の頂角の 2 等分線は，底辺を垂直に 2 等分するから

$$\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$$

〔証明終〕

【7】$\angle BKC = \angle BHC = 90^\circ$ であるから，2 点 H，K は BC を直径とする円周上にある．



2 つの直角 3 角形 KBC，HCB において，弧 KB に対する円周角は等しいから

$$\angle KCB = \angle KHB \quad \cdots ①$$

弧 HC に対する円周角は等しいから

$$\angle HBC = \angle HKC \quad \cdots ②$$

HK // BC より，錯角が等しいから

$$\angle KHB = \angle HBC \quad \cdots ③$$
$$\angle HKC = \angle KCB \quad \cdots ④$$

①，②，③，④より

$$\angle KCB = \angle HBC \quad \cdots ⑤$$

また，辺 BC は共通　$\cdots$⑥　であり，⑤，⑥より斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

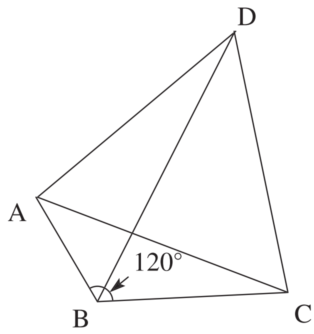
$$\triangle KBC \equiv \triangle HCB$$

ゆえに

$$\angle KBC = \angle HCB \qquad \therefore \quad \angle ABC = \angle ACB$$

よって 3 角形 ABC は AB = AC の 2 等辺 3 角形である．〔証明終〕

【8】(1) CD = DA = AC であるから，$\triangle$ACD は正 3 角形である．ここで



$$\begin{aligned}\angle ADB &= \angle ADC - \angle BDC \\ &= 60^\circ - \angle BDC < 60^\circ\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\angle DAB &= \angle DAC + \angle CAB \\ &= 60^\circ + \angle CAB > 60^\circ\end{aligned}$$

すなわち

$$\angle ADB < \angle DAB$$

したがって，3 角形 ABD において

$$AB < BD$$

〔証明終〕

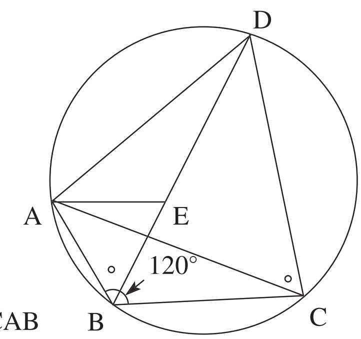
(2) $\angle ADC + \angle B = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ であるから，4 角形 ABCD は円に内接する．弧 AD に対する円周角は等しいから

$$\angle ABE = \angle ACD = 60^\circ$$

これと AB = BE より，3 角形 ABE は正 3 角形であるから

$\angle BAE =$ **60°**　(答)

(3) 3 角形 DAE と 3 角形 CAB において，仮定より DA = CA.



(2) より, 3 角形 ABE は正 3 角形であるから,

$$AE = AB$$

また

$$\angle DAE = \angle DAC - \angle EAC = \angle EAB - \angle EAC = \angle CAB$$

よって 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle DAE \equiv \triangle CAB$$

したがって

$$DE = CB$$

すなわち

$$AB + BC = BE + DE = BD$$

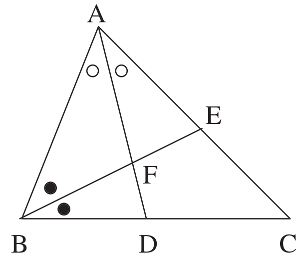
〔証明終〕

添削課題

【1】

(1) 角の二等分線の性質より

$$BD : DC = AB : AC$$
$$= 5 : 7$$



よって

$$BD = \frac{5}{12}BC$$
$$= \frac{5}{12} \cdot 6$$
$$= \boldsymbol{\frac{5}{2}} \quad \text{(答)}$$

(2) 角の二等分線の性質より

$$AF : FD = BA : BD$$
$$= 5 : \frac{5}{2}$$
$$= 2 : 1$$

よって

$$\triangle FBD = \frac{FD}{AD}\triangle ABD$$
$$= \frac{1}{3}\triangle ABD$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{BD}{BC}\triangle ABC$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12}\triangle ABC$$
$$= \frac{5}{36}\triangle ABC$$

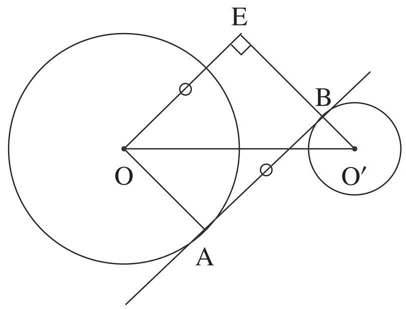
ゆえに

$$\triangle FBD : \triangle ABC = \mathbf{5 : 36} \quad \text{(答)}$$

【2】(1) O′B の延長線上に点 E を OE ⊥ O′E となるようにとる.

$\triangle$EOO′ に三平方の定理を適用すると,

EO′ = OA + BO′ = 11 より



$$\begin{aligned} OE^2 &= OO'^2 - EO'^2 \\ &= 169 - 121 \\ &= 48 \end{aligned}$$

$$\therefore\ OE = 4\sqrt{3}$$

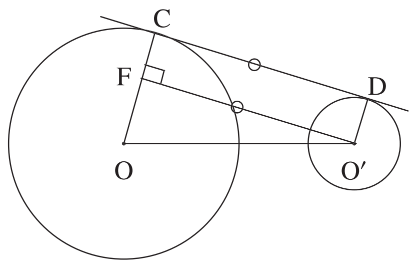
よって

$AB = OE = \mathbf{4\sqrt{3}}$　　(答)

(2) O′ から OC に向かって垂線を引き, OC との交点を F とする.

$\triangle$FOO′ に三平方の定理を適用すると,

OF = CO − DO′ = 5 より



$$\begin{aligned} FO'^2 &= OO'^2 - OF^2 \\ &= 169 - 25 \\ &= 144 \end{aligned}$$

$$\therefore\ FO' = 12$$

よって

$CD = FO' = \mathbf{12}$　　(答)

【3】(1) 内心は，三角形の内角の二等分線の交点なので，P が内心であるとき，

$$\angle PBC = \angle ABP = 25^\circ$$
$$\angle PCB = \angle ACP = 40^\circ$$

よって，

$$\begin{aligned}\angle BAC &= 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)\\ &= 180^\circ - (50^\circ + 80^\circ)\\ &= \mathbf{50^\circ} \quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2) P が $\triangle ABC$ の外心であるとき，PA=PB=PC であるので，

$$\angle PAB = \angle PBA = 25^\circ$$
$$\angle PAC = \angle PCA = 40^\circ$$

であるので，

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \angle PAB + \angle PAC\\ &= \mathbf{65^\circ} \quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

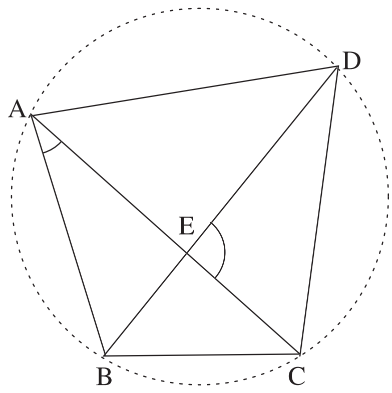
【4】$\angle ABC = 105^\circ$，$\angle ADC = 75^\circ$ より，

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

よって，4 点 A，B，C，D は同一円周上に存在する．これより，

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \angle BDC \quad \text{(円周角の定理より)}\\ &= \angle ADC - \angle ADB\\ &= \mathbf{30^\circ} \quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle CED &= \angle DBC + \angle ACB\\ &= \angle DBC + \angle ADB\\ &= \mathbf{100^\circ} \quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$



１９章　３角比 (1) －３角比の導入－

問題

【1】(1) 三平方の定理より，AB = 13 であるから

$$\sin\theta = \mathbf{\frac{12}{13}},\ \cos\theta = \mathbf{\frac{5}{13}},\ \tan\theta = \mathbf{\frac{12}{5}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 三平方の定理より，BD = 3，また，AC = $\sqrt{4^2+8^2} = 4\sqrt{5}$ だから

$$\sin\theta = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{\sqrt{5}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos\theta = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{8} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) △ADC ∽ △BDA より，BD= x とおくと

$$6 : x = (15 - x) : 6$$

整理して

$$x^2 - 15x + 36 = 0 \qquad \therefore\ (x-3)(x-12) = 0$$

ここで，△ABC は AC > AB の直角三角形であるから，$0 < x < 7.5$ より

$$x = \mathbf{BD = 3} \qquad \text{(答)}$$

三平方の定理より

$$\mathbf{AB = 3\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

(2) ∠DAB = θ であることと，(1) から

$$\sin\theta = \frac{BA}{CB} = \frac{3\sqrt{5}}{15} = \mathbf{\frac{\sqrt{5}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos\theta = \frac{AD}{BA} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

$$\tan\theta = \frac{DA}{CD} = \frac{6}{12} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

また，$\sin\theta > 0$ より，$\sin\theta = \mathbf{\frac{3}{5}}$ (答)

よって，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \mathbf{\frac{3}{4}}$ (答)

(2) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$

また，$\cos\theta > 0$ より $\cos\theta = \mathbf{\frac{12}{13}}$ (答)

よって，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \mathbf{\frac{5}{12}}$ (答)

(3) $\frac{1}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1 = 2^2 + 1 = 5$

$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$ で，$\cos\theta > 0$ より，$\cos\theta = \mathbf{\frac{\sqrt{5}}{5}}$ (答)

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ (答)

【4】(1) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$ より，$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$ $\quad\therefore\ \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{4}}{\pm\frac{\sqrt{15}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

以上から

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4},\quad \tan\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}\quad \text{(複号同順)}\qquad \text{(答)}$$

(2) $\sin^2\theta + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$ より，$\sin^2\theta = \frac{16}{25}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において，$\sin\theta \geqq 0$ より，$\sin\theta = \mathbf{\frac{4}{5}}$ (答)

また，$\tan\theta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \mathbf{\frac{4}{3}}$ (答)

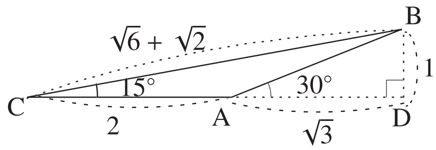
(3) $\frac{1}{\cos^2\theta} = 3^2 + 1$ より，$\cos^2\theta = \frac{1}{10}$

$\tan\theta > 0$ より，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ だから，$\cos\theta > 0$，$\sin\theta > 0$

よって

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10},\quad \sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}\qquad \text{(答)}$$

【5】右図のように点 D をとる.



$\angle ABC = \angle ACB = 15°$ より

$$\angle BAD = 15° \times 2 = 30°$$

よって, AB = 2 より, AD = $\sqrt{3}$, BD = 1

三平方の定理より

$$BC^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

したがって

$$BC = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{8+2\sqrt{12}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

また,

$$\angle CBD = 75°$$

以上より,

$$\sin 15° = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \quad (答)$$

$$\cos 15° = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \quad (答)$$

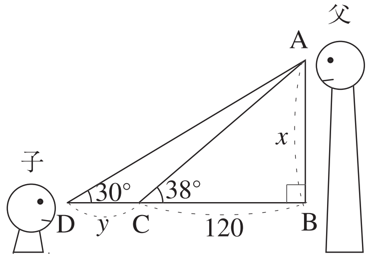
$$\tan 15° = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \boldsymbol{2-\sqrt{3}} \quad (答)$$

$$\sin 75° = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \quad (答)$$

$$\cos 75° = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \quad (答)$$

$$\tan 75° = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = \boldsymbol{2+\sqrt{3}} \quad (答)$$

【6】右の図のように，A，B，C，D を定め，
AB = x cm，　CD = y cm とおく．



(1)　$x = 120 \times \tan 38° = 120 \times 0.7813 = 93.756$

よって，目の高さの差は，

約 94 cm　(答)

(2)　$94 = (120 + y) \times \tan 30°$
$= (120 + y) \times 0.5774$

ゆえに

$0.5774y = 94 - 120 \times 0.5774 = 24.712$

$\therefore\ y = \dfrac{24.712}{0.5774} = 42.79$

よって，あと

約 43 cm 離れなければならない　(答)

【7】(1) 三平方の定理より，BC = $\sqrt{7^2 + 24^2} = 25$
よって，

①　$\tan B = \dfrac{AC}{BA} = \boldsymbol{\dfrac{24}{7}}$　(答)

②　$\sin C = \dfrac{AB}{BC} = \boldsymbol{\dfrac{7}{25}}$　(答)

③　$\cos C = \dfrac{AC}{BC} = \boldsymbol{\dfrac{24}{25}}$　(答)

(2)　$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

∠A が鋭角より，$\sin A > 0$ であるから

$\boldsymbol{\sin A = \dfrac{3}{5}}$　(答)

また，

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$　(答)

【8】(1) 正五角形の 1 つの内角は 108° だから

$$\angle EAD = \angle ADE = \angle DEC = \angle ECD = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

よって,

$$\angle AEF = \angle DEA - \angle DEC = 72^\circ, \quad \angle AFE = \angle ADE + \angle DEC = 72^\circ$$

より，$\triangle AEF$ は二等辺三角形．ゆえに

$AF = AE = \mathbf{1}$　　(答)

また，$FD = x$ とおくと，$\triangle ACD \backsim \triangle CDF$ より

$AC : CD = CD : DF \qquad \therefore\ (1 + x) : 1 = 1 : x$

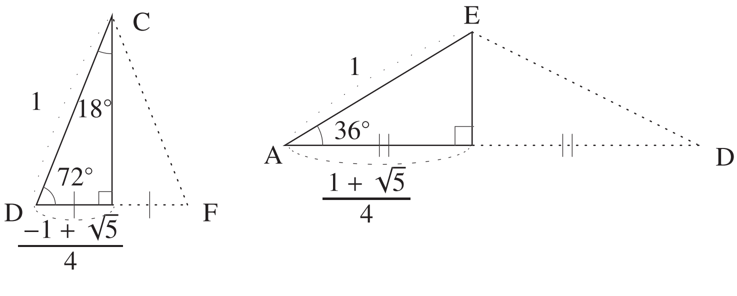
整理して，$x^2 + x - 1 = 0$．$x > 0$ より

$$FD = x = \boldsymbol{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の結果と図より

$$\cos 72^\circ = \boldsymbol{\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos 36^\circ = \boldsymbol{\frac{1 + \sqrt{5}}{4}} \qquad \text{(答)}$$



【9】$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$\sin\theta > 0,\ \cos\theta < 0$.

また $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ \sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{4}$$

$x = \sin\theta,\ y = \cos\theta$ とおくと

$$x + y = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \cdots①, \quad xy = -\frac{1}{4}\ \cdots②$$

① より，$y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - x$. これを ② に代入して

$$x\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right) = -\frac{1}{4}$$

$$4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$$

これを解いて

$$x = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}\ (> 0) \qquad (答)$$

① に代入して

$$y = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}\ (< 0) \qquad (答)$$

＜別解＞

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，両辺 2 乗して

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{4}$$

ゆえに $\sin\theta$, $\cos\theta$ は 2 次方程式

$$x^2 - (\sin\theta + \cos\theta)\,x + \sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\iff \quad x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\iff \quad 4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0 \quad \cdots(\#)$$

の 2 解である.

$$(\#) \quad \iff \quad x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4}}{4} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$. ゆえに

$$\sin\theta = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}, \quad \cos\theta = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} \qquad (答)$$

添削課題

【1】(1) 三平方の定理より，$AB^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

よって，$AB = \sqrt{13}$

$$\sin\theta = \frac{AC}{BA} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \mathbf{\frac{2\sqrt{13}}{13}} \qquad (答)$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{13}}{13}} \qquad (答)$$

$$\tan\theta = \frac{CA}{BC} = \mathbf{\frac{2}{3}} \qquad (答)$$

(2) 三平方の定理より，$AC^2 = 25^2 - 24^2 = 49$

よって，$AC = 7$

$$\sin\theta = \frac{BC}{AB} = \mathbf{\frac{24}{25}} \qquad (答)$$

$$\cos\theta = \frac{AC}{BA} = \mathbf{\frac{7}{25}} \qquad (答)$$

$$\tan\theta = \frac{CB}{AC} = \mathbf{\frac{24}{7}} \qquad (答)$$

【2】$\angle B = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ だから，

$$a = 10\sin 40^\circ = 10 \times 0.64 = \mathbf{6.4} \qquad (答)$$

$$b = 10\sin 50^\circ = 10 \times 0.77 = \mathbf{7.7} \qquad (答)$$

【3】右図のように，P，Q，R を定める．

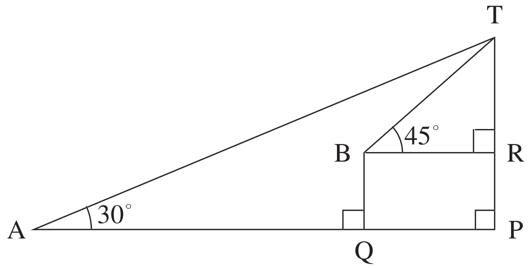
TR $= x$ m とすると，

$\triangle$TBR は直角二等辺三角形，

四角形 BQPR は長方形

であるから

$$\mathrm{BR} = \mathrm{QP} = \mathrm{TR} = x\ (\mathrm{m})$$



また，

$$\mathrm{RP} = \mathrm{BQ} = 150 - 100 = 50\ (\mathrm{m})$$

よって，$\tan 30^\circ = \dfrac{\mathrm{PT}}{\mathrm{AP}}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50+x}{1000+x} \iff 1000 + x = \sqrt{3}(50+x)$$

$$\iff (\sqrt{3}-1)x = 1000 - 50\sqrt{3}$$

$$\iff x = \frac{1000-50\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 475\sqrt{3} + 425$$

よって，求める標高は

$$x + 150 = \mathbf{475\sqrt{3} + 575\ (m)} \qquad (答)$$

【4】(1) $\sin^2\theta + \left(\dfrac{3}{7}\right)^2 = 1$ より，$\sin^2\theta = \dfrac{40}{49}$

$\sin\theta > 0$ より，$\sin\theta = \mathbf{\dfrac{2\sqrt{10}}{7}}$ (答)

よって，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{\frac{3}{7}} = \mathbf{\dfrac{2\sqrt{10}}{3}}$ (答)

(2) 両辺を 2 乗して，$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{9}$$

$$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{9}$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \frac{8}{9} \qquad \therefore\ \sin\theta\cos\theta = \mathbf{\frac{4}{9}} \qquad (答)$$

さらに，

$$\sin^3\theta - \cos^3\theta = (\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{4}{9}\right)$$

$$= \mathbf{\frac{13}{27}} \qquad (答)$$

問題

【1】(1) ① $\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \mathbf{\cos 36^\circ}$ (答)

② $\cos 89^\circ = \cos(90^\circ - 1^\circ) = \mathbf{\sin 1^\circ}$ (答)

③ $\dfrac{1}{\tan 48^\circ} = \dfrac{1}{\tan(90^\circ - 42^\circ)} = \mathbf{\tan 42^\circ}$ (答)

(2) ① $\sin 130^\circ = \sin(90^\circ + 40^\circ) = \mathbf{\cos 40^\circ}$ (答)

② $\sin 145^\circ = \sin(180^\circ - 35^\circ) = \mathbf{\sin 35^\circ}$ (答)

③ $\cos 118^\circ = \cos(90^\circ + 28^\circ) = \mathbf{-\sin 28^\circ}$ (答)

④ $\cos 152^\circ = \cos(180^\circ - 28^\circ) = \mathbf{-\cos 28^\circ}$ (答)

⑤ $\tan 91^\circ = \tan(90^\circ + 1^\circ) = \mathbf{-\dfrac{1}{\tan 1^\circ}}$ (答)

【2】(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ より，$\theta = \mathbf{30^\circ}$，$\mathbf{150^\circ}$ (答)

(2) $\cos\theta = 0$ より，$\theta = \mathbf{90^\circ}$ (答)

(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$ より，$\theta = \mathbf{120^\circ}$ (答)

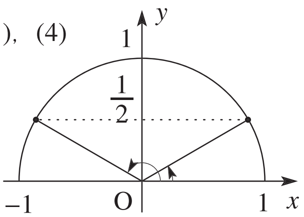
(4) $2(1 - \sin^2\theta) + 5\sin\theta - 4 = 0$ より

$$2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 = 0$$
$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) = 0$$

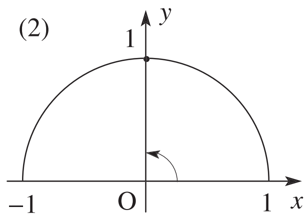
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において，$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ だから，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

よって，$\theta = \mathbf{30^\circ}$，$\mathbf{150^\circ}$ (答)

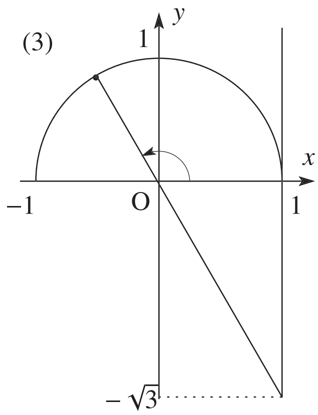
(1)，(4)



(2)



(3)



【3】(1)　図より，$\mathbf{0^\circ \leqq \theta < 60^\circ}$，$\mathbf{120^\circ < \theta \leqq 180^\circ}$　(答)

(2)　図より，$\mathbf{45^\circ \leqq \theta < 90^\circ}$　(答)

(3)　$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ より

$$-\frac{1}{2} \leqq -\cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$\frac{1}{2} \geqq \cos\theta > -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos\theta \leqq \dfrac{1}{2} \cdots\cdots ① \\ \cos\theta > -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より，$60^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，② より，$0^\circ \leqq \theta < 150^\circ$ なので

$\mathbf{60^\circ \leqq \theta < 150^\circ}$　(答)

(4) $\sqrt{2}\cos\theta + 1$ と $2\sin\theta - \sqrt{3}$ が異符号であればよいから，

$$\text{(i)} \begin{cases} \sqrt{2}\cos\theta + 1 \geqq 0 \\ 2\sin\theta - \sqrt{3} \leqq 0 \end{cases}$$

または

$$\text{(ii)} \begin{cases} \sqrt{2}\cos\theta + 1 \leqq 0 \\ 2\sin\theta - \sqrt{3} \geqq 0 \end{cases}$$

(i) のとき

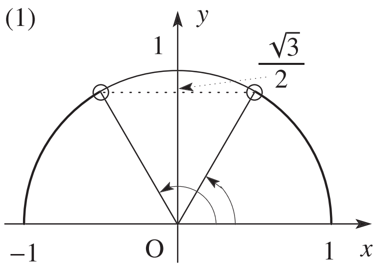
$$\begin{cases} \cos\theta \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

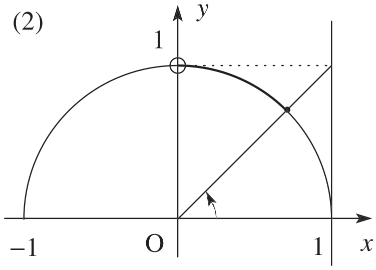
より，$0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ$，$120^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ$

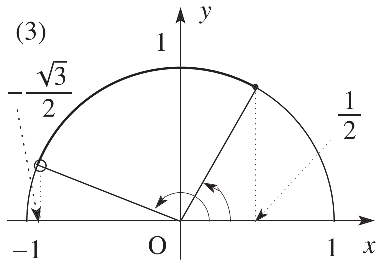
(ii) のとき $\begin{cases} \cos\theta \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

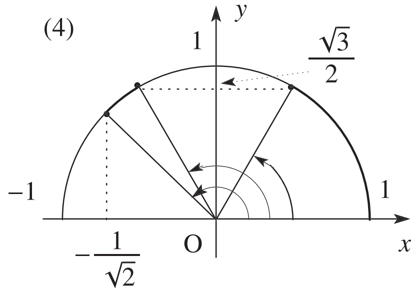
を満たす θ は存在しない

したがって，$\mathbf{0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ}$，$\mathbf{120^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ}$　(答)









【4】(1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{3}{2}$$

よって，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\sin\theta\cos\theta = \mathbf{\frac{1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - 2\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

$0° < \theta < 45°$ より，$\sin\theta < \cos\theta$ だから，$\sin\theta - \cos\theta < 0$

よって

$$\sin\theta - \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\times\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{3}{8}\sqrt{6}} \qquad \text{(答)}$$

(4) $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = \mathbf{4}$ 　　(答)

【5】(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より, 与式は,

$$2(1 - \sin^2\theta) - \sin\theta = 1$$
$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$$
$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$$
$$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{2},\ -1$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より, $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$（図 1 参照）であるから,

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　$\therefore$ $\boldsymbol{\theta = 30^\circ,\ 150^\circ}$　　(答)

(2) $\cos\theta = x$ とおくと,

$x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

図 2 より,

$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta < 45^\circ}$　　(答)

(3)
$$2\cos^2\theta - \cos\theta \leqq 0$$
$$\cos\theta(2\cos\theta - 1) \leqq 0$$
$$\therefore\ 0 \leqq \cos\theta \leqq \frac{1}{2}$$

$\cos\theta = x$ とおくと,

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$

図 3 より,

$\boldsymbol{60^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ}$　　(答)

図 1

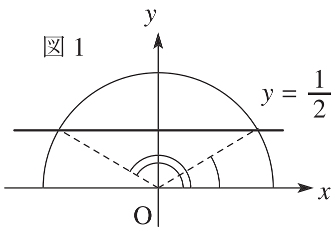


図 2

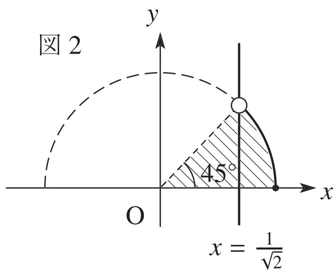
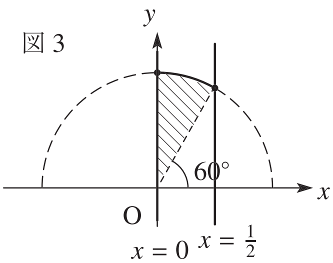


図 3



【6】(1) $\theta = 90^\circ$ のとき，与式は成立しないので，$\theta \fallingdotseq 90^\circ$ とすることができる．$\theta \fallingdotseq 90^\circ$ のとき，

$\dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ だから

$$\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = 2 + \sqrt{3}$$

よって，$\tan\theta = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　　(答)

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，$\cos^2\theta = \dfrac{3}{4}$

$\tan\theta > 0$ より，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ なので，$\cos\theta > 0$ より

$$\cos\theta = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{(答)}$$

したがって

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \mathbf{\frac{1}{2}} \quad \text{(答)}$$

(2) $\cos\theta = 0$ のとき，与式は不成立だから，両辺を $3\cos^2\theta\ (\fallingdotseq 0)$ で割ると

$$\frac{8}{3}\tan\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

これを，$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{8}{3}\tan\theta$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ より，$0 \leqq \tan\theta \leqq 1$，$0 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であることに注意して

$$\tan\theta = \mathbf{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}} \quad \text{(答)}$$

これをもとの式に代入すると

$$\cos^2\theta = \frac{3}{8} \times \frac{3}{4 - \sqrt{7}} = \frac{1}{16} \times (8 + 2\sqrt{7})$$

$$\therefore\quad \cos\theta = \mathbf{\frac{1 + \sqrt{7}}{4}} \quad \text{(答)}$$

よって

$$\sin\theta = \frac{3}{8 \times \frac{1+\sqrt{7}}{4}} = \mathbf{\frac{\sqrt{7} - 1}{4}} \quad \text{(答)}$$

【7】(1) (与式) $= \sin\theta + \cos\theta - \sin\theta - \cos\theta = \mathbf{0}$　　(答)

(2) (与式) $= \cos^2\theta + \sin^2\theta + (-\sin\theta)^2 + (-\cos\theta)^2$

$= 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= \mathbf{2}$　　(答)

【8】与えられた方程式を変形して,

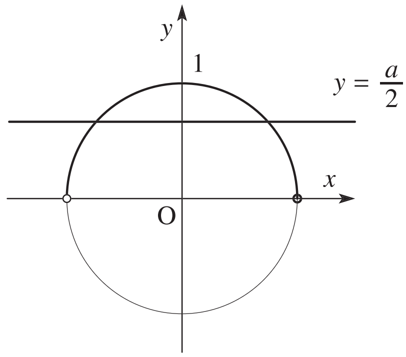
$$2\sin\theta - a = 0$$

$$\sin\theta = \frac{a}{2}$$

よって，求める定数 a の範囲は，右の図より

$$0 < \frac{a}{2} < 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbf{0 < \boldsymbol{a} < 2}$$　　(答)



【9】

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} & \cdots ① \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より，$\sin y = \sqrt{2} - \sin x$，$\cos y = \sqrt{2} - \cos x$ であるから

$$\left(\sqrt{2} - \sin x\right)^2 + \left(\sqrt{2} - \cos x\right)^2 = 1$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \quad \cdots ③$$

$$\therefore\ \cos x = \sqrt{2} - \sin x$$

となり，さらに $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$$\sin^2 x + \left(\sqrt{2} - \sin x\right)^2 = 1$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$

$$\therefore\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ④$$

③ より，$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ⑤$ であるから，④，⑤ より

$$x = 45^\circ$$

一方，④，⑤ を ①，② に代入して

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sin y = \sqrt{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$$

これを整理すると，$\sin y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

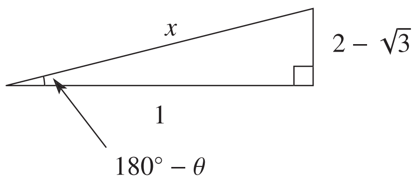
したがって，$0^\circ \leqq y \leqq 180^\circ$ より，$y = 45^\circ$

$$\boldsymbol{x = 45^\circ,\ y = 45^\circ} \qquad (答)$$

【10】(1) $\sqrt{3} < 2$ より，$-2 + \sqrt{3} = \tan\theta < 0$. ゆえに $90° < \theta < 180°$.

$$\tan\theta = -2 + \sqrt{3} \text{ より } \tan(180° - \theta) = 2 - \sqrt{3}$$

よって図より



$$\begin{aligned} x^2 &= \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 1 \\ &= 3 + 4 - 4\sqrt{3} + 1 \\ &= 8 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$x > 0$ であるから

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{8 - 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

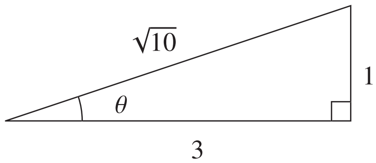
よって

$$\sin\theta = \sin(180° - \theta) = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} \quad \text{(答)}$$

$$\cos\theta = -\cos(180° - \theta) = -\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \quad \text{(答)}$$

(2) $\tan\theta = \dfrac{1}{3}$ より，$0° < \theta < 90°$.

ゆえに図より



$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} (\sin\theta + \cos\theta)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{5}} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

添削課題

【1】(1)　$(\sin 35^\circ + \cos 35^\circ)^2 + (\sin 55^\circ - \cos 55^\circ)^2$

$=(\sin 35^\circ + \cos 35^\circ)^2 + \{\sin(90^\circ - 35^\circ) - \cos(90^\circ - 35^\circ)\}^2$

$=(\sin 35^\circ + \cos 35^\circ)^2 + (\cos 35^\circ - \sin 35^\circ)^2$

$=2(\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ)$

$=\mathbf{2}$　(答)

(2)　$\sin 170^\circ \cos 80^\circ + \cos 10^\circ \sin 80^\circ$

$= \sin(180^\circ - 10^\circ)\cos(90^\circ - 10^\circ) + \cos 10^\circ \sin(90^\circ - 10^\circ)$

$= \sin 10^\circ \sin 10^\circ + \cos 10^\circ \cos 10^\circ$

$= \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ$

$=\mathbf{1}$　(答)

【2】(1) $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$

$\sin 130^\circ = \sin(90^\circ + 40^\circ) = \cos 40^\circ$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ において，θ が増加すると，$\cos\theta$ は減少するから，

$\cos 60^\circ < \cos 50^\circ < \cos 40^\circ < \cos 30^\circ$

よって，

$\mathbf{\cos 60^\circ < \cos 50^\circ < \sin 130^\circ < \sin 120^\circ}$　(答)

(2) $\cos 25^\circ = \cos(90^\circ - 65^\circ) = \sin 65^\circ$

$\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$

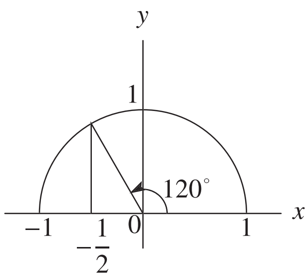
$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ において，θ が増加すると，$\sin\theta$ も増加するから，

$\sin 25^\circ < \sin 40^\circ < \sin 65^\circ$

よって，

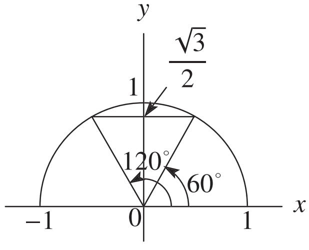
$\mathbf{\sin 25^\circ < \sin 140^\circ < \cos 25^\circ}$　(答)

【3】(1)



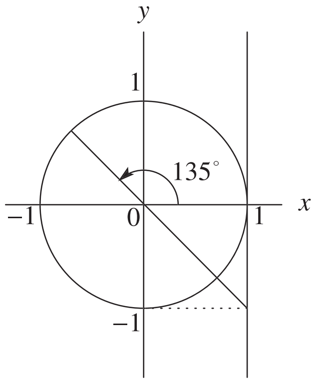
よって，$\boldsymbol{\theta = 120^\circ}$　(答)

(2) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



よって，$\boldsymbol{\theta = 60^\circ,\ 120^\circ}$　(答)

(3)



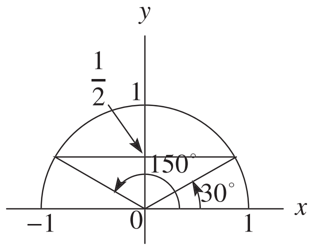
よって，$\boldsymbol{\theta = 135°}$　　(答)

(4) $2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1=0$

$$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$$

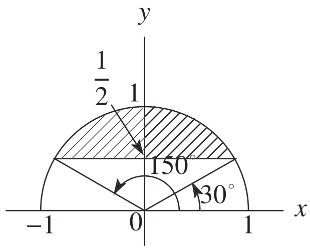
$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$$

$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$



よって，$\boldsymbol{\theta = 30°,\ 150°}$　　(答)

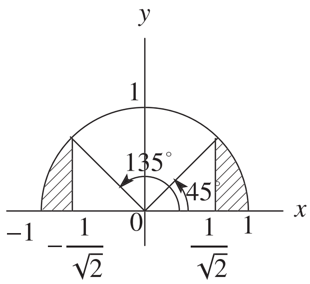
(5)



よって，$\boldsymbol{30° < \theta < 150°}$　　(答)

(6) $\cos^2\theta > \dfrac{1}{2}$ より，

$\cos\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \cos\theta$



よって，

$\boldsymbol{0° \leqq \theta < 45°,\ 135° < \theta \leqq 180°}$　　(答)

【4】(1) $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ より，$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

$\sin^2\theta+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=1$ より，$\sin^2\theta=\dfrac{8}{9}$

$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ だから，$\sin\theta=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$　　(答)

また，$\tan\theta=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{-\dfrac{1}{3}}=\boldsymbol{-2\sqrt{2}}$　　(答)

(2) $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ より，$\tan\theta = -\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$ より，$\cos^2\theta = \dfrac{4}{5}$

$\tan\theta < 0$ より，$\cos\theta < 0$ だから，$\cos\theta = \boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$ (答)

また，$\sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$ (答)

M1TK

高 1 難関大数学 K

Z-KAI

会員番号		氏　名	