M2T

本科 2 期 10 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 難関大数学

１７章　平面ベクトル（１）

問題

【1】(1) 正六角形の中心を O，$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{b}$ とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} \\ &= \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} \qquad \text{(答)} \\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{AO} \\ &= 2(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 6 個に分割された三角形がすべて正三角形であるから，

$$|\overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{AO}| = 2a \qquad \text{(答)}$$

一方，線分 AC と BO の交点を H とおくと，

$$|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AH}|$$

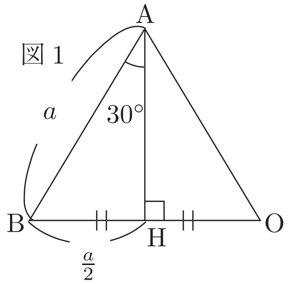
が成立し，

$$|\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{AB}| \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

であるから，

$$|\overrightarrow{AC}| = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3}a \qquad \text{(答)}$$

図 1



【2】 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ を成分表示すると

$$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(3,\ -2)+t(1,\ -4)=(3+t,\ -2-4t)$$

題意をみたすには

$$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=k\overrightarrow{c}\quad(\text{ただし，}k\text{ は }0\text{ でない実数})$$

であればよいから

$$\begin{cases} 3+t=-k & \cdots ① \\ -2-4t=2k & \cdots ② \end{cases}$$

① $\times 2+$ ② より，k を消去して

$$4-2t=0 \qquad \therefore \quad t=2 \quad (\text{このとき，}k=-5\neq 0) \qquad (\text{答})$$

【3】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\big(3-5,\ -1-(-2)\big)=(-2,\ 1)$$

より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-3,\ 4)+t(-2,\ 1)=(-2t-3,\ t+4) \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= (-2t-3)^2+(t+4)^2 = 5t^2+20t+25\\ &= 5(t+2)^2+5\end{aligned}$$

したがって, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最小値は,

$\sqrt{5}$ ($t=-2$ のとき) (答)

(3) 点 P を $(x,\ y)$ とおくと, (1) より,

$$x=-2t-3,\quad y=t+4$$

この 2 式より, t を消去すると,

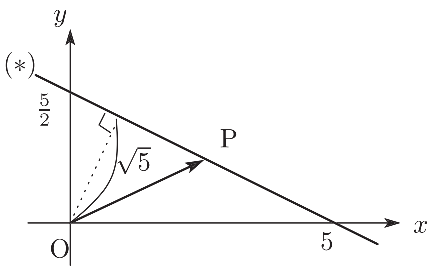
$$x=-2(y-4)-3=-2y+8-3 \quad\Leftrightarrow\quad x+2y=5 \quad\cdots(*) \qquad \text{(答)}$$

研究

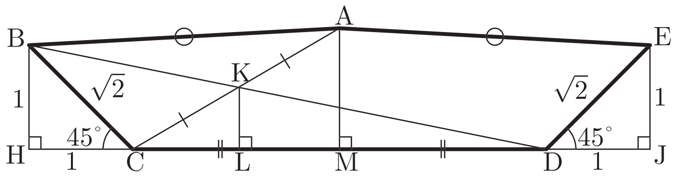
(3) で得られた方程式は, 点 P が直線 $(*)$ 上に存在することを示している. また, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が原点と P との距離を表すものを考えると, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最小値は,

$$\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

と求めることができる. これは, 原点から直線 $(*)$ に下ろした垂線の長さを表す.



【4】条件より，図示すると



(1) 図において

$$\angle \mathrm{BCH} = \angle \mathrm{EDJ} = 45^\circ,\ \mathrm{BC} = \mathrm{DE} = \sqrt{2}$$

となるので

$$\mathrm{HC} = \mathrm{JD} = 1$$

だから

$$\mathrm{BE} = \mathrm{HJ} = 6$$

$\mathrm{CD} = 4$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 辺 CD の中点を M とすると

$$\mathrm{AM} \perp \mathrm{CD}$$

となるので，$\mathrm{CK} = \mathrm{KA}$ より

$$\mathrm{CL} = \frac{1}{2}\mathrm{CM} = \frac{1}{4}\mathrm{CD} = 1 \qquad \text{(答)}$$

(3) $\triangle \mathrm{BHD} \backsim \triangle \mathrm{KLD}$ より

$$\mathrm{BK} : \mathrm{BD} = \mathrm{HL} : \mathrm{HD} = 2 : 5$$

となるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CK}} &= \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{BK}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\end{aligned}$$

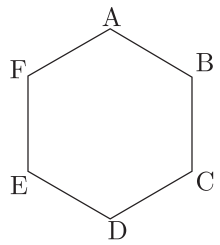
これより

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{CD}} \qquad \text{(答)}$$

【5】

すべてを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ で表す.

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}$$



であるから

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{CD}} + l\overrightarrow{\mathrm{DE}} + m\overrightarrow{\mathrm{EF}} + n\overrightarrow{\mathrm{FA}} \\
= \ & \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}) + 3\overrightarrow{\mathrm{AF}} - l\overrightarrow{\mathrm{AB}} - m(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}) - n\overrightarrow{\mathrm{AF}} \\
= \ & (3 - l - m)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (5 - m - n)\overrightarrow{\mathrm{AF}} \\
= \ & \vec{0}
\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ は平行でないので

$$\begin{cases} 3 - l - m = 0 \\ 5 - m - n = 0 \end{cases}$$

これをみたす正の整数の組は

$$(l,\ m,\ n) = (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 1,\ 4) \qquad \text{(答)}$$

【6】(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (3t^2+2t,\ t^2-t-4)-(t^2-2t-8,\ 2t^2+t)\\ &= (2t^2+4t+8,\ -t^2-2t-4)\ =\ (t^2+2t+4)(2,\ -1)\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (t^2-8,\ 2t^2)-(t^2-2t-8,\ 2t^2+t)\\ &= (2t,\ -t)\ =\ t(2,\ -1)\end{aligned}$$

また,

$$t^2+2t+4=(t+1)^2+3>0 \quad (t\neq 0)$$

であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{t}{t^2+2t+4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となり, 3 点 A, B, C は同一直線上に存在することがわかる. 〔証明終〕

(2) (1) より,

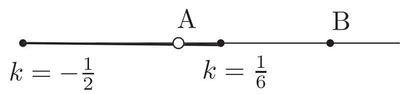
$$\begin{aligned}k=\frac{t}{t^2+2t+4} \quad &\Leftrightarrow \quad k(t^2+2t+4)=t\\ &\Leftrightarrow \quad kt^2+(2k-1)t+4k=0\end{aligned}$$

と表されるが, t は 0 でない実数であるから,

$$\begin{aligned}&(2k-1)^2-4k\cdot 4k\geqq 0 \quad (k\neq 0)\\ \Leftrightarrow\quad &(2k+1)(6k-1)\leqq 0 \quad (k\neq 0)\\ \Leftrightarrow\quad &-\frac{1}{2}\leqq k\leqq\frac{1}{6} \quad (k\neq 0) \qquad (答)\end{aligned}$$

(3)

$$t^2+2t+4>0$$



が成り立つことから, 点 A, B が一致することはない. そこで, 図のように点 A, B をとると, (2) より, C の変域は図の太線部分となる. しかし, 4 点を等間隔で並べるためには, C-A-D-B の順に並べるしかなく, 点 D が線分 AB の中点となるようにする. したがって, $k=-\dfrac{1}{2}$ であり, (2) より,

$$(t+2)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-2 \qquad (答)$$

問題

【1】条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (3,\ b)$$

となるので

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \cos\angle\mathrm{AOB} \\
\Leftrightarrow\quad & 2 \times 3 + 1 \times b = \sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{3^2 + b^2} \times \cos 45^\circ \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{2}(b + 6) = \sqrt{5(b^2 + 9)} \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

このとき，(①の右辺) > 0 だから

$$b + 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b > -6 \quad \cdots ②$$

となり，①の両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}
2(b^2 + 12b + 36) = 5(b^2 + 9) \quad & \Leftrightarrow \quad b^2 - 8b - 9 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (b + 1)(b - 9) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad b = -1,\ 9
\end{aligned}$$

これらは，ともに②をみたすので，適する．

$$\therefore \quad b = -1,\ 9 \qquad (\text{答})$$

【2】(1) 条件より

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=5 \quad &\Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{a}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=5\\
&\Leftrightarrow \quad 3-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4=5\\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1 \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

(2) (1) より

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=9$$

となるので

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=3 \qquad (\text{答})$$

(3) (1) より

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|^2 &= |\overrightarrow{a}|^2+2t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t^2|\overrightarrow{b}|^2\\
&= 4t^2+2t+3\\
&= 4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}
\end{aligned}
$$

となるので

$$\text{最小値}\quad \frac{\sqrt{11}}{2}\ \left(t=-\frac{1}{4}\text{のとき}\right) \qquad (\text{答})$$

【3】(1)　(i)

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,\ 3)-(-1,\ 2)=(3,\ 1)$$

よって

C(3, 1)　　(答)

(ii)

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{-1\cdot 3+2\cdot 1}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{9+1}}=-\frac{1}{5\sqrt{2}}\qquad\text{(答)}$$

(iii) $0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{50}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}\qquad\text{(答)}$$

(iv) 平行四辺形 OABC の面積は

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\sin\theta=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}=7\qquad\text{(答)}$$

(2) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると，三角形 OAB の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{OB}=(b_1,\ b_2)$ を代入すると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2{b_2}^2-2a_1a_2b_1b_2+{a_2}^2{b_1}^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|\end{aligned}$$

〔証明終〕

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(6,\ 8)\\\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4,\ 11)\end{aligned}$$

よって，三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}|6\cdot 11-4\cdot 8|=17\qquad\text{(答)}$$

【4】(1) 条件より

$$|\overrightarrow{a}|^2 = 7^2 + (-4)^2 = 65$$

だから，$2\overrightarrow{x} + 3\overrightarrow{y} = \overrightarrow{a}$ より

$$\begin{aligned}|2\overrightarrow{x} + 3\overrightarrow{y}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4|\overrightarrow{x}|^2 + 12\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} + 9|\overrightarrow{y}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 13|\overrightarrow{x}|^2 = 65 \\ &\Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{x}|^2 = 5\end{aligned}$$

となるので

$$|\overrightarrow{x}| = \sqrt{5} \quad \cdots ① \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$2\overrightarrow{x} + 3\overrightarrow{y} = \overrightarrow{a} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{y}$$

となるので，①より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{x}|^2 = 9|\overrightarrow{y}|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{a}|^2 - 4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x} + 4|\overrightarrow{x}|^2 = 9|\overrightarrow{y}|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 65 - 4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x} + 20 = 45 \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x} = 10 \quad \cdots ② \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{x} = (p,\ q)$ とおくと，①より

$$p^2 + q^2 = 5 \quad \cdots ③$$

となり，また，②より

$$7p - 4q = 10 \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{7p - 10}{4} \quad \cdots ④$$

となるので，④を③に代入して

$$\begin{aligned}p^2 + \left(\frac{7p-10}{4}\right)^2 = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad 13p^2 - 28p + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (13p - 2)(p - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p = \frac{2}{13},\ 2\end{aligned}$$

これより

(i) $p = \dfrac{2}{13}$ のとき

④より

$$q = \frac{7 \times \dfrac{2}{13} - 10}{4} = -\frac{29}{13}$$

となるので

$$\overrightarrow{x} = \left(\frac{2}{13},\ -\frac{29}{13}\right)$$

このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{y} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{a} - \frac{2}{3}\overrightarrow{x} \\ &= \frac{1}{3}(7,\ -4) - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{13},\ -\frac{29}{13}\right) \\ &= \left(\frac{29}{13},\ \frac{2}{13}\right)\end{aligned}$$

(ii) $p=2$ のとき

④より

$$q=\frac{7\times 2-10}{4}=1$$

となるので

$$\overrightarrow{x}=(2,\ 1)$$

このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{y} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{a}-\frac{2}{3}\overrightarrow{x}\\ &= \frac{1}{3}(7,\ -4)-\frac{2}{3}(2,\ 1)\\ &= (1,\ -2)\end{aligned}$$

以上から

$$\overrightarrow{x}=\left(\frac{2}{13},\ -\frac{29}{13}\right),\ \overrightarrow{y}=\left(\frac{29}{13},\ \frac{2}{13}\right)\quad \text{または}\quad \overrightarrow{x}=(2,\ 1),\ \overrightarrow{y}=(1,\ -2)\qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 条件より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -a-c\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = -a-b\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}\mathrm{CA}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right)\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = -b-c\end{aligned}$$

である. 〔証明終〕

(2) (1) より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{-\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\sqrt{-a-c}\times\sqrt{-b-c}} = -\frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$ (答)

(3) (2) より

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{c^2}{(a+c)(b+c)}} = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{(a+c)(b+c)}}$$

となるので，正弦定理より

$$R = \frac{\mathrm{BC}}{2\sin\theta} = \frac{\sqrt{-a-b}}{2\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{(a+c)(b+c)}}} = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca}}$$ (答)

【6】(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ より

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=-\sqrt{2}\,\overrightarrow{c} \qquad \therefore \quad |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\sqrt{2}\,\overrightarrow{c}|$$

これより

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\sqrt{2}\,\overrightarrow{c}|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}) \\ &\Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{a}|^2+2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+|\overrightarrow{b}|^2=2|\overrightarrow{c}|^2 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=1$ だから

$$1+2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+1=2 \qquad \therefore \quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0 \qquad \text{(答)}$$

同様に，$\overrightarrow{b}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{a}$ より $|\overrightarrow{b}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{a}|$ となるので

$$|\overrightarrow{b}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{c}|^2=|\overrightarrow{a}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{b}|^2+2\sqrt{2}(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})+2|\overrightarrow{c}|^2=|\overrightarrow{a}|^2$$

$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=1$ だから

$$1+2\sqrt{2}(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})+2=1 \qquad \therefore \quad \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

同様に，$|\sqrt{2}\,\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$ より

$$|\sqrt{2}\,\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}|^2=|\overrightarrow{b}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2|\overrightarrow{c}|^2+2\sqrt{2}(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})+|\overrightarrow{a}|^2=|\overrightarrow{b}|^2$$

$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=1$ だから

$$2+2\sqrt{2}(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})+1=1 \qquad \therefore \quad \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の結果より

$$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b} \qquad \therefore \quad \angle\mathrm{BOA}=90^\circ$$

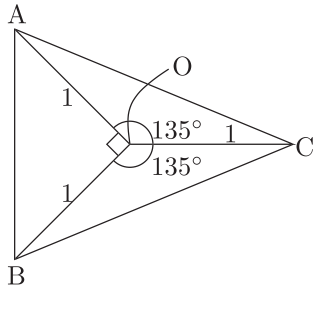
また

$$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=1, \quad \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \cos\angle\mathrm{BOC}=\cos\angle\mathrm{COA}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

だから，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{a}$ のなす角はともに 135° であり，O，A，B，C の位置関係は下図のようになるので

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$$
$$\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OCA}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

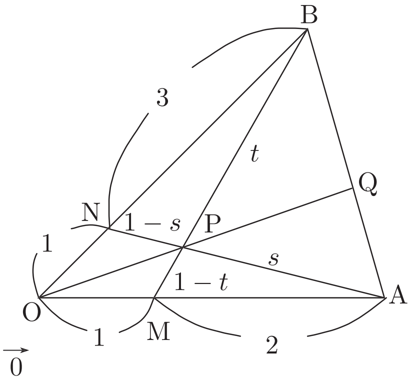


よって

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCA} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

問題

【1】(1) $\mathrm{BP}:\mathrm{PM}=t:(1-t)$ とおくと



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots①\end{aligned}$$

$\mathrm{AP}:\mathrm{PN}=s:(1-s)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\overrightarrow{\mathrm{ON}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \frac{s}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots②\end{aligned}$$

①−②より

$$\left(\frac{t}{3}+s-1\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-t-\frac{s}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は１次独立であるから

$$\frac{t}{3}+s-1=0 \quad \text{かつ} \quad 1-t-\frac{s}{4}=0$$

$$\therefore \quad s=\frac{8}{11}, \quad t=\frac{9}{11}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{11}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \text{(答)}$$

(2) O，P，Q は同一直線上にあることから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad (k\text{ は実数})$$

と表すことができる．これに (1) の結果を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{11}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{11}k\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots③$$

ここで，点 Q は直線 AB 上にあるから

$$\frac{3}{11}k+\frac{2}{11}k=1 \qquad \therefore \quad k=\frac{11}{5}$$

これを③に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \text{(答)}$$

【2】

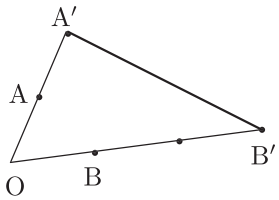
(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\alpha}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + \frac{\beta}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

よって, 求める図形は, $\mathrm{OA}' = 2\mathrm{OA}$, $\mathrm{OB}' = 3\mathrm{OB}$ としたときの, 線分 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ であり, 図示すると図 1 の太線部のようになる.

(答)

図 1



(2) 3 つの条件 $1 \leqq \alpha + \beta \leqq 2$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $0 \leqq \beta \leqq 1$ で定まる共通範囲をとればよい.

(i) $0 \leqq \alpha \leqq 1$ かつ $0 \leqq \beta \leqq 1$
$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より図 2 のようになる.

(ii) $1 \leqq \alpha + \beta \leqq 2$
$\mathrm{OA}' = 2\mathrm{OA}$, $\mathrm{OB}' = 2\mathrm{OB}$ として, 図 3 のようになる.

以上より, 求める図形は図 4 の斜線部 (境界含む) のようになる. (答)

図 2

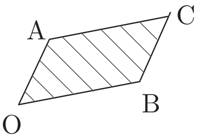


図 3

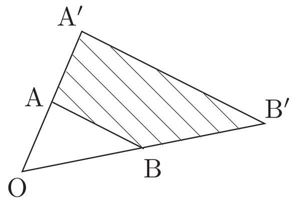
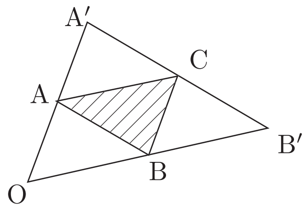
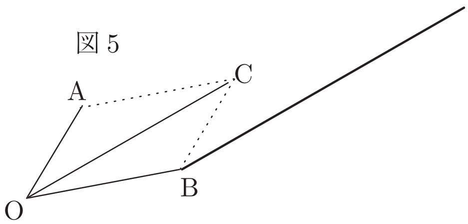


図 4



(3) $\beta = \alpha + 1$ より,

図 5

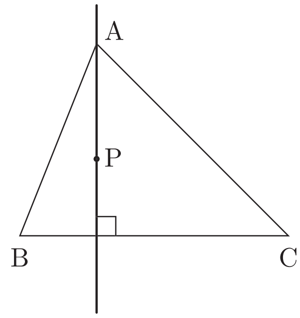


$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\alpha+1)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \alpha(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると, 求める図形は点 B を始点とし, OC に平行な半直線となり, 図示すると図 5 の太線部のようになる. (答)

【3】(1)

$$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$



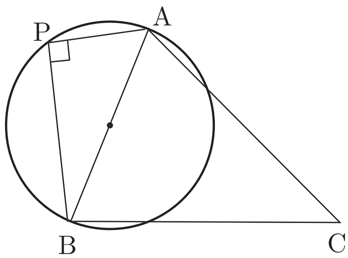
$\overrightarrow{BC}\neq\overrightarrow{0}$ より

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{0}\quad \text{または}\quad \overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$$

よって，点 P の軌跡は点 A を通り辺 BC に垂直な直線である．　　(答)

(2) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ より

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{0}\ \text{または}\ \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{0}\ \text{または}\ AP\perp BP$$



つまり

$$A=P\ \text{または}\ B=P\ \text{または}\ \angle APB=90^\circ$$

よって，点 P の軌跡は AB を直径とする円である．(答)

(3) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ より

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\quad\cdots①$$

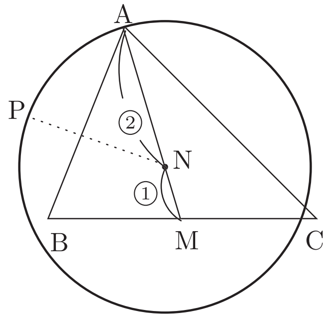
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$
$$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AP}=0$$
$$|\overrightarrow{AP}|^2-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AP}|^2-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$+|\overrightarrow{AP}|^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$
$$3|\overrightarrow{AP}|^2-2\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0\quad\because ①$$

辺 BC の中点を M とすると

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\qquad\therefore\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$$

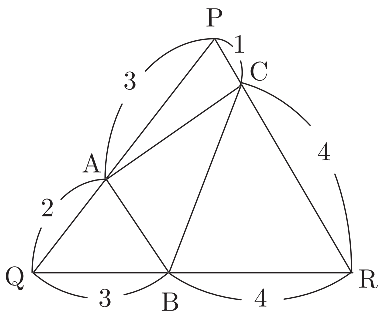
よって

$$|\overrightarrow{AP}|^2-\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$
$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{AP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\right|^2=\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\right|^2$$



したがって，点 P の軌跡は線分 AM を 2 : 1 に内分する点 N を中心とする半径 AN の円である．　　(答)

【4】点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ とし，△ABC の重心の位置ベクトルを $\overrightarrow{g}$ とおくと



$$\overrightarrow{a} = \frac{2\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}}{5}$$
$$\overrightarrow{b} = \frac{4\overrightarrow{q} + 3\overrightarrow{r}}{7}$$
$$\overrightarrow{c} = \frac{\overrightarrow{r} + 4\overrightarrow{p}}{5}$$

よって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{g} &= \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\right)\overrightarrow{p} + \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{7}\right)\overrightarrow{q} + \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{5}\right)\overrightarrow{r}\right\} \\
&= \frac{2}{5}\overrightarrow{p} + \frac{41}{105}\overrightarrow{q} + \frac{22}{105}\overrightarrow{r} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【5】(1)

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\\
\Leftrightarrow\ &(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\\
\Leftrightarrow\ &4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=0
\end{aligned}$$

と変形されるが,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{0}$$

であることから,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=4 \qquad \therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2$$

ゆえに, 点 P の軌跡は, 原点を中心とする半径 2 の円, つまり $x^2+y^2=4$ である.

(答)

(2) 点 P を $(x,\ y)$ とおくと, (1) より,

$$x^2+y^2=4 \quad \cdots①$$

が成立し, このとき,

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 &= \left\{(x-1)^2+y^2\right\}\left\{(x+1)^2+y^2\right\}\\
&= (x^2+y^2-2x+1)(x^2+y^2+2x+1)\\
&= (5-2x)(5+2x)\\
&= 25-4x^2
\end{aligned}$$

一方, ①より, $0\leqq x^2\leqq 4$ であるから,

$$\begin{aligned}
9\leqq 25-4x^2\leqq 25 \quad&\Leftrightarrow\quad 9\leqq|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2\leqq 25\\
&\Leftrightarrow\quad 3\leqq|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\leqq 5
\end{aligned}$$

したがって, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ は,

$$\begin{cases}\mathrm{P}(x,\ y)=(\pm2,\ 0)\ \text{のとき,}\quad \text{最小値}\ 3\\ \mathrm{P}(x,\ y)=(0,\ \pm2)\ \text{のとき,}\quad \text{最大値}\ 5\end{cases} \qquad \text{(答)}$$

をとる.

注

(2) も成分に置き換えることなく求めることができる.

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\
&= (5-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})(5+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\
&= 25-4(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2
\end{aligned}$$

このとき, 点 P が円 $x^2+y^2=4$ 上のすべての点をとり得ることから,

$$0\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq 2$$

(左辺等号成立は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, 右辺等号成立は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のとき)

よって,

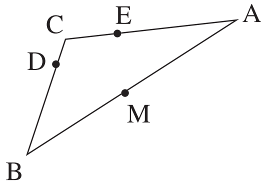
$$9\leqq|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2\leqq 25 \qquad \therefore\quad 3\leqq|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\leqq 5$$

添削課題

【1】(1)

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} = \frac{2}{7}\vec{b} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{14}\vec{b} \qquad (\text{答})$$

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \qquad (\text{答})$$



(2) $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{7}$ より

$$22 = 9 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 7 \qquad \therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = -3$$

これより

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{CB} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{14}\vec{b}\right)\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{3}{14}|\vec{b}|^2$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot(-3) - \frac{3}{14}\cdot 7 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{CA} = \left(-\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{a} = -\frac{1}{6}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 9 - \frac{1}{2}\cdot(-3) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{CA}$ のいずれも $\vec{0}$ ではないから

$$MD \perp CB,\ ME \perp CA$$

〔証明終〕

問題

【1】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \qquad (答)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DH}} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \qquad (答)$$

(2) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = \sqrt{2},\ |\vec{c}| = 1$ より,

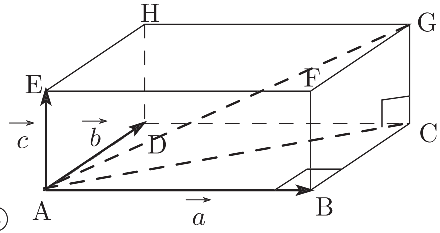
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BH}} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \{(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a}\}\{(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}\} \\ &= |\vec{b} + \vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 \\ &= -|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= -9 + 2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 1\end{aligned}$$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BH}} = -9 + 2 + 0 + 1 = -6 \quad \cdots ① \qquad (答)$$

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BH}} = |\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{BH}}| \cos\theta$$
$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{BH}}|} \quad \cdots ②$$



△ ABC において, 三平方の定理より,

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 9 + 2 = 11$$

△ AGC において, 三平方の定理より,

$$\mathrm{AG}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{GC}^2 = 11 + 1 = 12$$

$\cdots ③$

また, この図形は直方体であるから,

$$\mathrm{AG} = \mathrm{BH} \quad \cdots ④$$

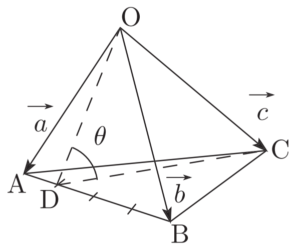
①, ②, ③, ④より,

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{BH}}|} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \theta = 120^\circ \qquad (答)$$

【2】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \qquad \text{(答)}$$

各面は, 1 辺の長さが 1 の正三角形をなすことから,



$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \qquad \cdots ①$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cdots ②$$

①, ②を用いて,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 &= \frac{1}{16}(9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{16}(9+3+1) = \frac{13}{16} \\ \therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{OD}}| &= \frac{\sqrt{13}}{4} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} - \vec{c}$ (答)

(3)
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} &= \left(\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right)\cdot\left(\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4} - \vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{16}(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b}-4\vec{c}) \\ &= \frac{1}{16}\left\{|3\vec{a}+\vec{b}|^2 - 4\vec{c}\cdot(3\vec{a}+\vec{b})\right\} \\ &= \frac{1}{16}(9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{c} - 4\vec{b}\cdot\vec{c}) \\ &= \frac{1}{16}\left(9 + 6\cdot\frac{1}{2} + 1 - 12\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2}\right) \quad (\because\ ①, ②) \\ &= \frac{5}{16} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$$

(1), (2) の結果を用いると, OD = CD より,

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{13}{16}} = \frac{5}{13} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 図 1 より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c} \qquad \text{(答)}$$

図 1

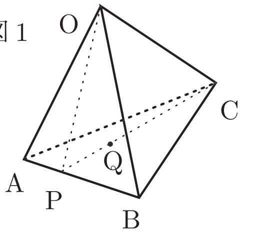
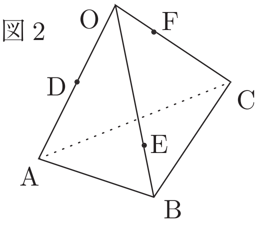


図 2



(2) (図 2 参照)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\frac{2}{5}k\vec{a}+\frac{1}{5}k\vec{b}+\frac{2}{5}k\vec{c}\\&=\frac{2}{5}k(2\overrightarrow{\mathrm{OD}})+\frac{1}{5}k\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)+\frac{2}{5}k(3\overrightarrow{\mathrm{OF}})\end{aligned}$$

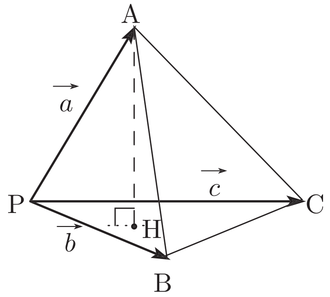
R は平面 DEF 上にあるので

$$\frac{2}{5}k\cdot 2+\frac{1}{5}k\cdot\frac{3}{2}+\frac{2}{5}k\cdot 3=\frac{23}{10}k=1 \qquad \therefore\quad k=\frac{10}{23}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{4}{23}\vec{a}+\frac{2}{23}\vec{b}+\frac{4}{23}\vec{c} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 各辺の長さが 1 であるから,



$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \qquad \text{(答)}$$

また, 各面が正三角形であるから,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{(答)}$$

同様にして,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) 平面 PBC において, $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立であり, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = s\vec{b} + t\vec{c} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{PH}} - \overrightarrow{\mathrm{PA}} = s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}$$

H は A から平面 PBC に下ろした垂線であるから, $\mathrm{AH} \perp \mathrm{PB}$, $\mathrm{AH} \perp \mathrm{PC}$ である.
(1) の結果を用いると,

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{b} \cdot (s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}) = s + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{c} \cdot (s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}s + t - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots ②$$

①, ②より,

$$s = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{PH}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \qquad \text{(答)}$$

(3) △PBC は, 1 辺の長さ 1 の正三角形であるから,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \vec{a}$ より,

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + \frac{2}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2}{3}$$
$$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

よって, 求める体積を V とすると,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 4 点 O，A，B，C は同一平面上にあるとき，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表せるので，条件より

$$\begin{aligned}(0,\ 1,\ c) &= \alpha(2,\ 0,\ a) + \beta(2,\ 1,\ 5)\\ &= (2\alpha + 2\beta,\ \beta,\ a\alpha + 5\beta)\end{aligned}$$

これより

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 & \cdots ① \\ \beta = 1 & \cdots ② \\ a\alpha + 5\beta = c & \cdots ③ \end{cases}$$

となるので，①，②より

$$\alpha = -1,\ \beta = 1$$

これを③に代入して

$c = -a + 5$　　(答)

(2) (1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となるので

「四角形 OABC は平行四辺形」

このとき，四角形 OABC の面積を $S(a)$ とすると

$$\begin{aligned}S(a) &= 2\triangle\mathrm{OAB}\\ &= 2 \times \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\ &= \sqrt{(4 + a^2)(4 + 1 + 25) - (4 + 5a)^2}\\ &= \sqrt{5a^2 - 40a + 104}\\ &= \sqrt{5(a - 4)^2 + 24}\end{aligned}$$

となるので，$S(a)$ の最小値は

$S(4) = 2\sqrt{6}$　　(答)

【6】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．OA = AB より

$$|\vec{a}|=|\vec{b}-\vec{a}|$$

この両辺を 2 乗して変形すると

$$|\vec{b}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

同様に BC = OC より

$$|\vec{b}|^2=2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

OA ⊥ BC から

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

つまり

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

以上から

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$$

よって

$$\mathrm{OB}\perp\mathrm{AC}$$

〔証明終〕

(2)

$$\begin{aligned}&(\text{左辺})-(\text{右辺})\\ =\ &|\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2-|\vec{b}|^2-|\vec{c}-\vec{a}|^2\\ =\ &2(\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c})\\ =\ &0\end{aligned}$$

よって，(左辺) = (右辺) が示せた．　〔証明終〕

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{h}$ とおく．点 H は △ABC 上にあるから

$$\vec{h}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c},\ \alpha+\beta+\gamma=1$$

とおける．

H が △ABC の垂心なので

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}$$

これより

$$\begin{cases}(\vec{h}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0\\ (\vec{h}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0\end{cases}$$

これを展開し

$$|\overrightarrow{a}|^2 = |\overrightarrow{b}|^2 = 36,\ |\overrightarrow{c}|^2 = 25,\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{b}|^2 = 18$$

を代入すると

$$\begin{cases} -18\beta + 7\gamma = 0 \\ -18\alpha + 7\gamma = 0 \end{cases}$$

$\alpha + \beta + \gamma = 1$ とともにこれを解いて

$$\alpha = \beta = \frac{7}{32},\ \gamma = \frac{9}{16}$$

を得る.

$$\overrightarrow{h} = \frac{1}{32}(7\overrightarrow{a} + 7\overrightarrow{b} + 18\overrightarrow{c})$$

これより

$$|\overrightarrow{h}|^2 = \frac{351}{16}$$

よって

$$\mathrm{OH} = |\overrightarrow{h}| = \frac{3\sqrt{39}}{4} \qquad \text{(答)}$$

M2T

高２難関大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	