M2JC

本科 2 期 10 月度

# 解答

Z会東大進学教室

# 高 2 東大理系数学Ⅲ

## 問題

【1】(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\tan 2x}\cdot\frac{3}{2}$$
$$= 1\cdot 1\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin(2\sin x)}{2\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$
$$= 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

(3) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと $x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$ であり

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{(2t)^2}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{4t^2}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos t}{t^2}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

≪注≫

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$= 1^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

【2】$f(x)=\cos x+1$ より

$$f'(x)=-\sin x,\quad f''(x)=-\cos x$$

$g(x)=\dfrac{a}{bx^2+cx+1}$ より

$$\begin{aligned} g'(x)&=\frac{-a(2bx+c)}{(bx^2+cx+1)^2}\\ g''(x)&=\frac{-2ab(bx^2+cx+1)^2+2a(2bx+c)^2(bx^2+cx+1)}{(bx^2+cx+1)^4}\\ &=\frac{-2ab(bx^2+cx+1)+2a(2bx+c)^2}{(bx^2+cx+1)^3} \end{aligned}$$

$f(0)=g(0)$ より

$$2=a \quad \cdots\cdots①$$

$f'(0)=g'(0)$ より

$$0=-ac \quad \cdots\cdots②$$

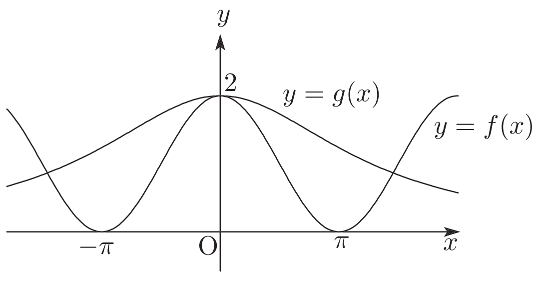
$f''(0)=g''(0)$ より

$$-1=-2ab+2ac^2 \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③ より

$$a=2,\ b=\frac{1}{4},\ c=0$$

≪参考≫ $y=f(x)=\cos x+1$，$y=g(x)=\dfrac{2}{\frac{1}{4}x^2+1}=\dfrac{8}{x^2+4}$ のグラフは下図のようになる．$f(0)=g(0)$，$f'(0)=g'(0)$，$f''(0)=g''(0)$ であり，かつ $f'''(0)\fallingdotseq g'''(0)$ であるとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $x=0$ において 2 次の接触をするという．



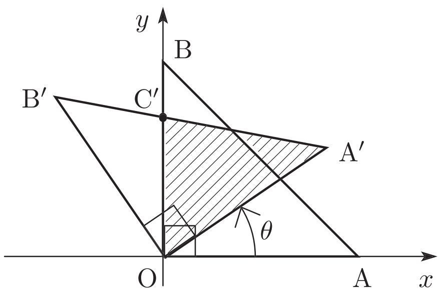
【3】(1) 題意から

$$\mathrm{A}'(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{B}'(-\sin\theta,\ \cos\theta)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

であり，直線 A′B′ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta-(-\sin\theta)}(x-\cos\theta)+\sin\theta \\ &= \frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}x+\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(-\cos\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \\ &= \frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}x+\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \end{aligned}$$

A′B′ と $y$ 軸との交点を C′ とすると，
$\mathrm{C}'\left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)$ であるから




$$\begin{aligned} S(\theta) &= \triangle \mathrm{OA'C'} \\ &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA'}\cdot \mathrm{OC'}\sin\angle \mathrm{A'OC'} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ &= \frac{\cos\theta}{2(\sin\theta+\cos\theta)} \end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\pi}{2}-\theta=t$ とおくと，$\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$ であり

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{S(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta} &= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{2\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right\}}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\sin t}{2(\cos t+\sin t)}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{2(\cos t+\sin t)} \\ &= 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

【4】$0 < x < \pi$ より

$$\sin\frac{x}{2^n} \neq 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}},\ \cos\frac{x}{2^2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}},\ \cos\frac{x}{2^3} = \frac{\sin\frac{x}{2^2}}{2\sin\frac{x}{2^3}},\ \cdots,\ \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

よって，辺々をかけて

$$\begin{aligned} a_n &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n} \\ &= \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}} \\ &= \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sin x}{x}$$

≪注≫ 本質には同じであるが，次のように変形することもできる．

条件より

$$\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

であるから

$$a_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$$

の両辺に $\sin\frac{x}{2^n}$ をかけて

$$\begin{aligned} a_n\sin\frac{x}{2^n} &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n} \\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-3}}\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}} \\ &\ \ \vdots \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2^n}\sin x \end{aligned}$$

$0 < x < \pi$ より，$\sin\frac{x}{2^n} \neq 0$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから

$$a_n = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

(以下同様)

## 添削課題

【1】(1) 導関数の定義から

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\sin\{(x+h)-x\}}{\cos(x+h)\cos x} \qquad (\because \text{加法定理}) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\cos(x+h)\cos x} \\
&= 1\cdot\frac{1}{\cos x\cos x}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(2) ① $y = x\sin^2 x$ より

$$
\begin{aligned}
y' &= \sin^2 x + x\cdot 2\sin x\cdot\cos x \\
&= \sin^2 x + x\sin 2x
\end{aligned}
$$

② $y = \dfrac{\tan x}{x}$ より

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot x - \tan x\cdot 1}{x^2} \\
&= \frac{x-\tan x\cos^2 x}{x^2\cos^2 x} \\
&= \frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

③ $y = \cos(\sqrt{x+1})$ より

$$
\begin{aligned}
y' &= -\sin(\sqrt{x+1})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\
&= -\frac{\sin(\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}
$$

(3) $x = \cos y\ (0 < y < \pi)$

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

## 問題

【1】(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 2=1\times 1\times 2=2$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x^2)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x^2)}{3x^2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}&=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}\right\}^{-\frac{1}{2}}\\&=e^{-\frac{1}{2}}\quad\left(=\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(3x-1)\sin\{\log(x-2)-\log x\}&=\lim_{x\to\infty}(3x-1)\sin\left(\log\frac{x-2}{x}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}(3x-1)\sin\left\{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\right\}\\&=\lim_{x\to\infty}(3x-1)\cdot\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{\sin\left\{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\right\}}{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}(3x-1)\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}{-\frac{2}{x}}\cdot\frac{\sin\left\{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\right\}}{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(-6+\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}{-\frac{2}{x}}\cdot\frac{\sin\left\{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\right\}}{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}\\&=(-6+0)\times 1\times 1=-6\end{aligned}$$

【2】(1) $y = x^{e^x}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y = e^x \log x$$

両辺を $x$ で微分して

$$\frac{y'}{y} = e^x \log x + \frac{e^x}{x}$$

よって

$$y' = \left(e^x \log x + \frac{e^x}{x}\right) y = x^{e^x} e^x \log x + x^{e^x - 1} e^x \quad (x > 0)$$

(2) $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y = \frac{1}{2}\log(1-\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{x})$$

両辺を $x$ で微分して

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{4\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

よって

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})^3}}$$

≪注≫ 対数微分によらず，次のように両辺を 2 乗してから微分する方法もある．

$$y^2 = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

より，両辺を $x$ で微分して

$$2yy' = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

よって

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})^3}}\end{aligned}$$

【3】いま，$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ が与えられている．このとき

$$\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x)$$

の極限値は $\log e=1$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

そこで ① において $\log(1+x)=t$ とおくと，$1+x=e^t$ より

$$x\to 0 \iff t\to 0$$

であるから

$$\begin{aligned} ① &\iff \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1 \\ &\iff \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1 \end{aligned}$$

よって，$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ が成立する．　〔証明終〕

【4】(1) 関係式において，$x=y=0$ とすると

$$f(0)=f(0)f(0) \qquad \therefore \quad f(0)(f(0)-1)=0$$

$f(0)>0$ より

$$f(0)=1$$

(2) 導関数の定義より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\frac{f(h)-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= f(x)f'(0)=af(x) \end{aligned}$$

よって

$$f'(x)=af(x)$$

(3) (2) の結果より

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=a$$

ここで，$\{\log f(x)\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ であるから

$$\{\log f(x)\}'=a$$

したがって

$$\log f(x)=ax+b \quad (b \text{ は定数})$$

よって

$$f(x)=e^{ax+b}$$

$f(0)=1$ より

$$1=e^{b}$$

すなわち，$b=0$ であるから

$$f(x)=e^{ax}$$

≪研究≫ (2) の結果

$$\frac{dy}{dx} = ay \qquad \cdots\cdots ①$$

のように，$x$，$y$，$y'$ を含む等式を **微分方程式**といい，この等式を満たす関数 $y$ を求めることを，**微分方程式を解く**という．

① の微分方程式は，形式的には次のように解かれる．

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

より

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = a$$

両辺を $x$ で積分すると

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int a dx$$

すなわち

$$\int \frac{1}{y} dy = a \int dx$$

$y > 0$ であるから

$$\log y = ax + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$f(0) = 1$ より

$$\log 1 = 0 = C$$

したがって

$$\log y = ax$$

すなわち

$$y = e^{ax}$$

## 添削課題

【1】(1) ① $y=\log(x^2+1)$ より

$$y'=\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}$$

② $y=\log|\cos x|$ より

$$y'=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

(2) ① $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ であるから

$$g(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)$$

② $y=g(x)$ とおくと

$$y=\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$

より

$$e^{2x}-2ye^x-1=0$$

よって，$e^x>0$ より

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

すなわち

$$x=\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

したがって

$$h(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

③ ②の結果より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}h(x)&=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

≪注≫ この結果は記憶にとどめておくと，積分において役に立つ．

## 問題

【1】(1) $y=(\log x)^2$ と $y=1$ の交点は

$$(\log x)^2=1 \iff \log x=\pm 1 \iff x=e,\ e^{-1}$$

より $(e,\ 1)$, $(e^{-1},\ 1)$ である．また，$y=(\log x)^2$ において

$$y'=2\log x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\log x}{x}$$

であるから，$(e,\ 1)$ における $y=(\log x)^2$ の接線は

$$y=\frac{2\log e}{e}(x-e)+1=\frac{2}{e}x-1$$

また，$(e^{-1},\ 1)$ における接線は

$$y=\frac{2\log e^{-1}}{e^{-1}}(x-e^{-1})+1=-2e(x-e^{-1})+1=-2ex+3$$

よって，求める接線の方程式は

$$y=\frac{2}{e}x-1,\quad y=-2ex+3$$

(2) $y=e^x$ の $x=s$ における接線の方程式は，$y'=e^x$ より

$$y-e^s=e^s(x-s) \qquad \therefore\ \ y=e^sx-se^s+e^s \quad \cdots①$$

$y=\log x+2$ の $x=t$ における接線の方程式は，$y'=\dfrac{1}{x}$ より

$$y-(\log t+2)=\frac{1}{t}(x-t) \qquad \therefore\ \ y=\frac{1}{t}x+\log t+1 \quad \cdots②$$

①，② が一致するためには

$$\begin{aligned} e^s&=\frac{1}{t} & &\cdots③\\ -se^s+e^s&=\log t+1 & &\cdots④\end{aligned}$$

③ より

$$\log t=\log e^{-s}=-s$$

④ に代入して

$$-se^s+e^s=-s+1 \qquad \therefore\ \ (s-1)(e^s-1)=0$$

$s=1$ のとき，$t=\dfrac{1}{e}$ となり，このとき共通接線の方程式は

$$y=ex$$

$e^s=1$ すなわち $s=0$ のとき，$t=1$ となり，このとき共通接線の方程式は

$$y=x+1$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=ex,\quad y=x+1$$

【2】(1) $x \to 0$ を考えるので，$-1 < x < 1$ としてよい．$f(x) = \sin x$ はすべての実数 $x$ で微分可能であるから，$x$ と $x^2$ の間に平均値の定理を使うと

$$\frac{f(x)-f(x^2)}{x-x^2} = f'(c) \iff \frac{\sin x - \sin x^2}{x-x^2} = \cos c$$

を満たす $c$ が $x^2$ と $x$ の間に存在する．このとき，$x \to 0$ とすると，$c \to 0$ となるから

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2} = \lim_{c \to 0} \cos c = \cos 0 = 1$$

〔証明終〕

(2) $f(x) = \log(\log x)$ とおくと，$f(x)$ は $x \geqq e$ において微分可能であるから，区間 $[p,\ q]$ において平均値の定理を用いて

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} = f'(c)$$

となる $c$ が，$e \leqq p < c < q$ に存在する．ここで

$$f'(x) = \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x \log x}$$

より

$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q-p} = \frac{1}{c\log c} \quad (e \leqq p < c < q)$$

また，$y = x\log x$ とすると，$y' = \log x + 1$ より，$x \geqq e$ において $y' > 0$ となり，$y = x \log x$ は $x \geqq e$ で単調増加であるから，$c > e$ より

$$c \log c > e \log e = e$$

よって

$$\frac{1}{c \log c} < \frac{1}{e}$$

であるから

$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q-p} < \frac{1}{e}$$

したがって，$q - p > 0$ より

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つ．〔証明終〕

【3】(1) 1 次式 $g(x)=a+bx$ が $f(x)$ の 1 位の近似であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(a+bx)}{x}=0 \quad \cdots\cdots①$$

このとき

$$\lim_{x\to 0}\{f(x)-(a+bx)\}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(a+bx)}{x}\cdot x$$
$$=0\cdot 0=0$$

であり，$f(x)$ は微分可能より連続であるから

$$f(0)-a=0 \qquad \therefore\quad a=f(0)$$

このとき，① から

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}-b\right\}=0 \qquad \therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=b$$

この左辺は微分係数の定義から，$f'(0)$ に等しいので

$$b=f'(0)$$

〔証明終〕

(2) $g(x)=1-\dfrac{x}{2}+cx^2$ が $f(x)=\sqrt{1-x}$ の 2 位の近似のとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\left(1-\frac{x}{2}+cx^2\right)}{x^2}=0$$

分子の有理化をすると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2-\left(1-\frac{x}{2}+cx^2\right)^2}{x^2\left\{\sqrt{1-x}+\left(1-\frac{x}{2}+cx^2\right)\right\}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-\left(1+\frac{x^2}{4}+c^2x^4-x-cx^3+2cx^2\right)}{x^2\left(\sqrt{1-x}+1-\frac{x}{2}+cx^2\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-c^2x^2+cx-\left(2c+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{1-x}+1-\frac{x}{2}+cx^2}$$
$$=\frac{-\left(2c+\frac{1}{4}\right)}{2}$$

これが 0 になればよいので

$$c=-\frac{1}{8}$$

≪注≫ $f(x)=\sqrt{1-x}$ の $x=0$ のまわりの 2 次近似式を

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

とおくと，$f(0)=g(0)$ より

$$1=a_0$$

次に

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}},\quad g'(x)=a_1+2a_2x$$

と $f'(0)=g'(0)$ より

$$-\frac{1}{2}=a_1$$

さらに

$$\begin{cases} f''(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}\right)=-\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}} \\ g''(x)=2a_2 \end{cases}$$

と $f''(0)=g''(0)$ より

$$-\frac{1}{4}=2a_2 \qquad \therefore\quad a_2=-\frac{1}{8}$$

よって

$$g(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$$

である.

【4】(1) $f(x)=\sin x$ かつ $51^\circ = 45^\circ + 6^\circ = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{30}$ より ① の形に表すと

$$\sin 51^\circ = f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{30}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{30}f'\left(\frac{\pi}{4}+\theta\frac{\pi}{30}\right)\ (0<\theta<1)$$

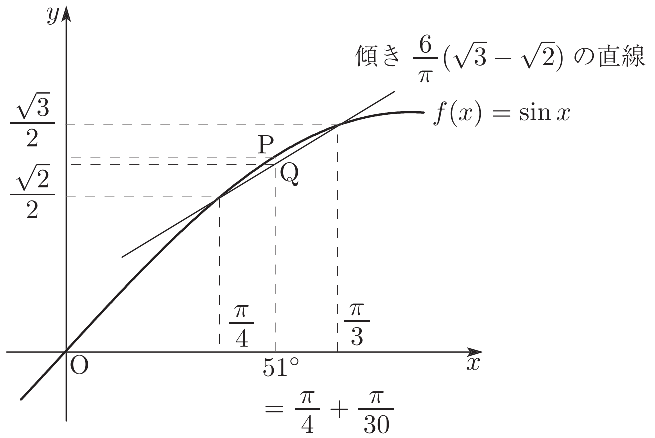
(2) $f'(x)=\cos x$ より

$$\sin 51^\circ = \sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{30}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\frac{\pi}{30}\right)\ (0<\theta<1)$$

まず，$y=\cos x$ は $0<x<\pi$ において単調減少であるから

$$\sin 51^\circ < \sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots ①$$

次に，$\dfrac{\pi}{4}<51^\circ<\dfrac{\pi}{3}$ に注意して，$f(x)=\sin x$ の $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right]$ におけるグラフを考えると，$y=f(x)$ のグラフは上に凸であるから




上図で P，Q の $y$ 座標を比べると

$$(\text{P の } y \text{ 座標}) > (\text{Q の } y \text{ 座標})$$

$$\sin 51^\circ > \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{6}{\pi}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\frac{\pi}{30} \quad \cdots\cdots ②$$

よって，①，② から

$$\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{10} < \sin 51^\circ < \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{30}\right)$$

一方，問題文の数値から

$$\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{10} = \frac{3.4640\cdots+4.2426\cdots}{10} > 0.77$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{30}\right) = \frac{1.4142\cdots}{2}\times\left(1+\frac{0.31415\cdots}{3}\right) < 0.79$$

であるから

$$0.77 \leqq \sin 51^\circ \leqq 0.79$$

したがって，$p \leqq \sin 51^\circ \leqq q$ かつ $q-p \leqq 0.05$ をみたす $p$，$q$ の 1 組として

$$(p,\ q) = (0.77,\ 0.79)$$

## 添削課題

【1】(1) $f(x)$ の $x=1$ のまわりの 1 次近似式を

$$g(x) = a_0 + a_1(x-1) \quad (a_0,\ a_1 : \text{定数})$$

とおく． $f(1) = g(1)$ より

$$1 = a_0$$

次に

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \\ g'(x) = a_1 \end{cases}$$

と $f'(1) = g'(1)$ より

$$0 = a_1$$

よって

$$g(x) = 1$$

(2) $f(x)$ の $x=1$ のまわりの 2 次近似式を

$$h(x) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2 \quad (b_0,\ b_1,\ b_2 : \text{定数})$$

とおく． $f(1) = h(1)$ より

$$1 = b_0$$

次に

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \\ h'(x) = b_1 + 2b_2(x-1) \end{cases}$$

と $f'(1) = h'(1)$ より

$$0 = b_1$$

さらに

$$\begin{cases} f''(x) & = \dfrac{1 \cdot \sqrt{x^2-2x+2} - (x-1) \cdot \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x^2-2x+2} \\ & = \dfrac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}} \\ h''(x) & = 2b_2 \end{cases}$$

と $f''(1) = h''(1)$ より

$$1 = 2b_2 \qquad \therefore \quad b_2 = \frac{1}{2}$$

以上から

$$h(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$$

(3) $f(x) = \sqrt{(x-1)^2+1}$ より

$$f(1.2) = \sqrt{(1.2-1)^2+1} = \sqrt{0.04+1} = \sqrt{1.04}$$

さて，(1) より

$$x \fallingdotseq 1 \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq 1$$

であるから，$x = 1.2 \fallingdotseq 1$ とすると

$$\sqrt{1.04} \fallingdotseq 1$$

また，(2) より

$$x \fallingdotseq 1 \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$$

であるから，$x = 1.2 \fallingdotseq 1$ として

$$\sqrt{1.04} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}(1.2-1)^2 = 1.02$$

## 問題

【1】(1) $y=\sin x(1+\cos x)$ より

$$\begin{aligned} y' &= \cos x(1+\cos x)+\sin x(-\sin x)=\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x) \\ &= 2\cos^2 x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1) \end{aligned}$$

$y'=0$ のとき

$$\cos x=\frac{1}{2},\ -1$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より

$$x=\frac{1}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

よって，増減表は次のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | $\nearrow$ | $0$ |

以上より，グラフは図 1 のようになる．

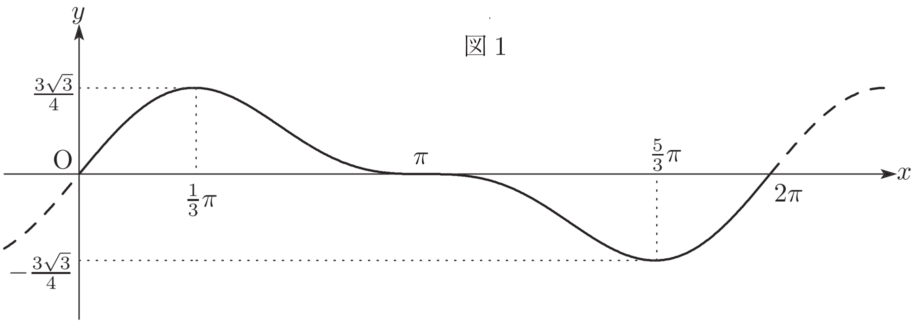



図 1

(2) $y=x\log x$ より

$$y'=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$y'=0$ のとき，$x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ であるから，増減表は次のようになる．

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e^{-1}$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | / | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $(0)$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$\left(\because\ \begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x=-0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\log x=+\infty\end{array}\right)$$

よって，グラフは図 2 のようになる．

≪注≫ 凹凸を考えると $y''=\dfrac{1}{x}>0$ より，定義域内でつねに下に凸である．

(3) $y = xe^x$ より

$$y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$y' = 0$ のとき

$$x = -1$$

よって，増減表は次のようになる．

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | / | $-$ | $0$ | $+$ | / |
| $y$ | $0$ | $\searrow$ | $-\dfrac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$\left( \because \lim_{x \to -\infty} xe^x = -0, \quad \lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty \right)$$

より，グラフは図 3 のようになる．

≪注≫ $y'' = (2+x)e^x$ より，点 $(-2,\ -2e^{-2})$ を変曲点とする．($x < -2$ で上に凸，$-2 < x$ で下に凸である．)

図 2

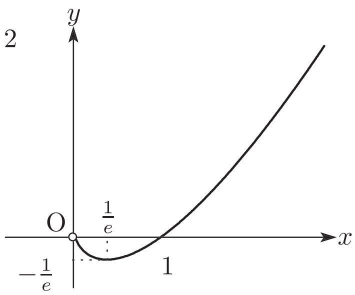
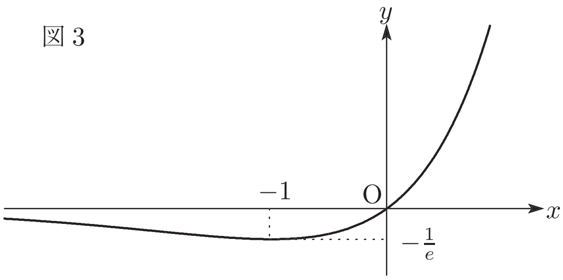



図 3



【2】(1) $y=\dfrac{x^3-1}{x^2}=x-\dfrac{1}{x^2}$ より

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to-0}y=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0\end{cases}$$

よって，$y=\dfrac{x^3-1}{x^2}$ は

$$直線 : x=0,\ 直線 : y=x$$

を漸近線にもつ．

(2) $y=\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$ は $y$ 軸に平行な漸近線をもたない．また，直線 $y=ax+b$ ($a$, $b$ : 定数) が $y=\sqrt{x}$ の漸近線であるとすると

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x}-(ax+b)\right\}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(1-a\sqrt{x}-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．仮に，$a\fallingdotseq 0$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\left(1-a\sqrt{x}-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)=\infty \text{ or } -\infty$$

となるから，① の左辺は $\infty$ or $-\infty$ に発散してしまうので

$$a=0$$

が必要．このとき

$$① \iff \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-b)=0$$

$b$ は定数であるから，これは矛盾である．

以上から，$y=\sqrt{x}$ は漸近線をもたない．

(3) $y=\sqrt{2x^2+x-3}$ は $y$ 軸に平行な漸近線をもたない．また

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}=\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(y-\sqrt{2}x)&=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x-3}-\sqrt{2}x\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{\sqrt{2x^2+x-3}+\sqrt{2}x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

より，$y = \sqrt{2}x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ を漸近線にもつ．さらに

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{2t^2 - t - 3}}{-t} \quad (\because\ x = -t \text{ とおく}) \\
&= \lim_{t \to \infty} \left( -\sqrt{2 - \frac{1}{t} - \frac{3}{t^2}} \right) = -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \left\{ y - (-\sqrt{2}x) \right\} &= \lim_{t \to \infty} \left( \sqrt{2t^2 - t - 3} - \sqrt{2}t \right) \quad (\because\ x = -t \text{ とおく}) \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{-t - 3}{\sqrt{2t^2 - t - 3} + \sqrt{2}t} \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{-1 - \frac{3}{t}}{\sqrt{2 - \frac{1}{t} - \frac{3}{t^2}} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

より，$y = -\sqrt{2}x - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ も漸近線となる．

以上より，$y = \sqrt{2x^2 + x - 3}$ は

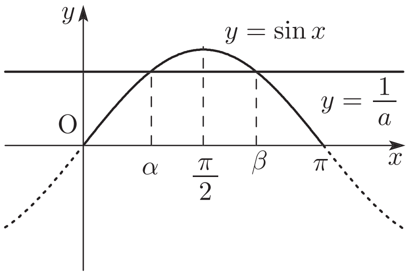
$$
\text{直線} : y = \pm \left( \sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)
$$

を漸近線にもつ．

【3】 $f(x) = x + a\cos x$ より

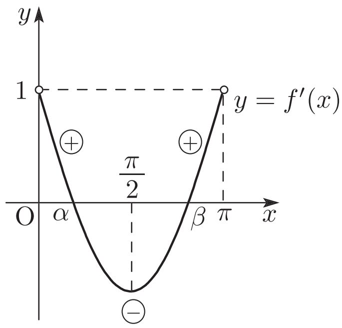
$$f'(x) = 1 - a\sin x = 0 \iff \sin x = \frac{1}{a} \ (a > 1)$$

を満たす $x$ は右のグラフから $0 < x < \pi$ に 2 つ存在する．それらを $\alpha$，$\beta$ $(\alpha < \beta)$ とおくと，$y = \sin x$ のグラフの直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関する対称性から




$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$
$$\therefore \quad \alpha + \beta = \pi \quad \cdots\cdots①$$

このとき，$y = f'(x)$ のグラフは右のようになるので，$y = f(x)$ は $x = \alpha$ で極大，$x = \beta$ で極小となる．したがって，$f(\beta) = 0$ のもとで，$f(\alpha)$ の値を求めればよい．




$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(\pi - \beta) \quad (\because ①) \\ &= \pi - \beta + a\cos(\pi - \beta) \\ &= \pi - \beta - a\cos\beta \\ &= \pi - f(\beta) \\ &= \pi \end{aligned}$$

よって，求める極大値は $\pi$

【4】(1) $f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(1-e^{x-1})(1+e^x)-(x-e^{x-1})e^x}{(1+e^x)^2}\\&=\frac{1-e^{x-1}+e^x-xe^x}{(1+e^x)^2}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}g(x)&=(1+e^x)^2f'(x)\\&=1-e^{x-1}+e^x-xe^x\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}g(x)&=\lim_{x\to+\infty}(1-e^{x-1}+e^x-xe^x)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left\{1-e^x\left(\frac{1}{e}-1+x\right)\right\}=-\infty\end{aligned}$$

また，$x=-t$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}g(x)&=\lim_{t\to+\infty}g(-t)\\&=\lim_{t\to+\infty}(1-e^{-t-1}+e^{-t}+te^{-t})\\&=\lim_{t\to+\infty}\left\{1+\frac{1}{e^t}\left(1-\frac{1}{e}\right)+\frac{t}{e^t}\right\}=1\end{aligned}$$

(2) $g(x)=(1+e^x)^2f'(x)$ であり，$(1+e^x)^2>0$ であるから，$f'(x)$ と $g(x)$ は符号が一致する．$g(x)=1-e^{x-1}+e^x-xe^x$ より

$$\begin{aligned}g'(x)&=-e^{x-1}-xe^x\\&=-e^x\left(x+\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

よって，$g'(x)=0$ のとき

$$x=-\frac{1}{e}$$

である．

$$g\left(-\frac{1}{e}\right)=1-e^{-\frac{1}{e}-1}+e^{-\frac{1}{e}}+\frac{1}{e}e^{-\frac{1}{e}}=1+e^{-\frac{1}{e}}>1$$

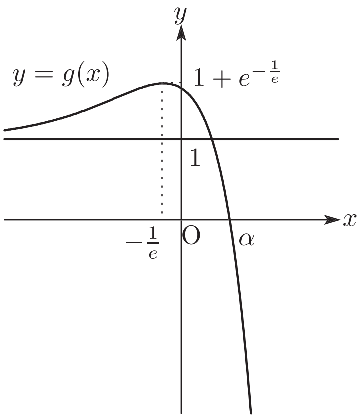
であり，これと (1) の結果より，$g(x)$ の増減表は以下のようになる．

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{e}$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | / | $+$ | $0$ | $-$ | / |
| $g(x)$ | $+1$ | $\nearrow$ | $1+e^{-\frac{1}{e}}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

よって，方程式 $g(x)=0$ は $x>-\dfrac{1}{e}$ にただ1つ実数解をもつ．この実数解を $x=\alpha$ とおくと

$$x<\alpha\text{では}\quad g(x)>0\text{すなわち}\quad f'(x)>0$$
$$\alpha<x\text{では}\quad g(x)<0\text{すなわち}\quad f'(x)<0$$

であるから，関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる．




| $x$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ |

したがって, $f(x)$ は $x=\alpha$ において, ただ1つの極大値をもつ． 〔証明終〕

≪注≫ 方程式 $g(x)=0$ は実数解をただ1つだけもち

$$g(1)=1-e^0+e-1\cdot e=0$$

であるから，$\alpha$ の値は1である．

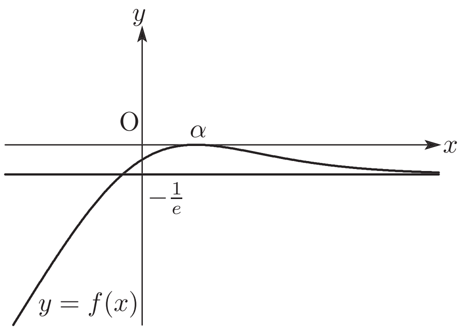
よって，$f(x)$ の極大値は

$$f(1)=\frac{1-e^0}{1+e}=0$$

となり，また

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-e^{x-1}}{1+e^x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-e^{x-1}}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e}}{\frac{1}{e^x}+1}=-\frac{1}{e}$$

より，$f(x)$ のグラフは下図のようになる．



## 添削課題

【1】(1) $f(x)=\dfrac{x-a}{x^2+x+1}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+x+1)-(x-a)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+2ax+a+1}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

(2) $f(x)$ は任意の $x$ に対し微分可能であるから，$x=-1$ で極値をとるとき

$$f'(-1)=\frac{-1-2a+a+1}{(1-1+1)^2}=-a=0$$

$$\therefore\quad a=0$$

(3) $a=0$ より

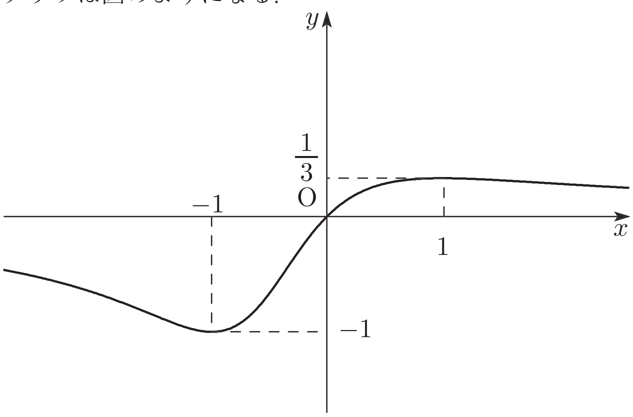
$$f(x)=\frac{x}{x^2+x+1},\ f'(x)=-\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

よって，増減表は以下のようになる．

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{3}$ | $\searrow$ | $+0$ |

$$\left(\because\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+x+1}=-0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+x+1}=+0\right)$$

より，求めるグラフは図のようになる．




≪注≫ (2) では，十分性をチェックしなければならないが，(3) で増減表を描いて極値を調べているので，ここでは省略した．

M2JC

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

| 会員番号 | |
|---|---|

| 氏　名 | |
|---|---|