M2TK

本科 2 期 10 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 難関大数学 K

問題

【1】与えられた数列を $\{a_n\}$ とすると，一般項 a_n は

$$a_n = 2n - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である．

(1) 第 n 群には n 個の項が含まれるので，第 1 群から第 9 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9 \cdot (9+1)}{2} = 45$$

よって第 10 群の最初の数は，数列 $\{a_n\}$ の第 46 項．したがって

$$a_{46} = 2 \cdot 46 - 1 = \mathbf{91} \qquad \text{(答)}$$

(2) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項数の総和は，$n \geqq 2$ として

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

よって 第 n 群の最初の数は，数列 $\{a_n\}$ の第

$$\frac{1}{2}n(n-1) + 1$$

項．ゆえに

$$a_{\frac{1}{2}n(n-1)+1} = 2 \cdot \left\{\frac{1}{2}n(n-1) + 1\right\} - 1 = \boldsymbol{n^2 - n + 1} \qquad \text{(答)}$$

これは $n = 1$ のときも成立する．

(3) 第 1 群から第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であるから，第 n 群の最後の数は，

$$a_{\frac{1}{2}n(n+1)} = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 1 = n^2 + n - 1$$

である．

したがって 求める和は，初項 $n^2 - n + 1$，末項 $n^2 + n - 1$，項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{n \cdot \left\{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)\right\}}{2} = \frac{n \cdot 2n^2}{2} = \boldsymbol{n^3} \qquad \text{(答)}$$

【2】与えられた数列を $\{a_n\}$ とすると，一般項 a_n は

$$a_n = n$$

である．

(1) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項数の総和は，$n \geqq 2$ として

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1$$

である．したがって第 n 群の最初の数は，数列 $\{a_n\}$ の第

$$\left(2^{n-1} - 1\right) + 1 = 2^{n-1}$$

項．これは $n = 1$ のときも成立する．また第 1 群から第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^{n} - 1)}{2 - 1} = 2^{n} - 1$$

であるから，第 n 群の最後の数は，数列 $\{a_n\}$ の第

$$2^n - 1$$

項．ゆえに求める和は，初項 2^{n-1}，末項 $2^n - 1$，項数 2^{n-1} の等差数列の和である．すなわち

$$\begin{aligned}\frac{2^{n-1}\left\{2^{n-1} + (2^n - 1)\right\}}{2} &= 2^{n-2}\left(2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} - 1\right) \\ &= 2^{n-2}\left(3 \cdot 2^{n-1} - 1\right) \\ &= \mathbf{3 \cdot 2^{2n-3} - 2^{n-2}} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) 1000 が第 n 群に含まれるとすると，

$$2^{n-1} \leqq 1000 \leqq 2^n - 1$$

ここで

$$2^9 = 512,\ 2^{10} = 1024$$

より，この不等式をみたす正整数 n は，$n = 10$ である．すなわち 1000 は第 10 群に含まれる．また，第 10 群の最初の数は

$$2^{10-1} = 512$$

より

$$1000 - 512 + 1 = 489$$

ゆえに，1000 は

第 10 群の 489 番目　　(答)

の数である．

【3】数列を

$$1 \mid 2,\ 2 \mid 3,\ 3,\ 3 \mid 4,\ \cdots$$

のように，第 n 群に n 個の項が含まれるように分ける．

(1) 第 n 群には n 個の正整数が含まれるので，2 桁の数が現れるのは第 10 群から第 99 群まで．その個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=10}^{99} k &= \sum_{k=1}^{99} k - \sum_{k=1}^{9} k \\ &= \frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100 - \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10 \\ &= \frac{90}{2}(110-1) \\ &= \mathbf{4905}\ \text{個} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) 初めて 100 が現れるのは，第 100 群の最初の項である．第 1 群から第 99 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{99} k = \frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100 = 4950$$

この次に初めて 100 が現れるから，最初の 100 は

第 4951 項　　(答)

(3) 第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であり，第 $n-1$ 群までの項数の総和は，$n \geqq 2$ として

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$$

である．第 10000 項が第 n 群に含まれるとすると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}n(n-1) < 10000 \leqq \frac{1}{2}n(n+1) \\ \Longleftrightarrow\quad &n(n-1) < 20000 \leqq n(n+1)\end{aligned}$$

ここで

$$140\cdot 141 = 19740,\quad 141\cdot 142 = 20022$$

より，これをみたす整数 n は $n = 141$．ゆえに第 10000 項は

141　　(答)

【4】与えられた数列を

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \ \frac{2}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \ \frac{2}{3},\ \ \frac{3}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \ \frac{2}{4},\ \ \frac{3}{4},\ \ \frac{4}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \ \cdots$$

のように群に分ける．このとき第 n 群には n 個の数が含まれ，第 n 群の第 k 項は

$$\frac{k}{n}\ \ (1 \leqq k \leqq n)$$

となる．ただし n，k は正整数とする．

(1) $\dfrac{7}{15}$ は

第 15 群の第 7 項

である．第 14 群までの項数の総和は

$$\sum_{l=1}^{14} l = \frac{1}{2}\cdot 14\cdot 15 = 105$$

より，$\dfrac{7}{15}$ は

$105 + 7 =$ **第 112 項**　　(答)

(2) 第 n 群までの項数の総和は

$$\sum_{l=1}^{n} l = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であり，第 $n-1$ 群までの項数の総和は，$n \geqq 2$ として

$$\sum_{l=1}^{n-1} l = \frac{1}{2}n(n-1)$$

である．第 200 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1) < 200 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\Longleftrightarrow\quad n(n-1) < 400 \leqq n(n+1)$$

ここで

$$19\cdot 20 = 380,\ \ 20\cdot 21 = 420$$

であるから，これをみたす整数 n は $n = 20$．ゆえに a_{200} は第 20 群に含まれる．また第 1 群から第 19 群までの項数の総和は

$$\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20 = 190$$

であるから，a_{200} は第 20 群の

$200 - 190 =$ 第 10 項

ゆえに

$$a_{200} = \boldsymbol{\frac{10}{20}}\qquad \text{(答)}$$

(3) 第 n 群に含まれる数の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n+1}{2}$$

ここで求める和は

(第 1 群から第 19 群までの数の総和) + (第 20 群の第 1 項から第 10 項までの和)

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{200} a_k &= \sum_{k=1}^{19} \frac{k+1}{2} + \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{20} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{19} k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{19} 1 + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 19 + \frac{11}{4} \\
&= \boldsymbol{\frac{429}{4}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【5】与えられた数列を

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3}\ \Big|\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}\ \Big|\ \cdots\cdots$$

のように分ける．ここで，第 n 群には n 個の項が含まれる．

(1) 第 11 項は第 5 群の第 1 項であり，第 15 項は第 5 群の最後の項である．ゆえに第 11 項から第 15 項までを列挙すると

$$\boldsymbol{\frac{5}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{5}} \qquad (答)$$

(2) 第 n 群の数の，分母と分子の和は $n+1$ になる．また，各群の第 k 項の分母は k であるから，第 n 群の第 k 項は

$$\frac{n-k+1}{k}\ \ (1 \leqq k \leqq n)$$

と表される．ただし n，k は正整数とする．このとき $\dfrac{a}{b}$ は

第 $(a+b-1)$ 群

に含まれ，分母が b であるから，

第 $(a+b-1)$ 群の第 b 番目

の項である．よって，$a+b \geqq 3$ のとき

$$n = \sum_{k=1}^{a+b-2} k + b = \boldsymbol{\frac{1}{2}(a+b-2)(a+b-1)+b} \qquad (答)$$

これは $a+b=2$，すなわち $a=b=1$ のときも成立する．

【6】問題の数列を列挙すると

$$1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29 \mid 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 49,\ 53,\ 59 \mid 61,\ \cdots$$

これを上のように分ける．

(1) 30 以下の数はすべて第 1 群に含まれ，その個数は **8 個**　(答)

(2) 各群には 8 個の数が含まれるから，第 n 群までの項数の総和は

$$8n \text{ 項}$$

ゆえに第 1000 項が第 n 群に含まれるとすると，

$$8(n-1) < 1000 \leqq 8n$$

これをみたす整数 n は，$n = 125$．ここで

$$8 \cdot 125 = 1000$$

より，第 1000 項は第 125 群の最後の項である．ここで，問題の数列を群ごとに列挙すると

群 \ 項	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	7	11	13	17	19	23	29
2	31	37	41	43	47	49	53	59
3	61	67	71	73	77	79	83	89
4	91	$\cdots$						

となる．ここで第 1000 項は，第 125 群の最後の数である．各群の最後の数は，公差 30 の等差数列であるから，求める項は

$$29 + (125-1) \cdot 30 = \mathbf{3749} \qquad \text{(答)}$$

(3) 上の表で，第 1 群の総和は

$$(1+29) + (7+23) + (11+19) + (13+17) = 120$$

第 2 群の総和は

$$(31+59) + (37+53) + (41+49) + (43+47) = 360 = 120 + 240$$

第 3 群の総和は

$$(61+89) + (67+83) + (71+79) + (73+77) = 600 = 120 + 480$$

ゆえに第 n 群の総和は初項 120，公差 240 の等差数列であるから，第 n 群の総和を T_n とすると

$$T_n = 120 + (n-1) \cdot 240 = 240n - 120$$

よって初項から第 1000 項までの和を S とすると，S は第 1 群から第 125 群までの和であるから，

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{125} T_k \\ &= \frac{125}{2}\{120 + (240 \cdot 125 - 120)\} \\ &= \mathbf{1875000} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

■別解

前ページの表で，第 n 行第 k 列の項を $a_{n,\,k}$ とおくと，第 k 列の数は，初項 $a_{1,\,k}$，公差 30 の等差数列である．ゆえに第 125 行第 k 列の項 $a_{125,\,k}$ は

$$\begin{aligned} a_{125,\,k} &= a_{1,\,k} + (125-1)\cdot 30 \\ &= a_{1,\,k} + 3720 \end{aligned}$$

ゆえに第 k 列の第 1 行から第 125 行までの和 U_k は

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{125}{2}\{a_{1,\,k} + (a_{1,\,k} + 3720)\} \\ &= 125\,(a_{1,\,k} + 1860) \end{aligned}$$

よって求める和 S は,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{8} U_k \\ &= 125\sum_{k=1}^{8}(a_{1,\,k} + 1860) \\ &= 125\left(\sum_{k=1}^{8} a_{1,\,k} + 8\cdot 1860\right) \\ &= 125\,\{(1+7+\cdots+29) + 14880\} \\ &= \mathbf{1875000} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【7】与えられた数列を

$$1 \mid 2,\ 3 \mid 4,\ 5,\ 6 \mid 7,\ 8,\ 9,\ 10 \mid 11,\ \cdots$$

のように分ける．この数列の一般項を b_n とすると，

$$b_n = n$$

である．

	1	2	3	4
1	1	2	4	7
2	3	5	8	
3	6	9		
4	10			

(1) 第 1 行第 k 列の数は，第 k 群の最初の項である．第 k 群には k 個の項が含まれるから，第 $(k-1)$ 群までの項数の総和は，$k \geqq 2$ として

$$\sum_{l=1}^{k-1} l = \frac{1}{2}k(k-1)$$

ゆえに第 k 群の最初の項は

$$b_{\frac{1}{2}k(k-1)+1} = \frac{1}{2}k(k-1) + 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(k^2 - k + 2\right)} \qquad \text{(答)}$$

これは $k = 1$ のときも成立する．

(2) 第 p 行第 q 列を $c_{p,\ q}$ とおく．$c_{p,\ q}$ が属する群の項を $c_{p,\ q}$ からさかのぼって書き並べると

$$c_{p,\ q},\ c_{p-1,\ q+1},\ c_{p-2,\ q+2},\ \cdots,\ c_{1,\ q+(p-1)}$$

であるから，$c_{p,\ q}$ が属する群の最初の数は

$$c_{1,\ p+q-1}$$

であることがわかる．よって，$c_{p,\ q}$ は

第 $(p+q-1)$ 群の第 p 項

である．したがって，第 13 行第 18 列の数は

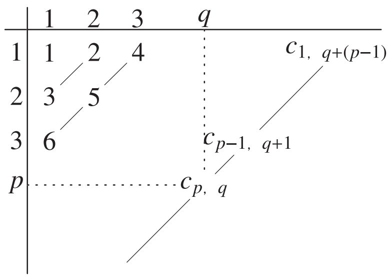
第 $13 + 18 - 1 = 30$ 群の第 13 項

である．(1) より，第 30 群の最初の数は

$$a_{30} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (30 - 1) + 1 = 436$$

であるから，求める数は

$$436 + (13 - 1) = \mathbf{448} \qquad \text{(答)}$$



(3) 2000 が第 k 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}k(k-1) < 2000 \leqq \frac{1}{2}k(k+1)$$
$$\iff \quad k(k-1) < 4000 \leqq k(k+1)$$

ここで

$$62 \cdot 63 = 3906,\ \ 63 \cdot 64 = 4032$$

より，この不等式をみたす整数 k は，$k = 63$．よって，2000 は第 63 群の数である．また，第 63 群の最初の数は，

$$\frac{1}{2} \cdot 63 \cdot (63-1) + 1 = 1954$$

であり，さらに $2000 - 1954 + 1 = 47$ より，2000 は第 63 群の第 47 項である．ゆえに

$$2000 = c_{p,\,q}$$

であるとすると，

$$\begin{cases} p + q - 1 = 63 \\ p = 47 \end{cases}$$

これを解いて

$$p = 47,\ \ q = 17$$

したがって，2000 は

　　第 47 行第 17 列　　(答)

の数である．

【8】(1) 与えられた数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{3}{2} + (n-1)\cdot 1 = n + \frac{1}{2}$$

第 k 群には 2^{k-1} 個の項が含まれるから，第 $(k-1)$ 群までの項数の総和は，$k \geqq 2$ として

$$\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} = \frac{1\cdot(2^{k-1}-1)}{2-1} = 2^{k-1}-1$$

よって，第 k 群の最初の項は第 2^{k-1} 項であるから

$$a_{2^{k-1}} = \mathbf{2^{k-1} + \frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

これは $k=1$ のときも成立する．また第 k 群の最後の項は第 (2^k-1) 項であるから，

$$\begin{aligned} a_{2^k-1} &= 2^k - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \mathbf{2^k - \frac{1}{2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) 第 k 群の数の和は，初項 $a_{2^{k-1}} = 2^{k-1} + \frac{1}{2}$，末項 $a_{2^k-1} = 2^k - \frac{1}{2}$，公差 1，項数 2^{k-1} の等差数列の和であるから

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2}\cdot 2^{k-1}\cdot(a_{2^{k-1}} + a_{2^k-1}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2^{k-1}\cdot\left(2^{k-1} + \frac{1}{2} + 2^k - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2^{k-2}\cdot 2^{k-1}(1+2) \\ &= \mathbf{3\cdot 2^{2k-3}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3)
$$T_k > 10^{50} \iff 3\cdot 2^{2k-3} > 10^{50}$$

両辺の常用対数をとると

$$\begin{aligned} \log_{10}3 + (2k-3)\log_{10}2 &> 50 \\ \log_{10}3 + 2k\log_{10}2 - 3\log_{10}2 &> 50 \end{aligned}$$

よって

$$k > \frac{1}{2}\cdot\frac{50 - \log_{10}3 + 3\log_{10}2}{\log_{10}2} = 83.76\cdots$$

これを満たす最小の整数 k は

$$k = \mathbf{84} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 5，公差 -4 の等差数列であるから，一般項 a_n は

$$a_n = 5 + (n-1)\cdot(-4) = \mathbf{-4n+9} \qquad \text{(答)}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 -5 の等比数列であるから，一般項 a_n は

$$a_n = \mathbf{2\cdot(-5)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $a_{n+1} = a_n + 4n - 1$ より

$$a_{n+1} - a_n = 4n - 1$$

よって $\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ の一般項は，$4n-1$ であるから，
$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-1) \\ &= 2 + 4\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}1 \\ &= 2 + 4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= 2n^2 - 3n + 3 \end{aligned}$$

上式で $n=1$ とすると

$$2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 3 = 2 = a_1$$

より成立．ゆえに

$$a_n = \mathbf{2n^2 - 3n + 3} \qquad \text{(答)}$$

(4) $a_{n+1} = a_n + 3^n$ より

$$a_{n+1} - a_n = 3^n$$

よって，$\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ の一般項は，3^n であるから，
$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\ &= 2 + \frac{3 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{3^n + 1}{2} \end{aligned}$$

上式で $n = 1$ とすると

$$\frac{3 + 1}{2} = 2 = a_1$$

より成立．ゆえに，

$$a_n = \boldsymbol{\frac{3^n + 1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $2a_{n+1} = a_n - 2$ より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1$$

ここで方程式

$$x = \frac{1}{2}x - 1$$

を解くと $x = -2$. ゆえに与えられた漸化式は

$$a_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(a_n + 2)$$

と変形できる．上式は，数列 $\{a_n + 2\}$ が初項 $a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + 2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = \mathbf{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n-1}} - 2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a_{n+1} = -2a_n + 3$ より，方程式

$$x = -2x + 3$$

を解くと $x = 1$. ゆえに与えられた漸化式は

$$a_{n+1} - 1 = -2(a_n - 1)$$

と変形できる．上式は，数列 $\{a_n - 1\}$ が初項 $a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$，公比 -2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n - 1 = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = \mathbf{(-2)^{\boldsymbol{n-1}} + 1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 与えられた漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

ここで

$$b_n = \frac{a_n}{2^n}$$

とおくと上式は

$$b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2} \qquad \cdots (*)$$

ここで方程式 $x = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ を解いて $x = -1$. ゆえに $(*)$ は

$$b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1)$$

と変形される．この式は，数列 $\{b_n+1\}$ が初項 $b_1+1=\dfrac{a_1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$b_n+1=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$
$$b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n}-1$$
$$\therefore\quad a_n=2^nb_n=\boldsymbol{3^n-2^n}\qquad(\text{答})$$

(4) 漸化式より明らかに $a_n\fallingdotseq 0$．漸化式の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+2}{a_n}$$
$$\therefore\quad \frac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\frac{1}{a_n}+3$$

ここで，方程式

$$x=2x+3$$

を解くと $x=-3$．ゆえに与えられた漸化式は

$$\frac{1}{a_{n+1}}+3=2\left(\frac{1}{a_n}+3\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}+3\right\}$ が初項 $\dfrac{1}{a_1}+3=4$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$\frac{1}{a_n}+3=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$$
$$\frac{1}{a_n}=2^{n+1}-3$$
$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{\frac{1}{2^{n+1}-3}}\qquad(\text{答})$$

(5) 両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$\Longleftrightarrow\quad \frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$$

この式は，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ の階差数列の一般項が

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$$

であることを示す．よって $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n}&=\frac{a_1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)\\&=2-\frac{1}{n}\end{aligned}$$

ここで $n=1$ のとき

$$2-\frac{1}{1}=1=\frac{a_1}{1}$$

より成立．ゆえに $n \geqq 1$ のとき

$$a_n=n\left(2-\frac{1}{n}\right)=\boldsymbol{2n-1} \qquad \textbf{(答)}$$

【3】(1) 与えられた漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 2n - 3 \quad \cdots ①$ が

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(a_n + \alpha n + \beta)$$

と変形されたとすると，上式は

$$a_{n+1} = 2a_n + \alpha n + \beta - \alpha \quad \cdots ②$$

①，② の右辺を比較して

$$\alpha = 2,\ \beta - \alpha = -3$$

これを解いて

$$\alpha = 2,\ \beta = -1$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1} + 2(n+1) - 1 = 2(a_n + 2n - 1)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n + 2n - 1\}$ が初項 $a_1 + 2 \cdot 1 - 1 = 3$，公比 2 の等比数列であることを示す．すなわち

$$a_n + 2n - 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = \mathbf{3 \cdot 2^{n-1} - 2n + 1} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + n \quad \cdots ①$ が

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = \frac{1}{2}(a_n + \alpha n + \beta)$$

と変形されたとすると，上式は

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}\alpha n - \alpha - \frac{1}{2}\beta \quad \cdots ②$$

①，② の右辺を比較して

$$-\frac{1}{2}\alpha = 1,\ -\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0$$

これを解いて

$$\alpha = -2,\ \beta = 4$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1} - 2(n+1) + 4 = \frac{1}{2}(a_n - 2n + 4)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n - 2n + 4\}$ が初項 $a_1 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であることを示す．すなわち

$$a_n - 2n + 4 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = \mathbf{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2n - 4} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 与えられた関係式

$$S_n = 1 - a_n \quad \cdots ①$$

① において，n を $n+1$ で置き換えて

$$S_{n+1} = 1 - a_{n+1} \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = -a_{n+1} + a_n$$

$$\therefore \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \cdots ③$$

また，① で $n = 1$ とすると

$$S_1 = a_1 = 1 - a_1$$

$$\therefore \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

これと ③ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた関係式

$$S_n = 3S_{n-1} + 2n \quad \cdots ①$$

① において，n を $n+1$ で置き換えて

$$S_{n+1} = 3S_n + 2(n+1) \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$S_{n+1} - S_n = 3(S_n - S_{n-1}) + 2$$
$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad (n \geqq 2) \quad \cdots ③$$

これが $n = 1$ においても成り立つかどうかを調べる．① で $n = 2$ とすると

$$S_2 = 3S_1 + 2 \cdot 2$$

ここで

$$S_1 = a_1 = 2, \quad S_2 = a_1 + a_2 = a_2 + 2$$

であるから

$$a_2 + 2 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2$$
$$\therefore \quad a_2 = 8$$

ゆえに ③ において

$$3a_1 + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8 = a_2$$

よって $n = 1$ のときも成り立つ．ゆえに

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad (n \geqq 1)$$

である．方程式

$$x = 3x + 2$$

を解いて $x = -1$．これを用いて上式は

$$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

と変形できる．この式は，数列 $\{a_n + 1\}$ が初項 $a_1 + 1 = 3$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

$$\therefore \quad a_n = \mathbf{3^n - 1} \qquad \text{(答)}$$

【5】与えられた漸化式 $2(n+1)a_{n+1} = na_n + (-1)^n$ で

$$b_n = na_n$$

とおくと，

$$2b_{n+1} = b_n + (-1)^n$$

両辺を $2 \cdot (-1)^{n+1}$ で割って

$$\frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}} = \frac{1}{2 \cdot (-1)} \cdot \frac{b_n}{(-1)^n} + \frac{1}{2 \cdot (-1)}$$

$$\therefore \quad \frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b_n}{(-1)^n} - \frac{1}{2}$$

ここで方程式

$$x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

を解くと $x = -\frac{1}{3}$．ゆえに上式は

$$\frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{b_n}{(-1)^n} + \frac{1}{3}\right\}$$

と変形される．この式は，数列 $\left\{\frac{b_n}{(-1)^n} + \frac{1}{3}\right\}$ が初項

$$\frac{b_1}{(-1)^1} + \frac{1}{3} = -b_1 + \frac{1}{3} = -1 \cdot a_1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3},$$

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$\frac{b_n}{(-1)^n} + \frac{1}{3} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{b_n}{(-1)^n} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 1\right\}$$

$$b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - (-1)^n\right\}$$

よって

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{3n}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - (-1)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) 与えられた漸化式

$$a_{n+1} = 2a_n + 2n^2 - n + 1 \quad \cdots ①$$

が，

$$a_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = 2\left(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma\right) \quad \cdots ②$$

と変形されたとすれば，

$$a_{n+1} = 2a_n + \alpha n^2 + (-2\alpha + \beta)\,n - \alpha - \beta + \gamma \quad \cdots ②$$

①，② の右辺を比較して，

$$\alpha = 2,\ -2\alpha + \beta = -1,\ -\alpha - \beta + \gamma = 1$$

これを解いて

$$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ \gamma = 6$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 6 = 2\left(a_n + 2n^2 + 3n + 6\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n + 2n^2 + 3n + 6\}$ が初項 $a_1 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 6 = 11$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + 2n^2 + 3n + 6 = 11 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = \mathbf{11 \cdot 2^{n-1} - 2n^2 - 3n - 6} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた漸化式

$$a_{n+1} = 2a_n + n^2 - n \quad \cdots ①$$

が

$$a_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = 2\left(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma\right)$$

と変形されたとすると，

$$a_{n+1} = 2a_n + \alpha n^2 + (-2\alpha + \beta)\,n - \alpha - \beta + \gamma \quad \cdots ②$$

となる．①，② の右辺を比較して

$$\alpha = 1,\ -2\alpha + \beta = -1,\ -\alpha - \beta + \gamma = 0$$

これを解いて

$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 2$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1} + (n+1)^2 + (n+1) + 2 = 2\left(a_n + n^2 + n + 2\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\left\{a_n + n^2 + n + 2\right\}$ が初項 $a_1 + 1^2 + 1 + 2 = 8$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + n^2 + n + 2 = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}$$

$$\therefore \quad a_n = \mathbf{2^{n+2} - n^2 - n - 2} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) 条件より

$$S_{n+1} - 3S_n = n^2 \quad \cdots ①$$

$n \geqq 2$ として

$$S_n - 3S_{n-1} = (n-1)^2 \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$(S_{n+1} - S_n) - 3(S_n - S_{n-1}) = n^2 - (n-1)^2$$
$$a_{n+1} - 3a_n = 2n - 1$$

ここで $n = 1$ とすると $S_1 = a_1 = 0$．また $S_2 - 3S_1 = 1^2$ より $S_2 = a_1 + a_2 = a_2 = 1$．これは上式に $n = 1$ を代入した $a_2 - 3a_1 = 2 \cdot 1 - 1$ を満たす．ゆえに求める漸化式は

$$\boldsymbol{a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$a_1 = S_1 = 0$$

(1) で得られた漸化式

$$a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1 \quad \cdots ①$$

が

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 3(a_n + \alpha n + \beta)$$

と変形されたとすれば

$$a_{n+1} = 3a_n + 2\alpha n - \alpha + 2\beta \quad \cdots ②$$

①，② の右辺を比較して

$$2\alpha = 2,\ 2\beta - \alpha = -1$$

これを解いて

$$\alpha = 1,\ \beta = 0$$

ゆえに ① は

$$a_{n+1} + (n+1) = 3(a_n + n)$$

この式は，数列 $\{a_n + n\}$ が初項 $a_1 + 1 = 1$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + n = 1 \cdot 3^{n-1}$$
$$a_n = \boldsymbol{3^{n-1} - n} \qquad \text{(答)}$$

【8】$a_1 = 1 > 0$ と漸化式より，明らかに $a_n > 0$．与えられた漸化式

$$a_{n+1}{}^3 = 4a_n{}^2$$

の，両辺底 2 の対数をとると，

$$\begin{aligned} \log_2 a_{n+1}{}^3 &= \log_2 \left(4a_n{}^2\right) \\ 3\log_2 a_{n+1} &= 2\log_2 a_n + 2 \end{aligned}$$

ここで

$$b_n = \log_2 a_n$$

とおくと，

$$\begin{aligned} 3b_{n+1} &= 2b_n + 2 \\ b_{n+1} &= \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{3} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ここで方程式

$$x = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

を解くと，$x = 2$．ゆえに ① は

$$b_{n+1} - 2 = \frac{2}{3}(b_n - 2)$$

と変形される．この式は，数列 $\{b_n - 2\}$ が初項 $b_1 - 2 = \log_2 a_1 - 2 = -2$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であることを示す．すなわち

$$\begin{aligned} b_n - 2 &= (-2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ b_n &= 2 - 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= 2\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\log_2 a_n = 2\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore \quad a_n = \mathbf{2^{2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}} \qquad \text{(答)}$$

【9】与えられた条件は

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ (n-1)^2 a_n = S_n \quad \cdots ①$$

$n \geqq 2$ として，① は

$$(n-2)^2 a_{n-1} = S_{n-1} \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)^2 a_n - (n-2)^2 a_{n-1} \\ n(n-2)a_n &= (n-2)^2 a_{n-1} \end{aligned}$$

ここで，$n \geqq 3$ として

$$a_n = \frac{n-2}{n} a_{n-1}$$

この式を繰り返し用いて

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \cdot \frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}} \cdots \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} a_2 \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \end{aligned}$$

上式は $n = 2$ のとき成立し，$n = 1$ のとき成立しない．ゆえに求める一般項は

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n(n-1)} & (n \geqq 2) \\ 0 & (n = 1) \end{cases}} \qquad \text{(答)}$$

【10】

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k+2}a_k=1-2a_{n+1}\quad\cdots①$$

$n\geqq 2$ のとき ① において，n の代わりに $n-1$ とすると

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{k+2}a_k=1-2a_n\quad(n\geqq 2)\quad\cdots②$$

① − ② より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k+2}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{k+2}a_k=1-2a_{n+1}-(1-2a_n)$$

$$\frac{4}{n+2}a_n=-2a_{n+1}+2a_n$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n\quad\cdots(*)$$

$n\geqq 3$ として，$(*)$ において n を $n-1$ に置き換えて

$$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}\quad\cdots(**)$$

$(**)$ を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}\\&=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-2}\\&=\cdots\\&=\frac{\cancel{n-1}}{n+1}\cdot\frac{\cancel{n-2}}{n}\cdot\frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}}\cdots\cdots\frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\cdot\frac{3}{\cancel{5}}\cdot\frac{2}{\cancel{4}}a_2\\&=\frac{3\cdot 2}{(n+1)\cdot n}\cdot a_2\quad\cdots③\end{aligned}$$

ここで，① に $n=1$ を代入して

$$\frac{4}{3}a_1=1-2a_2$$

$$\therefore\quad a_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{3}a_1\right)=\frac{1}{6}$$

これと ③ から

$$a_n=\frac{3\cdot 2}{(n+1)\cdot n}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{n(n+1)}$$

これは，$n=1,\ 2$ のとき

$$a_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

より，$n=1,\ 2$ のときも成り立つ．

よって，一般項は，

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{n(n+1)}}\qquad(答)$$

また，初項から第 n 項までの和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots\cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \boldsymbol{\frac{n}{n+1}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

＜コメント＞

$(*)$ の漸化式は，次のようにして解くこともできる．

両辺に，$(n+1)(n+2)$ をかけると

$$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)na_n \quad (n \geqq 2)$$

したがって，$n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}(n+1)na_n &= n(n-1)a_{n-1} \\ &= (n-1)(n-2)a_{n-2} \\ &= \cdots \\ &= 3 \cdot 2 \cdot a_2\end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{3 \cdot 2}{n(n+1)}a_2 \quad \text{（以下同様）}$$

問題

【1】(1) 与えられた漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad \cdots(*)$$

が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形されたとすると

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)\, a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots(\#)$$

(∗), (#) の右辺を比較して

$$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -6$$

ゆえに α, β は 2 次方程式

$$x^2 - x - 6 = 0$$

の 2 解である．これを解いて $x = 3,\ -2$．ゆえに (∗) は

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) & \cdots① \\ a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) & \cdots② \end{cases}$$

と 2 通りに変形できる．

① は，数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ が初項 $a_2 - 3a_1 = -1$，公比 -2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - 3a_n = -1 \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1} \quad \cdots③$$

また ② は，数列 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ が初項 $a_2 + 2a_1 = 4$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} + 2a_n = 4 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots④$$

④ − ③ より

$$5a_n = 4 \cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}$$

$$a_n = \boldsymbol{\frac{4 \cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}}{5}} \qquad (答)$$

(2) 与えられた漸化式

$$a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \cdots (*)$$

が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形されたとすると

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots (\#)$$

$(*)$, $(\#)$ の右辺を比較して

$$\alpha + \beta = 4,\ \alpha\beta = 4$$

ゆえに α, β は 2 次方程式

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

の 2 解である．これを解いて $x = 2$．ゆえに $(*)$ は

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n) \quad \cdots ①$$

と変形される．

① は，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ が初項 $a_2 - 2a_1 = 2$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - 2 \cdot \frac{a_n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}$$

よって数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1}{2} = \dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n$$

したがって

$$a_n = 2^n \cdot \frac{1}{2}n = \boldsymbol{n \cdot 2^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 与えられた漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \cdots (*)$$

が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\,(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形されたとすると

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)\,a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots (\#)$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$$

ゆえに α，β は 2 次方程式

$$x^2 - x - 1 = 0$$

の 2 解である．これを解いて $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$．これを α，$\beta\ (\alpha > \beta)$ とすると，$(*)$ は

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

① は，数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ が初項 $a_2 - \alpha a_1 = 1 - \alpha$，公比 β の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (1 - \alpha)\beta^{n-1} = \beta^n \quad \left(\because \quad 1 - \alpha = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \beta\right) \quad \cdots ③$$

② は，数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ が初項 $a_2 - \beta a_1 = 1 - \beta$，公比 α の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - \beta a_n = (1 - \beta)\alpha^{n-1} = \alpha^n \quad \left(\because \quad 1 - \beta = 1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \alpha\right) \quad \cdots ④$$

④ − ③ より

$$(\alpha - \beta)a_n = \alpha^n - \beta^n$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\,(\alpha^n - \beta^n)$$

上式に

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

を代入して，求める一般項は

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}} \qquad (答)$$

【2】(1) 与えられた条件は

$$a_1 = 3,\ b_1 = 1$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$$

これを繰り返し用いて

$$a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} = \cdots = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 = 3 + 1 = 4$$

ゆえに

$$a_n + b_n = 4 \quad \cdots ③$$

① − ② より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n)$$

上式は，数列 $\{a_n - b_n\}$ が初項 $a_1 - b_1 = 2$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n - b_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots ④$$

③ + ④ より

$$2a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$$

$$\therefore \quad a_n = \mathbf{3^{n-1} + 2} \qquad (答)$$

また ③ − ④ より

$$2b_n = 4 - 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore \quad b_n = \mathbf{2 - 3^{n-1}} \qquad (答)$$

(2) 与えられた条件は

$$a_1 = 1,\ b_1 = 1$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = 4a_n + b_n & \cdots ② \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が条件

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta(a_n - \alpha b_n)$$

をみたすとすれば

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta a_n - \alpha\beta b_n \quad \cdots (*)$$

また ① − ② × α より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha b_{n+1} &= (a_n + b_n) - \alpha(4a_n + b_n) \\ &= (1 - 4\alpha)a_n + (1 - \alpha)b_n \quad \cdots (\#) \end{aligned}$$

(∗), (#) の右辺を比較して

$$\beta = 1 - 4\alpha,\ \ -\alpha\beta = 1 - \alpha$$

上の第 1 式を第 2 式に代入して

$$4\alpha^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \alpha = \pm\frac{1}{2}$$

これと第 1 式から

$$(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, 3\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

よって与えられた漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+1} + \dfrac{1}{2}b_{n+1} = 3\left(a_n + \dfrac{1}{2}b_n\right) & \cdots ③ \\ a_{n+1} - \dfrac{1}{2}b_{n+1} = -\left(a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right) & \cdots ④ \end{cases}$$

と変形できる.
③ は, 数列 $\left\{a_n + \frac{1}{2}b_n\right\}$ が初項 $a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{3}{2}$, 公比 3 の等比数列であることを示す. ゆえに

$$a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} = \frac{3^n}{2} \quad \cdots ⑤$$

また ④ は, 数列 $\left\{a_n - \frac{1}{2}b_n\right\}$ が初項 $a_1 - \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2}$, 公比 -1 の等比数列であることを示す. ゆえに

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n-1} = -\frac{(-1)^n}{2} \quad \cdots ⑥$$

⑤ + ⑥ より

$$2a_n = \frac{3^n - (-1)^n}{2}$$

$$\therefore \quad a_n = \boldsymbol{\frac{3^n - (-1)^n}{4}} \qquad (答)$$

また ⑤ − ⑥ より

$$b_n = \boldsymbol{\frac{3^n + (-1)^n}{2}} \qquad (答)$$

■別解

与えられた条件より $\{a_n\}$ の 3 項間漸化式を導く.

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad \cdots ①$$

$$b_{n+1} = 4a_n + b_n \quad \cdots ②$$

① より

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad \cdots ③$$

③ で n を $n+1$ でおきかえて

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} \quad \cdots ④$$

③，④ を ② に代入して

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 4a_n + (a_{n+1} - a_n)$$

$$\therefore \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \quad \cdots ⑤$$

ここで ⑤ が

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形されたとすれば

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)\, a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \cdots ⑥$$

⑤ と ⑥ を比較して

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -3$$

ゆえに α，β は 2 次方程式

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

の 2 解である．これを解いて $x = 3,\ -1$．ゆえに ⑤ は

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = -(a_{n+1} - 3a_n) \quad \cdots ⑦$$

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 3\,(a_{n+1} + a_n) \quad \cdots ⑧$$

⑦ は，数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ が初項 $a_2 - 3a_1 = (a_1 + b_1) - 3a_1 = -1$，公比 -1 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} - 3a_n = (-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n \quad \cdots ⑨$$

また ⑧ は，数列 $\{a_{n+1} + a_n\}$ が初項 $a_2 + a_1 = (a_1 + b_1) + a_1 = 3$，公比 3 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_{n+1} + a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \quad \cdots ⑩$$

⑩ − ⑨ より

$$4a_n = 3^n - (-1)^n$$

$$\therefore \quad a_n = \boldsymbol{\frac{3^n - (-1)^n}{4}} \qquad \text{(答)}$$

ここで

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1} - (-1)^{n+1}}{4}$$

より，③ に代入して

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{3^{n+1} - (-1)^{n+1}}{4} - \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ &= \frac{1}{4}\{3 \cdot 3^n - (-1) \cdot (-1)^n - 3^n + (-1)^n\} \\ &= \frac{1}{4}\{2 \cdot 3^n + 2 \cdot (-1)^n\} \\ &= \boldsymbol{\frac{3^n + (-1)^n}{2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【3】(1)　最初の 1 歩で 1 段登ったときは，残りの階段は $(n-1)$ 段であり，このときの登り方の総数は残りの階段の登り方の総数に等しく，a_{n-1} 通りである．

また，最初の 1 歩で 2 段登ったときは，残りの階段は $(n-2)$ 段であり，このときの登り方の総数は残りの階段の登り方の総数に等しく，a_{n-2} 通りである．

n 段ある階段の登り方は，題意よりこの 2 通りだけであり，これらは互いに排反であるから

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

であり，1 段，2 段のときの登り方はそれぞれ

$$a_1 = 1, \ a_2 = 2$$

である．したがって

$$\boldsymbol{a_1 = 1, \ a_2 = 2, \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geqq 1)} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a_1 = 1$，$a_2 = 2$ を用いて，(1) の漸化式より a_n を順に調べると

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_2 + a_1 = 3 \\
a_4 &= a_3 + a_2 = 5 \\
a_5 &= a_4 + a_3 = 8 \\
a_6 &= a_5 + a_4 = 13 \\
a_7 &= a_6 + a_5 = 21 \\
a_8 &= a_7 + a_6 = 34 \\
a_9 &= a_8 + a_7 = 55 \\
a_{10} &= a_9 + a_8 = 89 \\
a_{11} &= a_{10} + a_9 = 144
\end{aligned}$$

したがって，11 段ある階段の登り方 a_{11} は

144 通り　　(答)

【4】与えられた条件は

$$a_1 = 1,\ b_1 = 3$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n & \cdots ② \end{cases}$$

である．

(1) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が条件

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta(a_n - \alpha b_n)$$

をみたすとすれば

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta a_n - \alpha\beta b_n \quad \cdots (*)$$

① − ② × α より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha b_{n+1} &= (3a_n + b_n) - \alpha(2a_n + 4b_n) \\ &= (3 - 2\alpha)a_n + (1 - 4\alpha)b_n \quad \cdots (\#) \end{aligned}$$

$(*)$，$(\#)$ の右辺を比較して

$$3 - 2\alpha = \beta,\ 1 - 4\alpha = -\alpha\beta$$

上の第 1 式を第 2 式に代入して

$$2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

これを解いて

$$\alpha = -1,\ \frac{1}{2}$$

これと第 1 式から，

$$(\alpha,\ \beta) = (-1,\ 5),\ \left(\frac{1}{2},\ 2\right)$$

よって与えられた漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n) & \cdots ③ \\ a_{n+1} - \dfrac{1}{2}b_{n+1} = 2\left(a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right) & \cdots ④ \end{cases}$$

と変形される．

③ は，数列 $\{a_n + b_n\}$ が初項 $a_1 + b_1 = 4$，公比 5 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1} \quad \cdots ③'$$

また ④ は，数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{2}b_n\right\}$ が初項 $a_1 - \dfrac{1}{2}b_1 = -\dfrac{1}{2}$，公比 2 の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = -2^{n-2} \quad \cdots ④'$$

③$'+2\times$④$'$ より

$$3a_n = 4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}$$

$$a_n = \mathbf{\frac{4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

また ③$'-$④$'$ より

$$\frac{3}{2}b_n = 4\cdot 5^{n-1} + 2^{n-2}$$

$$b_n = \mathbf{\frac{8\cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件

$$b_n > xa_n, \qquad (x \text{ は正整数})$$

$$\frac{8\cdot 5^{n-1}+2^{n-1}}{3} > x\cdot\frac{4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}}{3}$$

$$\frac{8\cdot 5^{n-1}+2^{n-1}}{4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}} > x \quad \left(\because \quad 4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}>0\right)$$

ここで左辺の最小値を求める.

$$\frac{8\cdot 5^{n-1}+2^{n-1}}{4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}} = \frac{8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}+1}{4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1} \quad \cdots(\flat)$$

ここで $t=\dfrac{5}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}(\flat) &= \frac{8t^{n-1}+1}{4t^{n-1}-1}\\ &= \frac{2\left(4t^{n-1}-1\right)+3}{4t^{n-1}-1}\\ &= 2+\frac{3}{4t^{n-1}-1} \quad \cdots(\natural)\end{aligned}$$

$t=\dfrac{5}{2}$, $n \geqq 1$ より $4t^{n-1}-1>0$. また t^{n-1} は単調増加であるから, $4t^{n-1}-1$ は $n=1$ のとき最小. すなわち

$$0 < \frac{3}{4t^{n-1}-1} \leqq \frac{3}{4-1} = 1$$

ゆえに

$$2 < (\natural) = 2+\frac{3}{4t^{n-1}-1} \leqq 2+1 = 3$$

ゆえに求める正整数 x の最大値は

$$x = \mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ より，n を $n+1$ で置き換えて

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1}$$

$$= \frac{\dfrac{9a_n + 1}{a_n + 9} - 1}{\dfrac{9a_n + 1}{a_n + 9} + 1}$$

$$= \frac{9a_n + 1 - (a_n + 9)}{9a_n + 1 + (a_n + 9)}$$

$$= \frac{8a_n - 8}{10a_n + 10}$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{4}{5} b_n$$

ゆえに数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = \dfrac{2 - 1}{2 + 1} = \dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{4}{5}$ の等比数列である.

〔証明終〕

また一般項は

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(2)
$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$$

を a_n について解くと

$$(a_n + 1)b_n = a_n - 1$$

$$a_n b_n + b_n = a_n - 1$$

$$(b_n - 1)a_n = -(b_n + 1)$$

$$a_n = -\frac{b_n + 1}{b_n - 1} \qquad \left(\because \quad b_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < 1\right)$$

ゆえに

$$a_n = -\frac{\dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1} + 1}{\dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1} - 1}$$

$$= -\frac{4^{n-1} + 3 \cdot 5^{n-1}}{4^{n-1} - 3 \cdot 5^{n-1}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3 \cdot 5^{n-1} + 4^{n-1}}{3 \cdot 5^{n-1} - 4^{n-1}}} \qquad \text{(答)}$$

(3)
$$a_n = \frac{3 \cdot 5^{n-1} + 4^{n-1}}{3 \cdot 5^{n-1} - 4^{n-1}} < \frac{25}{24}$$

より

$$24\left(3 \cdot 5^{n-1} + 4^{n-1}\right) < 25\left(3 \cdot 5^{n-1} - 4^{n-1}\right)$$

$$3 \cdot 5^{n-1} > 49 \cdot 4^{n-1}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} > \frac{49}{3}$$

両辺の常用対数をとると,

$$\log_{10}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} > \log_{10}\left(\frac{49}{3}\right) \quad \cdots(*)$$

ここで

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2$$

であるから

$$\begin{aligned}(*) \quad \Longleftrightarrow \quad (n-1)(\log_{10} 5 - 2\log_{10} 2) &> \log_{10} 49 - \log_{10} 3 \\ (n-1)(1 - 3\log_{10} 2) &> 2\log_{10} 7 - \log_{10} 3 \\ (n-1)(1 - 3 \cdot 0.3010) &> 2 \cdot 0.8451 - 0.4771 \\ 0.097(n-1) &> 1.2131 \\ n-1 &> \frac{1.2131}{0.097} = 12.50... \\ n &> 13.50...\end{aligned}$$

ゆえに求める n の最小値は

$n = \mathbf{14}$ (答)

【6】(1) $(n+1)$ 個の袋からそれぞれ 1 個ずつ球を取り出すとき，赤球が奇数個となるのは

(i) n 個の袋から赤球を偶数個取り出し，$(n+1)$ 番目の袋から赤球を取り出す

(ii) n 個の袋から赤球を奇数個取り出し，$(n+1)$ 番目の袋から白球を取り出す

の 2 通りの場合がある．それぞれの確率を p_n で表すと

(i) のとき．

$$\frac{1}{10}(1-p_n)$$

(ii) のとき．

$$\frac{9}{10}p_n$$

であり，これらは排反であるから，p_{n+1} は

$$p_{n+1} = \frac{1}{10}(1-p_n) + \frac{9}{10}p_n = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{10}$$

〔証明終〕

(2) 漸化式

$$p_{n+1} = \frac{1}{10}(1-p_n) + \frac{9}{10}p_n = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{10} \quad \cdots(*)$$

を解く．方程式

$$x = \frac{4}{5}x + \frac{1}{10}$$

を解くと $x = \frac{1}{2}$．ゆえに $(*)$ は

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{4}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

と変形される．この式は数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ が初項 $p_1 - \frac{1}{2}$，公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列であることを示す．ゆえに

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

ここで，p_1 は 1 個の袋から球を 1 個取り出してそれが赤球である確率だから

$$p_1 = \frac{1}{10}$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【7】(1) $(k-1)$ 回目から k 回目までの，A，B の容器内の食塩の量は，以下の表のようになる．

	A 内の食塩の量 [g]	B 内の食塩の量 [g]
$(k-1)$ 回目の始め	(6L 中) $\dfrac{6a_{k-1}}{100}$	(4L 中) $\dfrac{4b_{k-1}}{100}$
A から B へ 1L 移す	(5L 中) $\dfrac{5a_{k-1}}{100}$	(5L 中) $\dfrac{4b_{k-1}}{100}+\dfrac{a_{k-1}}{100}$
B から A へ 1L 戻す	(6L 中) $\dfrac{5a_{k-1}}{100}+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{4b_{k-1}}{100}+\dfrac{a_{k-1}}{100}\right)$	(4L 中) $\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{4b_{k-1}}{100}+\dfrac{a_{k-1}}{100}\right)$

k 回目の容器 A，B 内の食塩水の濃度がそれぞれ a_k %，b_k % であるから，

$$a_k=\frac{1}{6}\left\{\frac{5a_{k-1}}{100}+\frac{1}{5}\left(\frac{4b_{k-1}}{100}+\frac{a_{k-1}}{100}\right)\right\}\times 100=\frac{1}{15}(13a_{k-1}+2b_{k-1})\quad\cdots ①$$

$$b_k=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{4b_{k-1}}{100}+\frac{a_{k-1}}{100}\right)\times 100=\frac{1}{5}(a_{k-1}+4b_{k-1})\quad\cdots ②$$

② − ① より，

$$b_k-a_k=\frac{2}{3}(b_{k-1}-a_{k-1})$$

ゆえに数列 $\{b_k-a_k\}$ は，初項 $b_0-a_0=b-a$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから，その一般項は

$$\boldsymbol{b_k-a_k=\left(\frac{2}{3}\right)^k(b-a)}\qquad(答)$$

(2) (1) の結果より

$$b_k-a_k=\left(\frac{2}{3}\right)^k(b-a)\quad\cdots ③$$

A，B 内の塩の量の合計は変わらないから，

$$6a_k+4b_k=6a+4b\quad\cdots ④$$

③，④ を連立して

$$\boldsymbol{a_k=\frac{1}{5}\left\{3a+2b-2(b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\}}\qquad(答)$$

$$\boldsymbol{b_k=\frac{1}{5}\left\{3a+2b+3(b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\}}\qquad(答)$$

【8】条件より

$$0 < c < 1,\ f(x) = -4x^3 + 3x^2,$$

$$f_1(x) = f(x) + \int_0^c f(t)dt,$$

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^c f_{n-1}(t)dt \quad (n \geqq 2)$$

(1) $a_n = \displaystyle\int_0^c f_{n-1}(t)dt$ とおく．ただし $f_0(x) = f(x)$ とする．このとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_0^c f_n(t)dt \\ &= \int_0^c \{f(t) + a_n\}\, dt \\ &= \int_0^c \left(-4t^3 + 3t^2 + a_n\right) dt \\ &= \left[-t^4 + t^3 + a_n t\right]_0^c \\ &= ca_n - c^4 + c^3 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^c f(t)dt \\ &= \int_0^c \left(-4t^3 + 3t^2\right) dt \\ &= \left[-t^4 + t^3\right]_0^c \\ &= -c^4 + c^3 \end{aligned}$$

ゆえに数列 $\{a_n\}$ は条件

$$a_{n+1} = ca_n - c^4 + c^3 \quad \cdots (*), \quad a_1 = -c^4 + c^3$$

をみたす．

方程式

$$x = cx - c^4 + c^3$$

を解くと

$$(1 - c)x = c^3(1 - c)$$

$$x = c^3 \quad (\because \quad c \neq 1)$$

ゆえに $(*)$ は

$$a_{n+1} - c^3 = c\left(a_n - c^3\right)$$

と変形される．この式は，数列 $\{a_n - c^3\}$ が初項 $a_1 - c^3 = -c^4$，公比 c の等比数列であることを示す．ゆえに

$$a_n - c^3 = c^{n-1}\left(-c^4\right)$$

$$\therefore \quad a_n = c^3 - c^{n+3}$$

$$= c^3\,(1 - c^n)$$

よって

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= f(x) + a_n \\
&= \boldsymbol{-4x^3 + 3x^2 + c^3(1 - c^n)} \quad (n \geqq 1) \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2) (1) の結果より

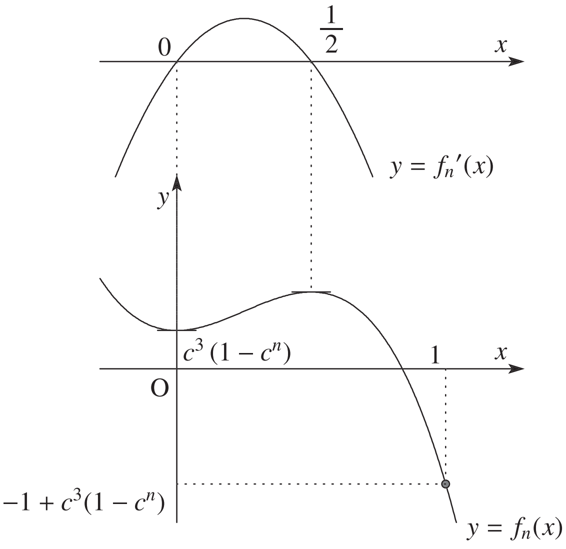
$$f_n{}'(x) = -12x^2 + 6x = -6x(2x-1)$$

下図より $f_n(x)$ は $x=0$ で極小，$x=\dfrac{1}{2}$ で極大となる．ここで

$$f(0) = c^3(1-c^n) > 0 \quad (\because \quad 0 < c < 1)$$

$$f(1) = -1 + c^3(1-c^n) < 0 \quad \left(\because \quad 0 < c^3(1-c^n) < 1\right)$$

より $y = f_n(x)$ のグラフは下のようになり，方程式 $f_n(x) = 0$ は，$0 < x < 1$ の範囲にただ一つの実数解をもつことが示された．〔証明終〕



【9】(1)　条件をみたす n 本の直線 l_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ によって平面が a_n 個の部分に分けられているとする．

条件をみたす $n+1$ 本目の直線 l_{n+1} をひくと，l_{n+1} は各 l_k と 1 点で交わり，これらの交点によって l_{n+1} は $n+1$ 個の部分に分けられる．

さらにこの $n+1$ 個の部分は，それが含まれる平面を 2 つに分けるので，平面の数は $n+1$ 個増える．したがって，

$$a_{n+1}=a_n+n+1 \quad \cdots ①$$

ここで $a_1=2$ であるから

$$① \iff \quad a_{n+1}-a_n=n+1$$

とあわせて，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\ &= 2+\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1) \\ &= \frac{1}{2}\left(n^2+n+2\right) \end{aligned}$$

ここで

$$a_1=2=\frac{1}{2}\left(1^2+1+2\right)$$

であるから上式は $n=1$ のときも成立．ゆえに

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(n^2+n+2\right)} \qquad (答)$$

(2)　条件をみたす n 本の直線 m_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のうち，m_n 以外の $n-1$ 本の直線について，どの 2 本も平行でないとして一般性を失わない．

このとき (1) の結果から，m_n をひく前の $n-1$ 本の直線によって，平面は a_{n-1} 個の部分に分けられている．

m_n をひくと，m_n は m_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のいずれか 1 本と平行であるから，m_k のうちの $n-2$ 本と交わり，これらの $n-2$ 個の交点により m_n は $n-1$ 本の部分に分けられる．

さらに，この $n-1$ 個の部分は，それが含まれる平面を 2 つに分けるので，平面の部分の数は $n-1$ 個増える．

したがって

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1}+n-1 \\ &= \frac{1}{2}\left\{(n-1)^2+(n-1)+2\right\}+n-1 \\ &= \boldsymbol{\frac{n}{2}(n+1)} \qquad (答) \end{aligned}$$

添削課題

【1】(1) 特性方程式は，$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$ であり，
この解 $x=2$ と $x=3$ を用いて，漸化式を，$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ と書き換えると，これは数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ が，初項 $a_2-2a_1=3-2\cdot2=-1$，公比 3 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-2a_n=-1\cdot3^{n-1} \qquad \cdots\cdots①$$

また，漸化式を，$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$ と書き換えると，これは数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ が，初項 $a_2-3a_1=3-3\cdot2=-3$，公比 2 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-3a_n=-3\cdot2^{n-1} \qquad \cdots\cdots②$$

① − ② より

$$a_n=\mathbf{3\cdot2^{n-1}-3^{n-1}} \qquad (答)$$

(2) 特性方程式は

$$x^2-6x+9=(x-3)^2=0$$

この重解 $x=3$ を用いて与えられた漸化式を

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形すると，これは数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ が，初項 $a_2-3a_1=6-3\cdot1=3$，公比 3 の等比数列をなすことを示すから

$$a_{n+1}-3a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$$

両辺を 3^{n+1} で割って，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{3}$

これは，$\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ が初項 $\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列をなすことを示すから，

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{1}{3}n$$

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{n\cdot3^{n-1}} \qquad (答)$$

【2】①より，$2b_n = a_{n+1} - 3a_n$

上式で，n を $n+1$ として，$2b_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1}$

この 2 式を ②×2 に代入して

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 4a_n + 6(a_{n+1} - 3a_n) \qquad \therefore\ a_{n+2} - 9a_{n+1} + 14a_n = 0$$

特性方程式 $x^2 - 9x + 14 = (x-2)(x-7) = 0$ を解いて，$x = 2,\ 7$ より，これを用いて上式を

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 7(a_{n+1} - 2a_n)$$

と変形すると, 数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項が $a_2-2a_1 = (3a_1+2b_1)-2a_1 = a_1+2b_1 = 1+2\cdot 0 = 1$,
公比 7 の等比数列だから,

$$a_{n+1} - 2a_n = 7^{n-1}$$

両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{7^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}$$

ここで，$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{7}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{7}{2}} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{7^{n-1}}{2^n}$$

$\therefore\quad a_n = \dfrac{2^{n+1} + 7^{n-1}}{5}$ (これは，$n = 1$ のときも成立)

これを ① に代入して，$b_n = \dfrac{2\cdot 7^{n-1} - 2^n}{5}$

よって

$$\begin{cases} a_n = \boldsymbol{\dfrac{2^{n+1} + 7^{n-1}}{5}} \\ b_n = \boldsymbol{\dfrac{2\cdot 7^{n-1} - 2^n}{5}} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 条件式より

$$S_{n+1} = 4a_n + 2 \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$S_{n+2} = 4a_{n+1} + 2 \quad \cdots\cdots ②$$

② − ① より

$$S_{n+2} - S_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n)$$

$$\therefore \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0} \quad \textbf{(答)}$$

(2) (1) の漸化式より，特性方程式

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad \therefore \quad (x-2)^2 = 0 \qquad \therefore \quad x = 2$$

を利用して，(1) の漸化式は

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

と変形できる．これより，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は

初項 $a_2 - 2a_1$，公比 2 の等比数列

であることを意味している．ここで

$$\begin{aligned} a_2 - 2a_1 &= (a_1 + a_2) - 3a_1 = S_2 - 3a_1 = (4a_1 + 2) - 3a_1 \\ &= a_1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

であるから

$$\boldsymbol{a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \quad (n \geqq 1)} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{3}{4}$$

これより，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は

初項 $\dfrac{a_1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{3}{4}$ の等差数列

であることを意味している．したがって

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(n-1) = \frac{3n-1}{4}$$

よって

$$a_n = 2^n \cdot \frac{3n-1}{2^2} = \boldsymbol{(3n-1) \cdot 2^{n-2}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $n+1$ 桁の整数の各位の数の和が偶数になるのは

(i) 1 の位が 2 または 4 であり，上 n 桁の各位の数の和が偶数である.

(ii) 1 の位が 1 または 3 または 5 であり，上 n 桁の各位の数の和が奇数である.

のいずれかであり，これらは排反であるから，$n=1,\ 2,\cdots$ に対して

$$p_{n+1}=\frac{2}{5}p_n+\frac{3}{5}(1-p_n) \iff \boldsymbol{p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}} \quad \textbf{(答)}$$

(2) (1) より

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つ．よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は

初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列

であるから，求める p_n は

$$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{p_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{2}} \quad \textbf{(答)}$$

問題

【1】(1)　(I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6},\quad (\text{右辺}) = \frac{1}{2\cdot(1+2)} = \frac{1}{6}$$

よって，$n=1$ のとき成立.

(II) $n=k$ のとき，この等式が成り立つと仮定する．すなわち

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{2(k+2)}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{k}{2(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{k(k+3)+2}{2(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{k^2+3k+2}{2(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{(k+2)(k+1)}{2(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{k+1}{2(k+3)} \\
&= \frac{k+1}{2\{(k+1)+2\}}
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ.

以上，(I)，(II) より，任意の正の整数 n について

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

が成り立つ.　〔証明終〕

(2)　(I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad (\text{右辺}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

よって，$n=1$ のとき成立.

(II) $n=k$ のとき，この等式が成り立つと仮定する．すなわち

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)2k} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \\
&\quad = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k}\right) + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \\
&\quad = \frac{1}{k+1} + \left(\frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k}\right) + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) \\
&\quad = \left(\frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k}\right) + \frac{1}{k+1} + \left\{\frac{1}{k+(k+1)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+1}\right\} \\
&\quad = \left\{\frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{k+(k+1)}\right\} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+1} \\
&\quad = \frac{1}{(k+1)+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)+(k-1)} + \frac{1}{(k+1)+k} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)}
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ.

以上，(I)，(II) より，任意の正の整数 n について

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

が成り立つ.　〔証明終〕

【2】命題

「任意の正整数 n に対し，$a_n = 2^{n+1} + 3^{2n-1}$ が 7 の倍数である」

を，数学的帰納法により示す.

(I) $n = 1$ のとき.

$$a_1 = 2^{1+1} + 3^{2\cdot 1-1} = 7$$

より成立.

(II) $n = k$ のとき a_k が 7 の倍数であると仮定する．すなわち

$$a_k = 2^{k+1} + 3^{2k-1} = 7N \quad (N \text{ は整数}) \quad \cdots (*)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{(k+1)+1} + 3^{2(k+1)-1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} + 9 \cdot 3^{2k-1} \quad \cdots (\#) \end{aligned}$$

ここで (∗) より

$$2^{k+1} = 7N - 3^{2k-1}$$

であるから，(#) に代入して

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2 \cdot \left(7N - 3^{2k-1}\right) + 9 \cdot 3^{2k-1} \\ &= 2 \cdot 7N + (9-2)\, 3^{2k-1} \\ &= 7\left(2N + 3^{2k-1}\right) \end{aligned}$$

N は整数，k は正整数であるから，$2N + 3^{2k-1}$ は整数である．よって a_{k+1} は 7 の倍数である.

以上 (I)，(II) より，任意の正整数 n に対して a_n は 7 の倍数である.　〔証明終〕

【3】いくつかの n について，2^n，n^2 の値は下の表のようになる．

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
2^n	2	4	8	16	32	64	128	$\cdots$
n^2	1	4	9	16	25	36	49	$\cdots$

よって

$$2^n > n^2 \quad \cdots (*)$$

が成立するのは

$$n = 1,\ n \geqq 5$$

のときであると推定される．以下，$n \geqq 5$ で $(*)$ が成立することを数学的帰納法により示す．

(I) $n = 5$ のとき．
表より成立する．

(II) $n = k\ (\geqq 5)$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定する．すなわち

$$2^k > k^2 \quad \cdots (\#)$$

であるとする．このとき

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

が成立することが示されればよい．

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - (k+1)^2 &= 2 \cdot 2^k - \left(k^2 + 2k + 1\right) \\ &> 2 \cdot k^2 - k^2 - 2k - 1 \quad (\because \quad \text{帰納法の仮定}) \\ &= k^2 - 2k - 1 \\ &= (k-1)^2 - 2 > 0 \quad (\because \quad k \geqq 5) \end{aligned}$$

ゆえに $n = k + 1$ のときも成立．
以上より，$(*)$ が成立するのは

$$\boldsymbol{n = 1,\ n \geqq 5} \qquad (\text{答})$$

のとき．

【4】与えられた漸化式を用いて，いくつかの n に対して a_n の値を計算すると

$$a_1 = 2 = 1 \cdot 2$$
$$a_2 = \frac{1+2}{1} \cdot a_1 = 6 = 2 \cdot 3$$
$$a_3 = \frac{2+2}{2} \cdot a_2 = 12 = 3 \cdot 4$$
$$a_4 = \frac{3+2}{3} \cdot a_3 = 20 = 4 \cdot 5$$

このことから

$$a_n = n(n+1)$$

と推定される．以下，この推定が正しいことを数学的帰納法によって証明する．

(I) $n = 1$ のとき

$$1 \cdot (1+1) = 2 = a_1$$

よって，$n = 1$ のとき成立．

(II) $n = k$ のとき成立する，すなわち

$$a_k = k(k+1)$$

が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k} a_k = \frac{k+2}{k} \cdot k(k+1) = (k+1)(k+2)$$

よって，$n = k+1$ のときも成り立つ．

以上，(I)，(II) より，任意の正整数 n について

$$a_n = n(n+1)$$

が成り立つ．　　(答)

【5】与えられた式を N とおく．このとき

$$N = n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

が 24 の倍数であることを，数学的帰納法により示す．

(I) $n = 1$ のとき．

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 24 \cdot 2$$

より N は 24 の倍数である．

(II) $n = k$ のとき，N が 24 の倍数であると仮定する．すなわち

$$k(k+1)(k+2)(3k+5) = 24l \quad (l \text{ は整数})$$

と仮定すると

$$\begin{aligned}
&(k+1)(k+2)(k+3)\{3(k+1)+5\} \\
&\quad =(k+1)(k+2) \cdot k \cdot (3k+8) + (k+1)(k+2) \cdot 3 \cdot (3k+8) \\
&\quad =k(k+1)(k+2) \cdot (3k+5) + k(k+1)(k+2) \cdot 3 + 3(k+1)(k+2)(3k+8) \\
&\quad =k(k+1)(k+2)(3k+5) + 3(k+1)(k+2) \cdot \{k + (3k+8)\} \\
&\quad =24l + 3 \cdot 4 \cdot (k+1)(k+2)^2 \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

ここで

$k+1$ と $k+2$ のいずれか一方は 2 の倍数である

ことから

$3 \cdot 4 \cdot (k+1)(k+2)^2$ は 24 の倍数である

よって $(*)$ も 24 の倍数である．

ゆえに，$n = k+1$ のときも成り立つ．

以上，(I)，(II) より，任意の正の整数 n に対して $n(n+1)(n+2)(3n+5)$ は 24 の倍数である．〔証明終〕

【6】 (I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = {a_1}^2, \quad (\text{右辺}) = 1 \cdot {a_1}^2 = {a_1}^2$$

よってこの不等式は成り立つ.

(II) $n = k\ (\geqq 1)$ のとき，この不等式が成り立つと仮定する．すなわち

$$(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k)^2 \leqq k({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots\cdots + {a_k}^2) \quad \cdots (*)$$

が成り立つと仮定する．ここで

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \quad B = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_k}^2$$

とおくと，$(*)$ は

$$A^2 \leqq kB \qquad \therefore \quad kB - A^2 \geqq 0$$

と表される．このとき

$$\begin{aligned}
&(k+1)({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots\cdots + {a_k}^2 + {a_{k+1}}^2) - (a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k + a_{k+1})^2 \\
&\quad = (k+1)(B + {a_{k+1}}^2) - (A + a_{k+1})^2 \\
&\quad = k \cdot {a_{k+1}}^2 - 2A \cdot a_{k+1} + (k+1)B - A^2 \\
&\quad = k\left(a_{k+1} - \frac{A}{k}\right)^2 - k \cdot \frac{A^2}{k^2} + (k+1)B - A^2 \\
&\quad = k\left(a_{k+1} - \frac{A}{k}\right)^2 + \frac{k+1}{k}(kB - A^2) \geqq 0 \cdots ①
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k + a_{k+1})^2 \leqq (k+1)({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_k}^2 + {a_{k+1}}^2)$$

よって，$n = k+1$ のときも成り立つ.

以上，(I)，(II) より，任意の正整数 n に対して

$$(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n)^2 \leqq n({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots\cdots + {a_n}^2)$$

が成り立つ. 〔証明終〕

また，この不等式の等号が成り立つ条件を調べる.

これは，① の不等式の等号が成り立つ条件に等しいから

$$a_{k+1} - \frac{A}{k} = 0 \text{ かつ } kB - A^2 = 0$$

$$\therefore \quad \begin{cases} ka_{k+1} = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k \\ k({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots\cdots + {a_k}^2) = (a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k)^2 \end{cases}$$

第 2 式は，もとの不等式の等号の成り立つ条件そのものであるから，第 1 式に着目すると，すべての整数 k に対して

$$ka_{k+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k$$
$$(k-1)a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} \quad (k \geqq 2)$$

であり，辺々をひいて

$$ka_{k+1} - (k-1)a_k = a_k \quad \therefore \quad a_k = a_{k+1} \quad (\because \quad k > 0)$$

これは，$k = 1$ のときも成立する．よって，等号が成立するのは

$\boldsymbol{a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n}$ **のとき** (答)

【7】不等式

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \qquad \cdots(*)$$

が 2 以上の任意の整数 n で成立することを，数学的帰納法により示す.

(I) $n=2$ のとき.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}<2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

より成立.

(II) $n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定する．すなわち

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k} \qquad \cdots(\#)$$

が成立すると仮定する．このとき

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

が成立することを示す.

$(\#)$ の両辺に $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ を加えて

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

よって

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

が示されればよい．上式で

$$\begin{aligned}(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= -\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \frac{-k(k+1)+(k+1)^2-k}{k(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{k(k+1)^2}>0\end{aligned}$$

より，$n=k+1$ のときも成立.

以上 (I)，(II) より，2 以上の任意の整数 n で $(*)$ が成立することが示された.

〔証明終〕

【8】与えられた条件

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3$$
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n$$

より，いくつかの n に対して a_n の値を求めると

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = 3\\
&a_3 = 3a_2 - 7a_1 = 9 - 7 = 2\\
&a_4 = 3a_3 - 7a_2 = 6 - 21 = -15\\
&a_5 = 3a_4 - 7a_3 = -45 - 14 = -59\\
&a_6 = 3a_5 - 7a_4 = -177 + 105 = -72\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

より，

a_nが偶数になるのは n が 3 の倍数のとき　$\cdots(*)$

と推定される．以下，この推定が正しいことを数学的帰納法により示す．

(I) $n = 1,\ 2,\ 3$ のとき．

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 2$$

より成立．

(II) 正整数 k に対して $n = 3k - 2,\ 3k - 1,\ 3k$ のとき $(*)$ が成立すると仮定する．すなわち

$$a_{3k-2},\ a_{3k-1}:\ \text{odd},\quad a_{3k}:\ \text{even}$$

であるとする．このとき

$$\begin{aligned}
a_{3k+1} &= 3a_{3k} - 7a_{3k-1}\\
&= (\text{odd}) \cdot (\text{even}) - (\text{odd}) \cdot (\text{odd})\\
&= (\text{even}) - (\text{odd}):\ \text{odd}
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
a_{3k+2} &= 3a_{3k+1} - 7a_{3k}\\
&= (\text{odd}) \cdot (\text{odd}) - (\text{odd}) \cdot (\text{even})\\
&= (\text{odd}) - (\text{even}):\ \text{odd}
\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
a_{3k+3} &= 3a_{3k+2} - 7a_{3k+1}\\
&= (\text{odd}) \cdot (\text{odd}) - (\text{odd}) \cdot (\text{odd})\\
&= (\text{odd}) - (\text{odd}):\ \text{even}
\end{aligned}$$

よって，$n = 3k + 1,\ 3k + 2,\ 3k + 3$ のときも成立．

以上 (I), (II) より, a_n が偶数になるのは $\boldsymbol{n}$ が **3** の倍数のとき. (答)

■別解

$$a_{n+3} - a_n : \text{ even}$$

であることを示す. 漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+3} - a_n &= 3a_{n+2} - 7a_{n+1} - a_n \\ &= 3(3a_{n+1} - 7a_n) - 7a_{n+1} - a_n \\ &= 2a_{n+1} - 22a_n \\ &= 2(a_{n+1} - 11a_n) \end{aligned}$$

よって a_{n+3} と a_n の偶奇は一致する. ところで

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 2$$

より, a_n が偶数となるのは

$\boldsymbol{n}$ が **3** の倍数のとき (答)

【9】解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=p,\quad \alpha\beta=-q$$

(1) 任意の正整数 n に対して，命題

$$A_n=\alpha^n+\beta^n \text{が整数である} \quad \cdots(*)$$

を数学的帰納法により示す.

(I) $n=1$ のとき

$$A_1=\alpha+\beta=p$$

また，$n=2$ のとき

$$A_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2+2q$$

p，q が整数であるから，A_1，A_2 は整数である．ゆえに $(*)$ は成立.

(II) $n=k,\ k+1\ (k \geqq 1)$ のとき，成り立つと仮定する．すなわち

$$A_k=\alpha^k+\beta^k,\ A_{k+1}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1} \text{が整数である}$$

と仮定すると

$$\begin{aligned}A_{k+2}&=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}\\&=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)\\&=p\cdot(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})+q\cdot(\alpha^k+\beta^k)\end{aligned}$$

p，q が整数であるから，$n=k+2$ のときも成り立つ.

以上，(I)，(II) より，すべての正整数 n に対して A_n は整数であることが示された.

〔証明終〕

(2)

$$\begin{aligned}A_{3n}-{A_n}^3&=\left(\alpha^{3n}+\beta^{3n}\right)-(\alpha^n+\beta^n)^3\\&=-3\alpha^{2n}\beta^n-3\alpha^n\beta^{2n}\\&=-3\cdot(\alpha\beta)^n\cdot(\alpha^n+\beta^n)\\&=-3\cdot(-q)^n\cdot A_n\end{aligned}$$

q，A_n は整数であるから，$A_{3n}-{A_n}^3$ は 3 の倍数である.　〔証明終〕

【10】与えられた条件は

$$a_1 = 1,\ a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_{n+1} = 2(a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_na_1) \quad \cdots(*)$$

$(*)$ で $n = 1$ として

$$a_1a_2 = 2\,(a_1a_1)$$

$$\therefore \quad a_2 = 2$$

また $(*)$ で $n = 2$ として

$$a_1a_2 + a_2a_3 = 2\,(a_1a_2 + a_2a_1)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 4$$

$$\therefore \quad a_3 = 3$$

ゆえに一般項は

$$a_n = n \quad \cdots(\#)$$

と推定される．この推定が正しいことを，数学的帰納法により示す．

(I) $n = 1$ のとき．

$$a_1 = 1$$

より成立．

(II) $n \leqq k$ のとき $(\#)$ が正しい，すなわち $l = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$ なる l に対して

$$a_l = l$$

と仮定すると，$(*)$ で $n = k$ として

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots\cdots + (k-1) \cdot k + k \cdot a_{k+1} \\ &\qquad = 2\{1 \cdot k + 2 \cdot (k-1) + \cdots\cdots + k \cdot 1\} \end{aligned}$$

ゆえに $k \geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) + k \cdot a_{k+1} &= 2\sum_{i=1}^{k} i(k-i+1) \\ k \cdot a_{k+1} &= 2\sum_{i=1}^{k} i(k-i+1) - \left\{\sum_{i=1}^{k}(i^2+i) - (k^2+k)\right\} \quad (k = 1 \text{ でも成立}) \\ &= (2k+1)\sum_{i=1}^{k} i - 3\sum_{i=1}^{k} i^2 + k^2 + k \\ &= \cancel{(2k+1)\cdot\frac{1}{2}k(k+1)} - \cancel{3\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)} + k(k+1) \\ &= k(k+1) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{k+1} = k + 1$$

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

以上，(I)，(II) より，任意の自然数 n について

$$\boldsymbol{a_n = n}$$

が成り立つ．　　(答)

M2TK

高２難関大数学Ｋ

Z-KAI

会員番号	

氏　名	