M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

本科 2 期 10 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

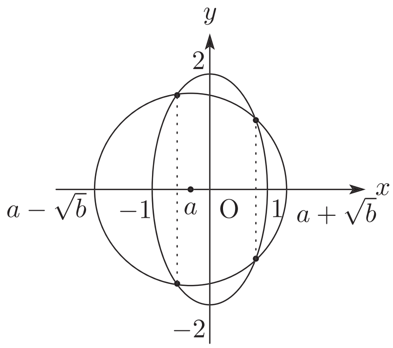
東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

問題

【1】
$$\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{4}=1 & \cdots\cdots① \\ (x-a)^2+y^2=b & \cdots\cdots② \end{cases}$$



①, ② はともに x 軸対称の図形で，また，4 つの交点をもつことから

$-1<x<1$

である．

①, ② より，y を消去すると

$$4x^2+b-(x-a)^2=4$$

$$\iff 3x^2+2ax-a^2+b-4=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

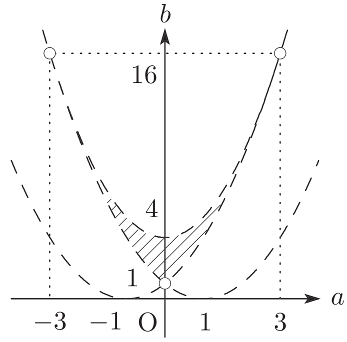
この x の 2 次方程式 $(*)$ が $-1<x<1$ の範囲に相異なる 2 つの実数解をもつ条件を求めればよく

$$f(x)=3x^2+2ax-a^2+b-4=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{4}{3}a^2+b-4$$

とおくと，条件は

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{3}a^2+b-4<0 \\ -1<-\dfrac{a}{3}<1 \\ f(1)=-a^2+2a+b-1>0 \\ f(-1)=-a^2-2a+b-1>0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b<\dfrac{4}{3}a^2+4 \\ -3<a<3 \\ b>(a-1)^2 \\ b>(a+1)^2 \end{cases}$$



よって，求める領域は図の斜線部のようになる (ただし，境界上の点は含まない).

【2】(1) $\triangle$ OPQ が鋭角三角形となるための条件は

$\angle$POQ が鋭角　かつ　$\angle$OPQ が鋭角

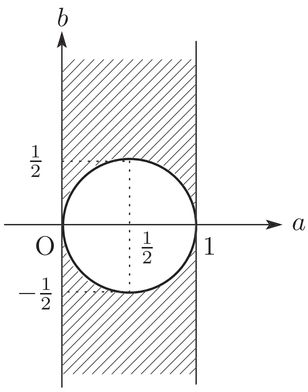
かつ　$\angle$OQP が鋭角

となることで，a, b の条件は順に

$$\begin{cases} a>0 \\ a<1 \\ a(a-1)+b^2>0 \\ \qquad (\because\ \text{OP を直径とする円の外部}) \end{cases}$$

整理して

$$\begin{cases} 0<a<1 \\ \left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2>\dfrac{1}{4} \end{cases}$$



よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は図の斜線部のようになる (ただし，境界は含まない).

(2) $$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2$$
$$\geqq (m+na)^2-(m+na)+n^2a(1-a) \qquad \left(\because \quad (1)\text{ より，}b^2>a(1-a)\right)$$
$$=(2m+n-1)na+m(m-1)$$

いま

$f(a)=(2m+n-1)na+m(m-1)$

とおくと，連続する 2 整数の積は 0 または正の値になることから

$f(0)=m(m-1)\geqq 0$

$f(1)=(m+n)(m+n-1)\geqq 0$

また，$f(a)$ は a の 1 次関数または定数関数であることより，$0<a<1$ において

$f(a)\geqq 0$

したがって

$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2\geqq 0$ 〔証明終〕

【3】 基準点 O をとり

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}\cdot\vec{v}=x_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

とおく．$k\neq m$ なら，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}\neq 0$ なので，このとき

$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_m}\cdot\vec{v}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}\cdot\vec{v}=x_m-x_k\neq 0$

よって

$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$

は互いに異なる実数の集合である．したがって，その要素の中で最大のものがただ一つ存在する．それを x_l とする．

このとき，$l\neq m$ なら $x_m-x_l<0$ である．つまり

$x_m-x_l=\overrightarrow{\mathrm{P}_l\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}<0$

であり，P_l が題意をみたす点である． 〔証明終〕

【4】 (1) 各辺の長さは直径以下だから

$\mathrm{CA}^2\leqq 4$

となるので，条件より

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8 \iff \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2>8-2\mathrm{CA}^2\geqq 0$$

$\therefore\ \ \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2>\mathrm{CA}^2$

これより，$\triangle$ ABC の内角をそれぞれ，$A,\ B,\ C$ とすると

$B<90^\circ$

同様にして

$A<90^\circ,\ C<90^\circ$

となるので，$\triangle$ ABC は鋭角三角形である． 〔証明終〕

(2) $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 8$ のときは成立するから，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$ の場合を考えればよい．

$\triangle$ ABC は半径 1 の円に内接しているから，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin C} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin B} = 2$$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 &= 4\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right) \\
&= 2\left\{2\sin^2 A + (1 - \cos 2B) + (1 - \cos 2C)\right\} \\
&= 2\left\{2\sin^2 A + 2 - (\cos 2B + \cos 2C)\right\} \\
&= 2\left\{2\sin^2 A + 2 - 2\cos(B + C)\cos(B - C)\right\} \\
&= 2\left\{2\sin^2 A + 2 - 2\cos(180^\circ - A)\cos(B - C)\right\} \\
&= 2\left\{2\sin^2 A + 2 + 2\cos A\cos(B - C)\right\}
\end{aligned}$$

(1) より，$\triangle$ ABC は鋭角三角形であるから

$$\cos A > 0, \quad 0 < \cos(B - C) < 1 \qquad (\because \quad -90^\circ < B - C < 90^\circ)$$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 &= 2\left\{2\sin^2 A + 2 + 2\cos A\cos(B - C)\right\} \\
&\leqq 2\left(2\sin^2 A + 2 + 2\cos A\right) \\
&= 2\left\{2(1 - \cos^2 A) + 2 + 2\cos A\right\} \\
&= -(2\cos A - 1)^2 + 9 \\
&\leqq 9 \qquad \text{〔証明終〕}
\end{aligned}$$

また，等号が成立するのは

$$\cos(B - C) = 1 \quad \text{かつ} \quad \cos A = \frac{1}{2}$$

すなわち，$A = B = C = 60^\circ$ のときであるから

　$\triangle$ ABCが正三角形　　(答)

のときである．

＜別解 1＞

辺 BC の中点を M とすると，中線定理より

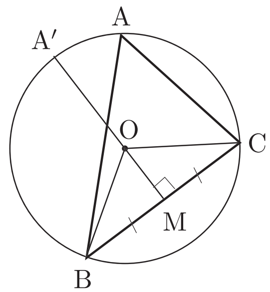
$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2) + (2\mathrm{BM})^2 = 2\mathrm{AM}^2 + 6\mathrm{BM}^2 \quad \cdots\cdots①$$

ここで，円の中心を O とし，直線 MO と優弧 BC との交点を A′ とすると

$$2\mathrm{AM}^2 + 6\mathrm{BM}^2 \leqq 2\mathrm{A'M}^2 + 6\mathrm{BM}^2 \quad \cdots\cdots②$$

であり

$$\begin{aligned}
2\mathrm{A'M}^2 + 6\mathrm{BM}^2 &= 2(1 + \mathrm{OM})^2 + 6(1 - \mathrm{OM}^2) \qquad (\because \quad \mathrm{A'M} \perp \mathrm{BC}) \\
&= -4\mathrm{OM}^2 + 4\mathrm{OM} + 8 \\
&= -4\left(\mathrm{OM} - \frac{1}{2}\right)^2 + 9 \leqq 9
\end{aligned}$$



となるので，①，② より

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 \leqq 9 \qquad \text{〔証明終〕}$$

また，等号が成り立つのは

$$\mathrm{A} = \mathrm{A'} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{OM} = \frac{1}{2}$$

のときであり

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{BM}^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$\therefore\quad \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}\ \left(=\sqrt{3}\right)$

すなわち

　$\triangle$ ABCが正三角形　　(答)

のときである．

＜別解 2 ＞

中心を O とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1\quad\cdots\cdots(\star)$$

である．また

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2\\&=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2+\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{c}\right|^2\\&=2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\\&=6-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\quad\cdots\cdots(*)\qquad(\because\ (\star))\end{aligned}$$

(1) 条件より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8\quad&\Longleftrightarrow\quad 6-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)>8\qquad(\because\ (*))\\&\Longleftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}<-1\quad\cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\\&=\vec{b}\cdot\vec{c}-\left(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+1\qquad(\because\ (\star))\\&>\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(\vec{b}\cdot\vec{c}+1\right)+1\qquad(\because\ (**))\\&=2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\\&=2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2\qquad(\because\ (\star))\\&=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|^2\\&\geqq 0\end{aligned}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}>0,\ \text{すなわち},\ A\ \text{は鋭角}$$

同様に，$B,\ C$ も鋭角であり，$\triangle$ ABC は鋭角三角形である．　〔証明終〕

(2)

$$\begin{aligned}&9-\left(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\right)\\&=9-\left\{6-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\right\}\qquad(\because\ (*))\\&=3+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\\&=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\qquad(\because\ (\star))\\&=\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2\\&\geqq 0\end{aligned}$$

等号成立は

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \iff \vec{c}=-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$

より，O が△ ABC の重心であり，同時に外心でもあるので

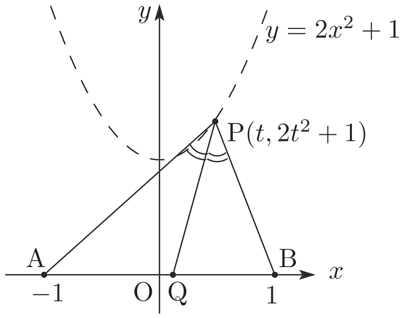
△ ABC が正三角形　　(答)

のときである．

問題

【1】$\angle \mathrm{APQ}=\angle \mathrm{BPQ}$ だから

$$\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{AQ}}=\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}}$$



よって

$$\left(\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{AQ}}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}}\right)^2$$
$$=\frac{(t-1)^2+(2t^2+1)^2}{(t+1)^2+(2t^2+1)^2}$$
$$=1-\frac{4t}{4t^4+5t^2+2t+2}$$

であり，これを $f(t)$ とおくと

$$f'(t)=-4\cdot\frac{4t^4+5t^2+2t+2-t(16t^3+10t+2)}{(4t^4+5t^2+2t+2)^2}$$
$$=4\cdot\frac{12t^4+5t^2-2}{(4t^4+5t^2+2t+2)^2}$$
$$=\frac{4(4t^2-1)(3t^2+2)}{(4t^4+5t^2+2t+2)^2}$$

これより，$f(t)$ の増減は下のようになる．

t		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

そして

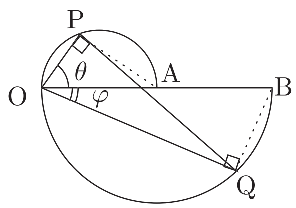
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{5},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9},\ \lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}f(t)=1$$

だから，$\dfrac{\mathrm{QB}}{\mathrm{AQ}}$ の

最大値は $\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{5}}}$，最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$　　(答)

【2】(1)

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OA}\cos\theta=\cos\theta$$
$$\mathrm{OQ}=\mathrm{OB}\cos\varphi=2\cos\varphi$$



であるから，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\sin(\theta+\varphi)$$
$$=\boldsymbol{\cos\theta\cos\varphi\sin(\theta+\varphi)}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より

$$S=\frac{1}{2}\{\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)\}\sin(\theta+\varphi)$$

$\theta+\varphi$ を $0<\theta+\varphi<\pi$ の範囲で固定し $\theta+\varphi=t$ とおくと,

$\sin t>0,\ -t<\theta-\varphi<t$

であるから, S は $\theta=\varphi$ のとき最大値

$\dfrac{1}{2}(\cos t+1)\sin t=\dfrac{1}{2}(\sin t\cos t+\sin t)\cdots\cdots①$

をとる.

次に, t を $0<t<\pi$ の範囲で変化させる. ここで, ①を $f(t)$ とすると

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{1}{2}(\cos^2 t-\sin^2 t+\cos t)\\&=\frac{1}{2}(2\cos^2 t+\cos t-1)\\&=\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)(\cos t+1)\end{aligned}$$

したがって, $f(t)$ は表のように変化し,

$t=\dfrac{\pi}{3}\qquad\therefore\ \theta=\varphi=\dfrac{\pi}{6}$

のとき最大になる. ゆえに, S の最大値は,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{3}\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{8}}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(答)$$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

【3】 (1) i) $n=0,\ 1$ のとき

$f_0(x)=2,\ f_1(x)=x$

より,

$f_0(2\cos\theta)=2\cos(0\cdot\theta)=2,\ f_1(2\cos\theta)=2\cos(1\cdot\theta)=2\cos\theta$

よって, $n=0,\ 1$ のとき題意は成り立つ.

ii) $n=k,\ k+1$ のとき, 題意が成り立つとすると, 与えられた漸化式より,

$$\begin{aligned}f_{k+2}(2\cos\theta)&=2\cos\theta\cdot f_{k+1}(2\cos\theta)-f_k(2\cos\theta)\\&=2\cos\theta\cdot 2\cos(k+1)\theta-2\cos k\theta\\&=2\{\cos(k+2)\theta+\cos k\theta\}-2\cos k\theta\\&=2\cos(k+2)\theta\end{aligned}$$

よって, $n=k+2$ のときも題意は成り立つ.

以上, i), ii) より, 任意の $n(=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で題意は成り立つ. ［証明終］

(2) $|x|\leqq 2$ のとき, $x=2\cos\theta(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおける.

ここで, (1) より,

$$\begin{aligned}f_n(x)=0&\iff f_n(2\cos\theta)=0\\&\iff 2\cos n\theta=0\cdots\cdots①\end{aligned}$$

また, $0\leqq\theta\leqq\pi$ より

$0\leqq n\theta\leqq n\pi\cdots\cdots②$

に注意すると, $x=x_n$ のときの θ を θ_n とすれば, θ_n は①,②をみたす θ のうち最小のものなので,

$n\theta_n=\dfrac{\pi}{2}\qquad\therefore\quad\theta_n=\dfrac{\pi}{2n}$

$$\therefore \quad x_n = 2\cos\frac{\pi}{2n}$$

さらに，$x = 2\cos\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta \qquad \therefore \quad dx = -2\sin\theta d\theta$$

よって，

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{x_n}^{2} f_n(x)dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2n}}^{0} f_n(2\cos\theta)(-2\sin\theta d\theta) \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2n}} 2\cos n\theta \cdot 2\sin\theta d\theta \\
&= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2n}} \{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta\}d\theta \\
&= 2\left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2n}} \\
&= 2\left\{-\frac{1}{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right) - \frac{1}{n-1}\right\} \\
&= 2\left(\frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\sin\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n-1}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{n^2-1}\left(n\sin\frac{\pi}{2n} - 1\right)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2\int_{x_n}^{2} f_n(x)dx \\
=& \lim_{n\to\infty} n^2 I_n \\
=& \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{n^2-1}\left(n\sin\frac{\pi}{2n} - 1\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1-\frac{1}{n^2}}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
=& \frac{4}{1-0}\cdot\left(1\cdot\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
=& \boldsymbol{2(\pi-2)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

添削課題

【1】(1)

$$f_n{}'(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= -f_{n-1}(x) \qquad \text{〔証明終〕}$$

(2)

$$g_n(x) = f_n(x)e^x - 1$$

とすると

$$g_n{}'(x) = e^x\{f_n(x) + f_n{}'(x)\}$$
$$= e^x\{f_n(x) - f_{n-1}(x)\}$$
$$= \frac{(-1)^n x^n}{n!}e^x$$

であり，

(i) n が偶数のとき，$g_n{}'(x) \geqq 0$ となり

$$g_n(0) = f_n(0) - 1 = 0$$

だから

$$g_n(x) \geqq 0$$
$$\therefore f_n(x)e^x - 1 \geqq 0$$
$$\therefore f_n(x) \geqq e^{-x}$$

(ii) n が奇数のとき，$g_n'(x) \leqq 0$ となり，$g_n(0) = 0$ だから

$$g_n(x) \leqq 0$$
$$\therefore f_n(x) \leqq e^{-x} \qquad \text{〔証明終〕}$$

(3) (1) より

$$f_n{}'(x) = -f_{n-1}(x)$$

であり，n が奇数のとき $n-1$ は偶数だから

$$f_{n-1}(x) \geqq e^{-x} > 0$$
$$\therefore f_n{}'(x) = -f_{n-1}(x) < 0$$

となる．よって $f_n(x)$ は減少関数であり，また

$$f_n(0) > 0$$

さらに

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = -\infty$$

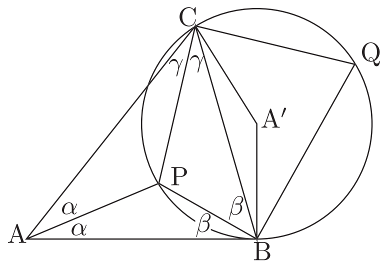
だから，題意は示された．　〔証明終〕

問題

【1】(i) P が△ ABC の内心であるとき

$A = 2\alpha,\ B = 2\beta,\ C = 2\gamma$ とおくと

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$$
$$\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PAC} = \alpha$$
$$\angle\mathrm{PBA} = \angle\mathrm{PBC} = \beta$$
$$\angle\mathrm{PCB} = \angle\mathrm{PCA} = \gamma$$



であり

$\angle\mathrm{BPC} = \pi - (\beta + \gamma)$

B，P，C は A′ を中心とする円周上の点であるから，

P がない方の弧 BC 上に点 Q をとると

$\angle\mathrm{BQC} = \pi - \angle\mathrm{BPC} = \beta + \gamma$　　$\therefore$　$\angle\mathrm{BA'C} = 2(\beta + \gamma)$

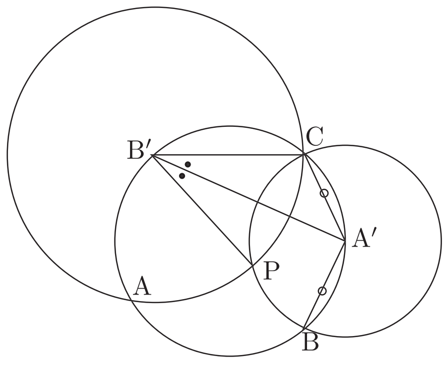
よって

$\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{BA'C} = 2\alpha + 2(\beta + \gamma) = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$

なので，A，B，C，A′ は同一円周上にある．B′，C′ についても同様である．

(ii) A，B，C，A′，B′，C′ が同一円周上にあるとき

C，P は A′，B′ を中心とする 2 円の交点なので



$\angle\mathrm{CB'A'} = \angle\mathrm{PB'A'}$

また，$\mathrm{A'C} = \mathrm{A'B}$ だから，円周角の定理より

$\angle\mathrm{BB'A'} = \angle\mathrm{CB'A'}$

したがって

$\angle\mathrm{PB'A'} = \angle\mathrm{BB'A'}$

であり，3 点 B，P，B′ は同一直線上にある．

同様にして，A，P，A′ は同一直線上，C，P，C′ は同一直線上にある．

さらに，$\mathrm{A'C} = \mathrm{A'B}$ だから，円周角の定理より

$\angle\mathrm{BAA'} = \angle\mathrm{CAA'}$

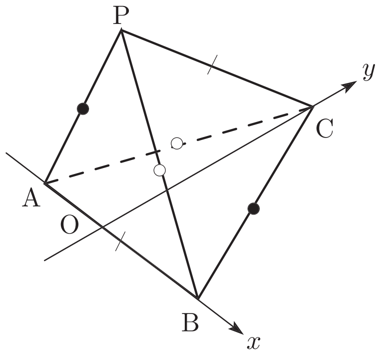
が成り立ち，AA′ は ∠BAC の二等分線である．

つまり，P は ∠BAC の二等分線上の点である．

同様に，P は ∠ABC，∠BCA の二等分線上の点なので，P は△ ABC の内心である．

(i)，(ii) より，A，B，C，A′，B′，C′ が同一円周上にあるための必要十分条件は，P が△ ABC の内心に一致することである．〔証明終〕

【2】 xyz 空間の中の xy 平面上に鋭角三角形 ABC を正の数 a, b, c を用いて, $\mathrm{A}(-a,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ c)$ とおく．鋭角三角形であるから



$$\begin{cases} (a+b)^2 < (a^2+c^2)+(b^2+c^2) \\ (a^2+c^2) < (a+b)^2+(b^2+c^2) \\ (b^2+c^2) < (a^2+c^2)+(a+b)^2 \end{cases}$$

$\therefore\quad ab < c^2 \quad \cdots\cdots ①$

点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ を $\triangle$ ABC を底辺とする求める四面体の第 4 の頂点とすると

$$\begin{cases} \mathrm{PA}=\mathrm{BC} \iff (x+a)^2+y^2+z^2=b^2+c^2 \quad \cdots\cdots ② \\ \mathrm{PB}=\mathrm{AC} \iff (x-b)^2+y^2+z^2=a^2+c^2 \quad \cdots\cdots ③ \\ \mathrm{PC}=\mathrm{AB} \iff x^2+(y-c)^2+z^2=(a+b)^2 \quad \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

② − ③ を整理して

$$2(a+b)x = 2(b^2-a^2) \qquad \therefore\quad x = b-a$$

これを，③，④ に代入して

$$\begin{cases} y^2+z^2=c^2 \\ (y-c)^2+z^2=4ab \end{cases}$$

$$\therefore\quad y = c-\frac{2ab}{c},\quad z^2=\frac{4ab}{c^2}(c^2-ab)$$

条件 ① から，$z^2>0$ なので，$z=\pm\sqrt{\dfrac{4ab}{c^2}(c^2-ab)}$ と定まる．

このとき，四面体 P − ABC において

$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{PCB}\equiv\triangle\mathrm{CPA}\equiv\triangle\mathrm{BAP}$

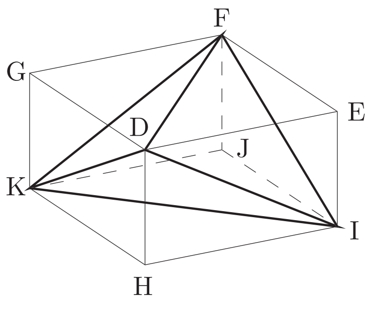
であり，題意をみたす四面体が存在する．　〔証明終〕

＜別解 1 ＞

$\triangle$ ABC の各頂点の対辺の長さを a, b, c とする．鋭角三角形なので

$$a^2+b^2>c^2,\quad b^2+c^2>a^2,\quad c^2+a^2>b^2$$

が成り立つ．そこで



$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},\quad y=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$$

$$z=\sqrt{\frac{c^2+a^2-b^2}{2}}$$

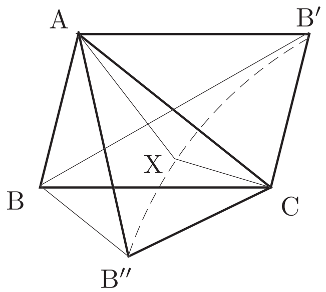
とおき，x, y, z を 3 辺の長さとする直方体 DEFG − HIJK を作ると，3 つの対角線の長さが

$$\sqrt{x^2+y^2}=b,\quad \sqrt{y^2+z^2}=c,\quad \sqrt{z^2+x^2}=a$$

となる．したがって，四面体 DFKI が題意をみたす四面体である．　〔証明終〕

＜別解 2 ＞

$\triangle$ ABC の各頂点の対辺の長さを a, b, c とする．$\triangle$ ABC に対して同じ平面上に図のように，$\triangle$ AB$'$C と $\triangle$ CB$''$A を $\triangle$ ABC と合同であるようにとる．



$\angle \mathrm{BCB}' = \theta$ とすると，$\angle \mathrm{ABC} < 90^\circ$ より

$$\begin{aligned}\theta &= \angle \mathrm{BCA} + \angle \mathrm{ACB}' \\ &= \angle \mathrm{BCA} + \angle \mathrm{CAB} \\ &= 180^\circ - \angle \mathrm{ABC} \\ &> 90^\circ\end{aligned}$$

$\therefore\quad \cos\theta < 0$

より

$$\mathrm{BB}'^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta > a^2 + c^2 > b^2$$

また，四角形 BB$''$CA は等脚台形で $\angle$CAB が鋭角より

$$\mathrm{BB}'' < \mathrm{AC} = b$$

そこで，点 X を，はじめは B$'$ の位置にあるものとし，$\triangle$ ABC のある平面から起こし，AC を軸に $\triangle$ AXC を回転して X が B$''$ の位置に来るまで動かすものとする．

このとき，線分 XB の長さは B$'$B から連続的に変化して B$''$B になる．ところが

$$\mathrm{B}'\mathrm{B} > b > \mathrm{B}''\mathrm{B}$$

であるから，中間値の定理により，途中で

$$\mathrm{XB} = b$$

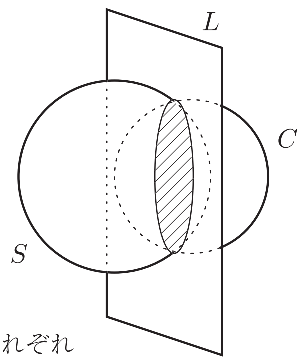
となる点 X = P が存在する．このとき，四面体 P − ABC において

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{PCB} \equiv \triangle \mathrm{CPA} \equiv \triangle \mathrm{BAP}$$

であり，題意をみたす四面体が存在した．　　〔証明終〕

【3】 点 P を定めると，z 軸を回転の軸として平面 L も点 P にともなって回転する．すなわち，点 Q, R も点 P の位置によって決定されるので，点 P が平面 $x = 0$ 上にあるときを考え，その領域を z 軸を中心に回転させた立体が V となる．

OP を直径とする球を C とする．



$x = 0$ 上に点 P があるときを考える．

$\mathrm{P}(0,\ a,\ b)$　(ただし，$a^2+b^2 > 1$　$\cdots\cdots$①)

とすると，球 S，球 C の平面 $x = 0$ 上のグラフはそれぞれ

円$S_0 : y^2 + z^2 = 1$

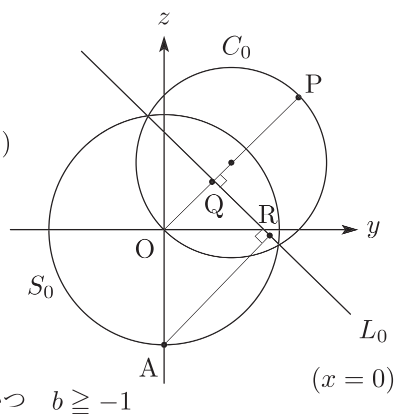
円$C_0 : \left(y - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{4}$

であり，同様に平面 L の平面 $x = 0$ 上のグラフは直線 L_0 であり，その方程式は

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{4} + (-1)\cdot\left(y^2 + z^2 - 1\right) = 0$$

$$\iff \quad ay + bz = 1$$

となる.



ここで

$$\mathrm{PQ} = \frac{|a^2+b^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2+b^2-1}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (\because \ ①)$$

$$\mathrm{AR} = \frac{|-b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|b+1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

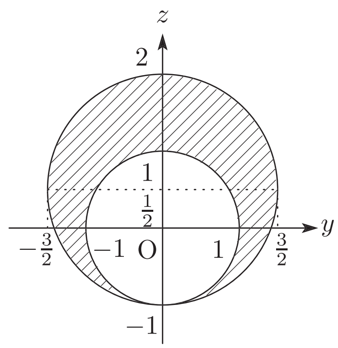
であるから

$$\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{AR} \iff \frac{a^2+b^2-1}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqq \frac{|b+1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq \dfrac{9}{4} \quad \text{かつ} \quad b \geqq -1 \\ \quad \text{または} \\ a^2 + \left(b + \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq \dfrac{1}{4} \quad \text{かつ} \quad b < -1 \end{cases}$$

$$\iff a^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{9}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

① かつ ② で表される yz 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の領域を表すと図の斜線部のようになる. その領域を z 軸を中心に回転させると, 半径 $\dfrac{3}{2}$ の球から半径 1 の球をのぞいたものになるから



$$V = \frac{4}{3}\pi\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1^3\right\}$$

$$= \frac{19}{6}\pi$$

$$< \frac{19}{6} \cdot 3.15$$

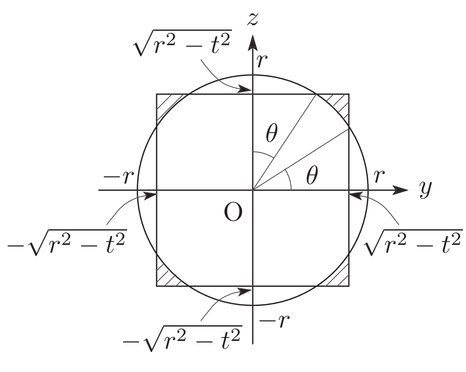
$$= 9.975$$

$$< 10$$ 〔証明終〕

【4】与えられた立体の平面 $x = t$ による立体の断面は, 連立方程式

$$\begin{cases} y^2 + z^2 \geqq r^2 \\ -\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2} \\ -\sqrt{r^2-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{r^2-t^2} \\ x = t \end{cases}$$

の定める図形で, これを yz 平面上に正射影すると, 右図の斜線部分のようになる.



いま, この図形が空集合とならない条件は

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{r^2-t^2} \geqq r \iff |t| \leqq \frac{r}{\sqrt{2}}$$

であり，このとき，実数 θ を

$$\sin\theta = \frac{|t|}{r},\quad 0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \left(\cos\theta = \frac{\sqrt{r^2-t^2}}{r}\right)$$

で定めると，断面積は

$$4\left\{\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}r^2\cos\theta\sin\theta - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$$

$$= 4\left(r^2-t^2-|t|\sqrt{r^2-t^2}\right) - r^2(\pi-4\theta)$$

となる．よって，求める体積は

$$4\int_{-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left(r^2-t^2-|t|\sqrt{r^2-t^2}\right)dt - r^2\int_{-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\frac{r}{\sqrt{2}}}(\pi-4\theta)dt$$

である．ここで

$$\begin{aligned}
4\int_{-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left(r^2-t^2-|t|\sqrt{r^2-t^2}\right)dt &= 8\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left(r^2-t^2-t\sqrt{r^2-t^2}\right)dt \\
&= 8\cdot\frac{r^3}{\sqrt{2}} - 8\left[\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}(r^2-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{12\sqrt{2}-8}{3}r^3
\end{aligned}$$

また，$|t| = r\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}
r^2\int_{-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\frac{r}{\sqrt{2}}}(\pi-4\theta)dt &= \sqrt{2}\pi r^3 - 8r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\cos\theta d\theta \\
&= \sqrt{2}\pi r^3 - 8r^3\Big[\theta\sin\theta+\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 4(2-\sqrt{2})r^3
\end{aligned}$$

となるので，求める体積は

$$\frac{12\sqrt{2}-8}{3}r^3 - 4(2-\sqrt{2})r^3 = \mathbf{8\left(\sqrt{2}-\frac{4}{3}\right)r^3} \qquad \text{(答)}$$

<別解>

$r=1$ として最後に r^3 倍すればよい．

立体 V_1，V_2 をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ z^2+x^2 \leqq 1 \end{cases},\qquad \begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ y^2+z^2 \leqq 1 \\ z^2+x^2 \leqq 1 \end{cases}$$

をみたす点全体からなる立体とし，V_1 の体積 v_1 から V_2 の体積 v_2 を引いた値を求める．

V_1 は，y，z について対称であるから

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ ……①

とし，2^3 等分して考える．

V_1 の ① をみたす部分の平面 $x=t$ (ただし，$0 \leqq t \leqq 1$) による立体の断面積 $S_1(t)$ は

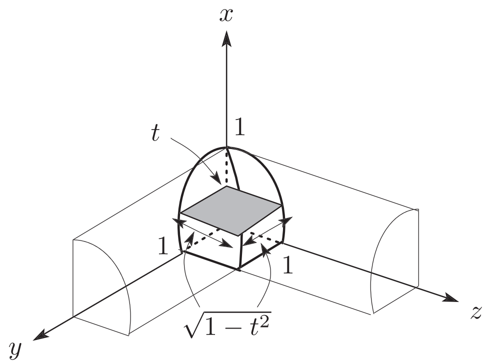
$$\begin{cases} 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-t^2} \\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{1-t^2} \\ x = t \end{cases}$$

より，1 辺の長さ $\sqrt{1-t^2}$ の正方形

であるから

$S_1(t) = 1 - t^2$

である．よって，① より



$$\begin{aligned} v_1 &= 2^3 \int_0^1 S_1(t)dt \\ &= 8\int_0^1 (1-t^2)dt \\ &= 8\left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

V_2 は x, y, z について対称であるから

$z \geqq y \geqq x \geqq 0 \quad \cdots\cdots$②

とし，$2^3 \cdot 3!$ 等分して考える．

V_2 の ② をみたす部分の平面 $z = t$ (ただし，$0 \leqq t \leqq 1$) による立体の断面積 $S_2(t)$ は

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-t^2} \\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{1-t^2} \\ 0 \leqq x \leqq y \leqq t \\ z = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき} \quad 0 \leqq x \leqq y \leqq t, \quad z = t \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1 \text{ のとき} \quad 0 \leqq x \leqq y \leqq \sqrt{1-t^2}, \quad z = t \end{cases}$$

より

$$S_2(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2 & \left(0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ \dfrac{1}{2}(1-t^2) & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1\right)\end{cases}$$

である．よって，② より

$$\begin{aligned}v_2&=2^3\cdot 3!\cdot\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2}t^2dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{1}{2}(1-t^2)dt\right\}\\&=2^2\cdot 3!\cdot\left\{\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\right\}\\&=24\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)\\&=8\left(2-\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

したがって

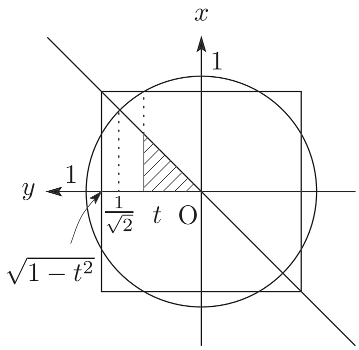
$$\begin{aligned}v_1-v_2&=\frac{16}{3}-8\left(2-\sqrt{2}\right)\\&=8\left(\sqrt{2}-\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

題意の立体とここで考えた立体の相似比は

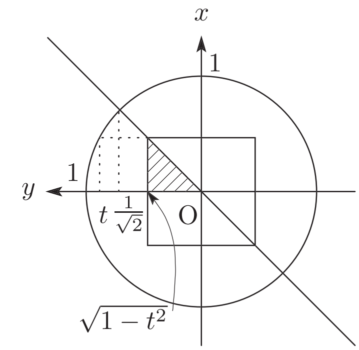
$r:1$ であるから

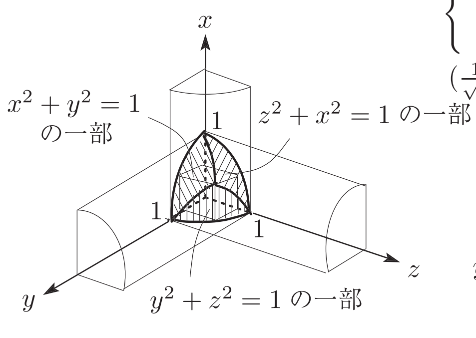
$$r^3(v_1-v_2)=\boldsymbol{8\left(\sqrt{2}-\frac{4}{3}\right)r^3}\qquad\text{(答)}$$

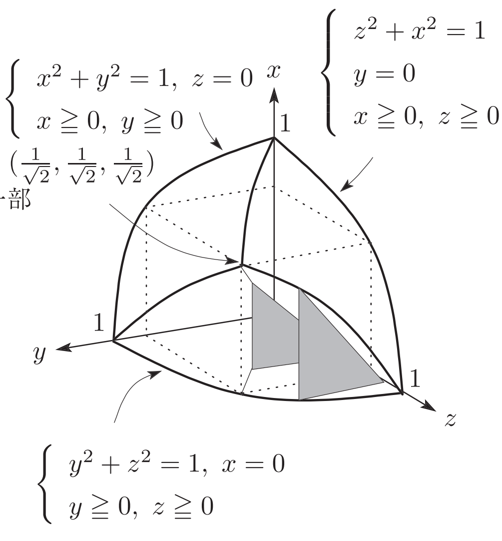
(i) $0\leqq t\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき



(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1$ のとき







問題

【1】(1) $g(x)=f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)$

とおくと，

$g'(x)=f'(x)-f'(p)$

であり，平均値の定理より，$x \fallingdotseq p$ のとき

$\dfrac{f'(x)-f'(p)}{x-p}=f''(c)$,　($c$ は p と x の間の実数)

となる c が存在する．

よって，

$g'(x)=f''(c)(x-p)$

と表せる．（これは $x=p$ でも成立）

ここで，$f''(c)>0$ だから $g(x)$ の増減表は下のようになるから

$g(x) \geqq 0$

$\therefore$　$f(x) \geqq f(p)+f'(p)(x-p)$　〔証明終〕

x		p	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(2) (1) の結果より，

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geqq \sum_{k=1}^{n}\{f(p)+f'(p)(x_k-p)\}$$

$$=nf(p)+f'(p)\sum_{k=1}^{n} x_k-nf'(p)p$$

$$=nf(p)+f'(p)\sum_{k=1}^{n} x_k-nf'(p)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$=nf(p)$$

等号は $x_k=p$ のとき，すなわち

$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$

のとき成立．　〔証明終〕

(3) $f(x)=e^x$ とすると，$f''(x)>0$ だから，(2) より

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)=\frac{1}{n}(e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots\cdots+e^{x_n})$$

$$\geqq f(p)=f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)=e^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$e^{x_k}>0$ だから，$e^{x_k}=a_k$ とすると

① の左辺は

$\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$

① の右辺は

$\sqrt[n]{e^{x_1}\cdot e^{x_2}\cdots\cdots\cdots e^{x_n}}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots\cdots\cdots a_n}$

よって

$\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n) \geqq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots\cdots\cdots a_n}$

であり，等号成立は

$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n$

のときである．　〔証明終〕

【2】 $b,\ c$ を固定し，a を変数とみて

$f(x) = 2^{c-1}(x^c + b^c) - (x+b)^c \ (x > 0)$

とおくと

$f'(x) = c\{(2x)^{c-1} - (x+b)^{c-1}\}$

ここで $c > 1$ だから，$f'(x)$ の符号は

$2x - (x+b)$ すなわち $x - b$

の符号と一致する．

よって，$f(x)$ の増減は下のようになり

x	0		b	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(x) \geqq f(b) = 2^{c-1} \cdot 2b^c - (2b)^c = 0$

よって

$f(a) = 2^{c-1}(a^c + b^c) - (a+b)^c \geqq 0$ (等号成立は $a = b$)

であり，題意は示された．　〔証明終〕

【3】 両辺を $\sqrt{2x+y}$ で割ると

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}} \leqq k \iff \frac{1+\sqrt{\dfrac{y}{x}}}{\sqrt{2+\dfrac{y}{x}}} \leqq k$$

であり，$\dfrac{y}{x} = t \ (t > 0)$ とすると

$$\frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{2+t}} \leqq k \cdots\cdots ①$$

であるから，$t > 0$ のすべての t に対して，①が成り立つような k の最小値を求めればよい．

ここで

$$f(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{2+t}}$$

とすると

$$f'(t) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\sqrt{2+t} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+t}}(1+\sqrt{t})}{2+t}$$

$$= \frac{2+t-\sqrt{t}-t}{2(2+t)\sqrt{t(2+t)}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{t}}{2(2+t)\sqrt{t(2+t)}}$$

よって，$f(t)$ の増減は下のようになるので

t	0		4	
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(t)$ は $t=4$ で極大かつ最大となり

$$f(4) = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

だから，求める k の最小値は

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【4】$a^x \geqq ax$ の両辺を e を底とする対数をとると

$$x\log a \geqq \log a + \log x \iff (x-1)\log a \geqq \log x$$

これより，$0<x<1$ のとき

$$\log a \leqq \frac{\log x}{x-1}$$

$x>1$ のとき

$$\log a \geqq \frac{\log x}{x-1}$$

また，$x=1$ のときには与えられた不等式は成り立つ.

ここで

$$f(x) = \frac{\log x}{x-1}$$

とおくと

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1)-\log x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}\left(1-\frac{1}{x}-\log x\right)$$

であり，$(x-1)^2>0$ だから $f'(x)$ の符号は

$$1-\frac{1}{x}-\log x$$

の符号と一致する.

ここで

$$g(x) = 1-\frac{1}{x}-\log x$$

とすると

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$$

だから，$g(x)$ の増減は下のようになり

x	0		1	
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$g(x)$ は $x=1$ で極大かつ最大となる.

そして，$g(1)=0$ だから，$x \fallingdotseq 1$ では $g(x)<0$ であり，これより $f'(x)<0$ である.

よって，$f(x)$ は減少し，また

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\log x - \log 1}{x - 1} = 1$$

だから

$0 < x < 1$ では $f(x) > 1$，　$x > 1$ では $f(x) < 1$

よって $0 < x < 1$ でつねに $\log a \leqq \dfrac{\log x}{x-1}$ となるには

$\log a \leqq 1$　　　$\therefore$　$a \leqq e$

$x > 1$ でつねに $\log a \geqq \dfrac{\log x}{x-1}$ となるには

$\log a \geqq 1$　　　$\therefore$　$a \geqq e$

以上より，求める条件は

$a = \boldsymbol{e}$　　(答)

添削課題

【1】(1) 展開図を組み立てる.

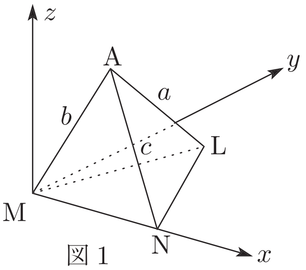


図 1

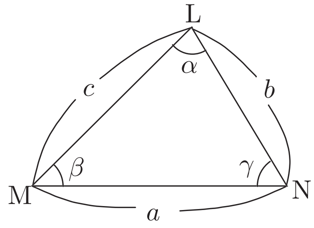


図 2

四面体 ALMN を構成する 4 つの三角形はすべて合同であるから

$\triangle\mathrm{LMN} \equiv \triangle\mathrm{MLA} \equiv \triangle\mathrm{NAL} \equiv \triangle\mathrm{ANM} \quad \cdots ①$

$\triangle\mathrm{LMN}$ の内角を図 2 のように $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると余弦定理が成立する.

$$\left.\begin{array}{l} 2bc\cos\alpha = b^2+c^2-a^2 \\ 2ca\cos\beta = c^2+a^2-b^2 \\ 2ab\cos\gamma = a^2+b^2-c^2 \end{array}\right\} \quad \cdots ②$$

この四面体 ALMN の M(0, 0, 0), N(a, 0, 0), L を xy 平面内にとり, L($c\cos\beta$, $c\sin\beta$, 0) とし, A を z 軸方向正の部分にとる.

$\overline{\mathrm{AL}}=a,\ \overline{\mathrm{AM}}=b,\ \overline{\mathrm{AN}}=c$ となるので, A(l, m, n) $(0<l,\ m,\ n)$ とおくと

$$\begin{cases} (l-c\cos\beta)^2+(m-c\sin\beta)^2+n^2=a^2 & \cdots ③ \\ l^2+m^2+n^2=b^2 & \cdots ④ \\ (l-a)^2+m^2+n^2=c^2 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

図 1 より, 明らかに

$l=b\cos\gamma \quad \cdots ⑥$

①より

$$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PL}},\quad \overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{QL}}=\frac{a}{2}$$

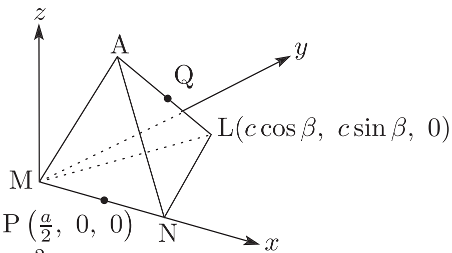


図 3

$\triangle\mathrm{APL}$ は二等辺三角形であるから

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{PQ}}^2 &= \overline{\mathrm{PL}}^2-\overline{\mathrm{QL}}^2 \\ &= \left(c\cos\beta-\frac{a}{2}\right)^2+c^2\sin^2\beta-\frac{a^2}{4} \\ &= c^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-ac\cos\beta \ = \ c(c-a\cos\beta) \\ &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \quad (\because ②) \end{aligned}$$

よって

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 四面体 ALMN の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\cdot n\cdot\triangle\mathrm{LMN}=\frac{1}{6}can\sin\beta \qquad \therefore\ 6V=can\sin\beta \quad \cdots ⑦$$

ここで

$$③ \iff l^2+m^2+n^2-2c(l\cos\beta+m\sin\beta)+c^2=a^2$$

④を代入して

$$2c(l\cos\beta+m\sin\beta)=b^2+c^2-a^2$$

右辺に②を代入して

$$2c(l\cos\beta+m\sin\beta)=2bc\cos\alpha$$
$$\therefore\quad l\cos\beta+m\sin\beta=b\cos\alpha$$

⑥を代入して

$$m\sin\beta=b(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)\quad\cdots⑧$$

④の両辺に $\sin^2\beta$ をかけて

$$l^2\sin^2\beta+m^2\sin^2\beta+n^2\sin^2\beta=b^2\sin^2\beta$$

これに，⑥，⑧を代入して

$$\begin{aligned}
n^2\sin^2\beta&=b^2\sin^2\beta-b^2\cos^2\gamma\sin^2\beta-b^2(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2\\
&=b^2\{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma-(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2\}\\
&=b^2(\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)(\sin\beta\sin\gamma-\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)\\
&=b^2\{\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)\}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha\}\\
&=2b^2\cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\}\\
&\qquad(\because \alpha+\beta+\gamma=180^\circ\text{より，}\cos(\beta+\gamma)=-\cos\alpha)\\
&=4b^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\quad\cdots⑨
\end{aligned}$$

⑦より

$$\begin{aligned}
36V^2&=c^2a^2n^2\sin^2\beta\\
&=4a^2b^2c^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\quad(\because ⑨)\\
&=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)\quad(\because ②)
\end{aligned}$$

以上より

$$V=\boldsymbol{\frac{1}{12}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}}\qquad\text{(答)}$$

１９章－１　図形（３）

問題

【1】点 P が球面 S に存在するのは，$x^2+y^2+z^2=1,\ x \geqq \dfrac{1}{k},\ y \geqq \dfrac{1}{k},\ z \geqq \dfrac{1}{k}$ より

$$1 = x^2+y^2+z^2 \geqq 3\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^2 \qquad \therefore\ \ k^2 \geqq 3$$

であるから，$k > \sqrt{3}$ のとき，点 P は球面 S 上に存在し，これにともなって点 Q は xy 平面上に存在する．

3 点 A, P, Q がこの順で一直線上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}u\\v\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}tu\\tv\\1-t\end{pmatrix} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

より

$\mathrm{P}(tu,\ tv,\ 1-t)$

と表される．P が $x^2+y^2+z^2=1$ 上の点であるから

$$\begin{aligned}(tu)^2+(tv)^2+(1-t)^2=1 \quad &\iff \quad t\left\{(u^2+v^2+1)t-2\right\}=0\\ &\iff \quad t=0,\ \frac{2}{u^2+v^2+1}\end{aligned}$$

ここで，$t=0$ のとき，$\mathrm{P}(0,\,0,\,1)$ となり，$\mathrm{P} \neq \mathrm{A}$ であるから，$t=0$ は不適．

したがって

$$t = \frac{2}{u^2+v^2+1}\ (\neq 0)$$

である．これより

$$\mathrm{P}\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ \frac{2v}{u^2+v^2+1},\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

と表されて，$x \geqq \dfrac{1}{k},\ y \geqq \dfrac{1}{k},\ z \geqq \dfrac{1}{k}$ をみたすので

$$\begin{cases}\dfrac{2u}{u^2+v^2+1} \geqq \dfrac{1}{k} \quad \iff \quad (u-k)^2+v^2 \leqq k^2-1 \quad \cdots\cdots ① \\ \dfrac{2v}{u^2+v^2+1} \geqq \dfrac{1}{k} \quad \iff \quad u^2+(v-k)^2 \leqq k^2-1 \quad \cdots\cdots ② \\ \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \geqq \dfrac{1}{k} \quad \iff \quad u^2+v^2 \geqq \dfrac{k+1}{k-1} \quad (\because\ \ k>\sqrt{3}) \quad \cdots\cdots ③\end{cases}$$

である．

$k>\sqrt{3}$ より，①, ②, ③ の境界は円であり，

$$\begin{cases}C_1 : (u-k)^2+v^2 = k^2-1\\ C_2 : u^2+(v-k)^2 = k^2-1\\ C_3 : u^2+v^2 = \dfrac{k+1}{k-1}\end{cases}$$

とする．

C_1 と C_2 は第 1 象限では

$$\mathrm{B}\left(\frac{k+\sqrt{k^2-2}}{2},\ \frac{k+\sqrt{k^2-2}}{2}\right),\ \left(\frac{k-\sqrt{k^2-2}}{2},\ \frac{k-\sqrt{k^2-2}}{2}\right)$$

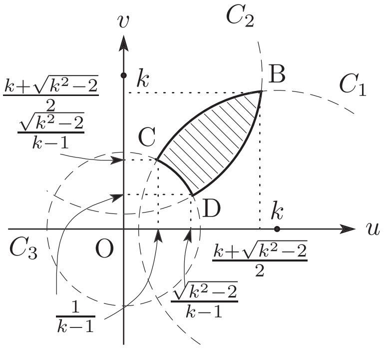
の 2 点で交わる．

C_1，C_2 と C_3 は第 1 象限ではそれぞれ

$$\mathrm{C}\left(\frac{1}{k-1},\ \frac{\sqrt{k^2-2}}{k-1}\right),\quad \mathrm{D}\left(\frac{\sqrt{k^2-2}}{k-1},\ \frac{1}{k-1}\right)$$

で交わる．

① かつ ② かつ ③ をみたす領域であるから，図の斜線部のようになる（ただし，境界を含む）．　　　(答)



【2】(1) 1 辺の長さが 1 の正八面体は，1 辺の長さが 2 の正四面体から 4 つの頂点のそれぞれを 1 つの頂点とする 1 辺の長さが 1 の正四面体を 4 個除いて得られる．

したがって，正八面体の 1 つの面の重心と平行な他の面の重心を結ぶ直線はこの面に直交しており，この八面体を真上から見た場合，この直線は 1 点になる．その図は右図 2 のようになる．　　　(答)

図 1

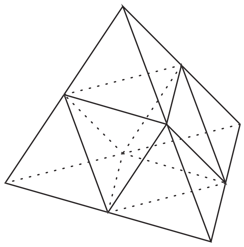
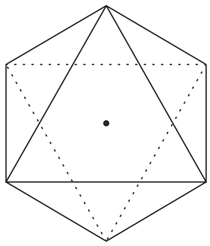


図 2



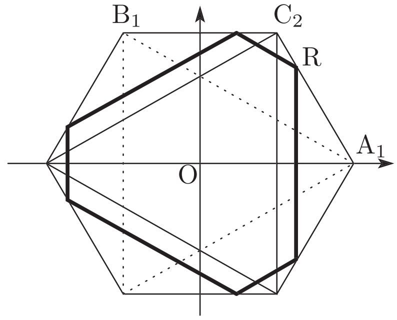
(2) 重心 G_1 を原点 O に，G_2 を z 軸の正の部分にとる．1 辺の長さが 1 の正三角形の高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で，外接円の半径はその $\dfrac{2}{3}$ の $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である．したがって，G_1 を含む面の 2 頂点 A_1，B_1 を

$$\overrightarrow{OA_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)$$

$$\overrightarrow{OB_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi,\ 0\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

にとることができる．$G_2(0,\ 0,\ g)$ とすると，$G_2A_1=1$ より

$$\frac{1}{3}+g^2=1 \qquad \therefore \quad g=\frac{\sqrt{6}}{3}$$



この正八面体を $\mathrm{G_1G_2}$ を $t:(1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に内分する点 $\mathrm{P}\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}t\right)$ を通り z 軸に平行な平面で切断する．断面は正八面体の対応する辺と平行な，右図の太線のような六角形になる．

B_1 との対称性から $\mathrm{C}_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ にとり，この面と $\mathrm{A_1C_2}$ の交点を R とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}t,\ \frac{1}{2}t,\ \frac{\sqrt{6}}{3}t\right)$$

$\mathrm{G_1G_2}$ を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転させてできる立体のこの面での断面は，PR を半径とする円とその内部であり，その面積 $S(t)$ は

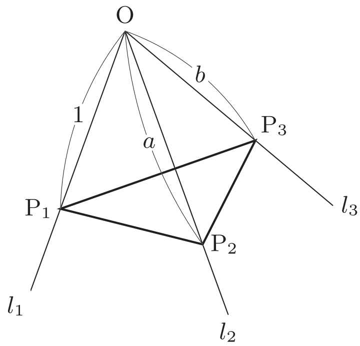
$$S(t)=\pi\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}t\right)^2+\frac{1}{4}t^2\right\}=\frac{\pi}{3}(1-t+t^2)$$

体積 V は $V=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}S(t)\,dz$ で与えられる．$z=\dfrac{\sqrt{6}}{3}t$ なので

$$V=\frac{\sqrt{6}}{9}\pi\int_0^1(1-t+t^2)\,dt=\frac{\sqrt{6}}{9}\pi\left[t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{6}}{54}\pi} \qquad \text{(答)}$$

【3】簡単のため，$\mathrm{OP_1}=1$ とし，$\mathrm{OP_2}=a$，$\mathrm{OP_3}=b$ $(a,\ b>0)$ とおく．$\triangle\,\mathrm{OP_1P_2}$，$\triangle\,\mathrm{OP_2P_3}$，$\triangle\,\mathrm{OP_3P_1}$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{P_1P_2}^2&=\mathrm{OP_1}^2+\mathrm{OP_2}^2-2\cdot\mathrm{OP_1}\cdot\mathrm{OP_2}\cos\frac{\pi}{3}\\&=a^2-a+1\\ \mathrm{P_2P_3}^2&=\mathrm{OP_2}^2+\mathrm{OP_3}^2-2\cdot\mathrm{OP_2}\cdot\mathrm{OP_3}\cos\theta\\&=a^2+b^2-2ab\cos\theta\\ \mathrm{P_3P_1}^2&=\mathrm{OP_3}^2+\mathrm{OP_1}^2-2\cdot\mathrm{OP_3}\cdot\mathrm{OP_1}\cos\frac{\pi}{3}\\&=b^2-b+1\end{aligned}$$



$\mathrm{P_1P_2}=\mathrm{P_3P_1}$ より

$$a^2-a+1=b^2-b+1$$

$$a^2-b^2-a+b=0$$

$$(a-b)(a+b-1)=0$$

$$\therefore \quad a=b,\ a+b=1$$

(Ⅰ) $a=b$ のとき，$\mathrm{P_1P_2}=\mathrm{P_2P_3}$ から

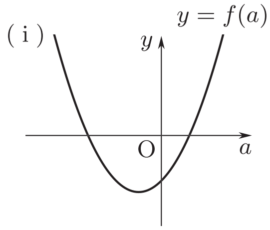
$$a^2-a+1=a^2+a^2-2a^2\cos\theta$$

$$(1-2\cos\theta)a^2+a-1=0$$

$f(a)=(1-2\cos\theta)a^2+a-1$ とおき，$f(a)=0$ が $a>0$ で解をもつときを考える．

$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$ に注意して，$1-2\cos\theta$ の符号で場合分けする．

(ⅰ) $1-2\cos\theta>0$ すなわち $-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<\dfrac{1}{2}$ のとき

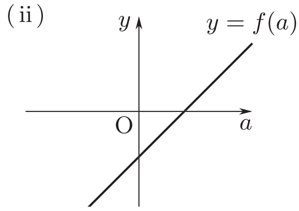


$$f(a)=(1-2\cos\theta)\left\{a+\frac{1}{2(1-2\cos\theta)}\right\}^2-\frac{1}{4(1-2\cos\theta)}-1$$

軸は $x=-\dfrac{1}{2(1-2\cos\theta)}$ (<0) であり，かつ $f(0)=-1<0$ より $f(a)=0$ は $a>0$ で解をもつ．

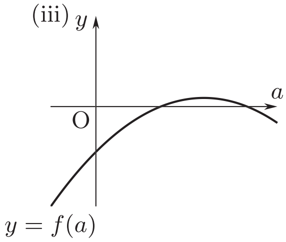
(ⅱ) $1-2\cos\theta=0$ すなわち $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき

$a-1=0$ は解 $a=1$ (>0) をもつ．



(ⅲ) $1-2\cos\theta<0$ すなわち $\dfrac{1}{2}<\cos\theta<1$ のとき

軸は $x=-\dfrac{1}{2(1-2\cos\theta)}$ (>0) であり，かつ $f(0)=-1<0$ より $f(a)=0$ が $a>0$ で解をもつ条件は，頂点が $y\geqq0$ の範囲に存在することなので



$$-\frac{1}{4(1-2\cos\theta)}-1\geqq0$$

$$4(1-2\cos\theta)\geqq-1$$

$$\therefore\quad \cos\theta\leqq\frac{5}{8}$$

(ⅰ)〜(ⅲ) より，求める条件は

$$-\frac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\frac{5}{8}$$

(II) $a+b=1$ のとき，$\mathrm{P_1P_2}=\mathrm{P_2P_3}$ から

$$a^2-a+1=a^2+(1-a)^2-2a(1-a)\cos\theta$$

$$a^2-a-2a(1-a)\cos\theta=0$$

$$a(a-1)(1+2\cos\theta)=0$$

$a+b=1$，$a>0$，$b>0$ より $a(a-1)\neq0$ なので

$$1+2\cos\theta=0\qquad\therefore\quad\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

これは $-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$ をみたす．

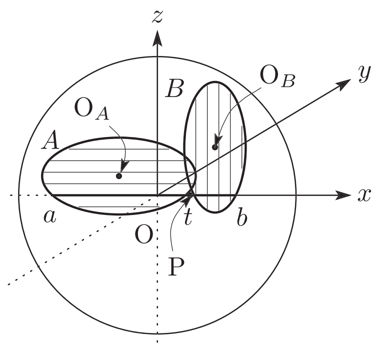
(I)，(II) より

$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{5}{8}}$ （答）

【4】A, B の円の中心をそれぞれ，O_A，O_B とする．P は x 軸上の点であるから，A, B はともに x 軸と交わる．円板 A と x 軸，円板 B と x 軸との交わりをそれぞれ

線分 $a \leqq x \leqq t$,　　線分 $t \leqq x \leqq b$

とし，$t \geqq 0$ としても一般性を失わない．

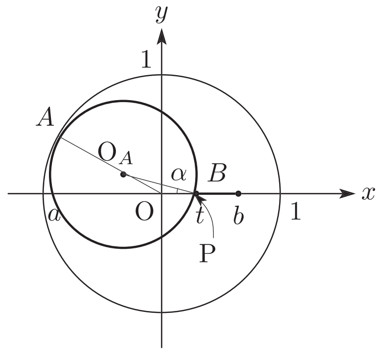


(i) $t = 1$ のとき

$\mathrm{O}_A = \mathrm{O}$ となり，A の半径は 1，B の半径は 0 であるから，半径の和は 1 である．

(ii) $t \neq 1$ のとき

t (ただし，$0 \leqq t < 1$) を固定して考えると，A は円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接するとき最大となり，そのときの A の半径を r，$\angle \mathrm{OPO}_A = \alpha$ (ただし，$0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$) とする．



余弦定理より

$$(1-r)^2 = r^2 + t^2 - 2tr\cos\alpha$$

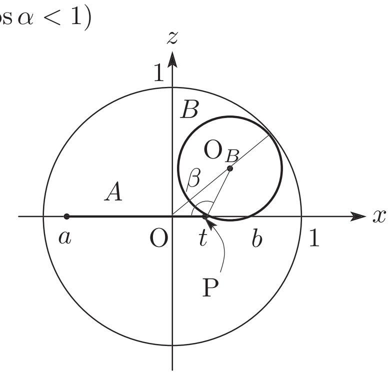
$$\iff \quad 2(1 - t\cos\alpha)r = 1 - t^2$$

$$\iff \quad r = \frac{1-t^2}{2(1-t\cos\alpha)} \qquad (\because \quad 0 \leqq t\cos\alpha < 1)$$

r は α の減少関数で，$0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$ であるから，A の半径 r は $\alpha = 0^\circ$ のとき最大となり，その値は

$$\max r = \frac{1-t^2}{2(1-t)} = \frac{1+t}{2}$$

である．



B の半径を R，$\angle \mathrm{OPO}_B = \beta$ (ただし，$90^\circ \leqq \beta \leqq 180^\circ$) とすると同様に

$$(1-R)^2 = R^2 + t^2 - 2tR\cos\beta$$

$$\therefore \quad R = \frac{1-t^2}{2(1-t\cos\beta)}$$

より，B の半径 R は $\beta = 90^\circ$ のとき最大となり，その値は

$$\max R = \frac{1-t^2}{2}$$

である．

したがって，t の 2 次関数

$$\frac{1+t}{2} + \frac{1-t^2}{2} = -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8} \quad (0 \leqq t < 1)$$

の最大値を求めればよい．これは $t = \dfrac{1}{2}$ のとき最大となり，その値は，$\dfrac{9}{8}$ である．よって，求める最大値は

$$\boldsymbol{\frac{9}{8}} \quad \left(t = \frac{1}{2} \text{ のとき}\right) \qquad \text{(答)}$$

１９章－２　評価

問題

【1】(1)　$f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2!}$

とすると,

$f'(x) = -\sin x + x,$

$f''(x) = -\cos x + 1 \geqq 0$

だから，$f'(x)$ は増加し,

$f'(0) = 0$

より,

$f'(x) \geqq 0$

よって，$f(x)$ は増加し，$f(0) = 0$ だから

$f(x) \geqq 0$

ここで

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cos x$$

とすると,

$$g'(x) = -x + \frac{x^3}{3!} + \sin x$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= -1 + \frac{x^2}{2!} + \cos x \\ &= f(x) \geqq 0 \end{aligned}$$

だから，$g'(x)$ は増加し，$g'(0) = 0$ より

$g'(x) \geqq 0$

よって，$g(x)$ は増加し，$g(0) = 0$ だから

$g(x) \geqq 0$

以上より，示された.　　　〔証明終〕

(2) (1) より

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) dt \leqq \int_0^x \cos t dt \leqq \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}\right) dt$$

$$\Longleftrightarrow x - \frac{x^3}{3!} \leqq \sin x \leqq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

ここで，$h(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$ とすると,

$$|\sin x - h(x)| \leqq \frac{x^5}{5!}$$

これより,

$$|\sin 1 - h(1)| \leqq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

だから，求める値は

$$p = h(1) = 1 - \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{5}{6}} \qquad \text{(答)}$$

【2】$k \leqq x \leqq k+1$ (k は 2 以上の自然数) で

$$\frac{1}{x^2} \leqq \frac{1}{k^2} \leqq \frac{1}{(x-1)^2}$$

が成り立つから,

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} < \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dx < \int_k^{k+1} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} < \frac{1}{k^2} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

これを $k=5$ から, $k=n$ まで足しあわせると,

$$\int_5^{n+1} \frac{dx}{x^2} < \sum_{k=5}^{n} \frac{1}{k^2} < \int_5^{n+1} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \left[-\frac{1}{x}\right]_5^{n+1} < \sum_{k=5}^{n} \frac{1}{k^2} < \left[-\frac{1}{x-1}\right]_5^{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{n+1} < \sum_{k=5}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{n}$$

ここで,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$\Longleftrightarrow S(n) = \sum_{k=5}^{n} \frac{1}{k^2} + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \sum_{k=5}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{205}{144}$$

だから

$$\frac{205}{144} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n+1} < S(n) < \frac{205}{144} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1169}{720} - \frac{1}{n+1} < S(n) < \frac{241}{144} - \frac{1}{n} < \frac{248}{144} = \frac{31}{18}$$

$n \geqq 80$ のとき, $\dfrac{29}{18} = \dfrac{1169}{720} - \dfrac{1}{80} < \dfrac{1169}{720} - \dfrac{1}{n+1}$ より

$$\frac{29}{18} < \lim_{n\to\infty} S(n) < \frac{31}{18}$$ 〔証明終〕

【3】

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[e^x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(e^{\pi}-1) - \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx\right\}$$

ここで,

$$J = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx$$

とすると，

$$J = \left[e^x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \sin 2x dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \sin 2x dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left\{\left[e^x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \cos 2x dx\right\}$$
$$= -\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}(e^\pi - 1) + \frac{J}{2}\right\}$$

よって，

$$J = \frac{1}{5}(e^\pi - 1)$$
$$\therefore I = \frac{2}{5}(e^\pi - 1)$$

これより

$$\frac{2}{5}(e^\pi - 1) > 8$$

すなわち

$$e^\pi > 21$$

を示せばよい．

ここで，$y = e^x$ の $x = 3$ における接線を考える．これは

$$y = e^3(x-3) + e^3$$
$$= e^3 x - 2e^3$$

であり，すべての x に対して，

$$e^x \geqq e^3 x - 2e^3$$

が成り立つから，$x = \pi$ のとき，

$$e^\pi > e^3\pi - 2e^3$$
$$= e^3(\pi - 2) > 2.7^3(3.14 - 2)$$
$$= 19.683 \times 1.14 > 19 \times 1.14$$
$$= 21.66$$

よって示された．　　〔証明終〕

添削課題

【1】

$$f(x) = x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad (x>0)$$

とおくと

$$f'(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

ここで，

$$g(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \quad (x>0)$$

とおくと，

$$g'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\times\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

だから， $g(x)$ は $x>0$ で単調減少.

そして，

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

だから， $g(x)>0$ ， すなわち

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$$

よって， $f(x)$ は $x>0$ で単調増加だから

$$f\left(\frac{2002}{2001}\right) > f\left(\frac{2001}{2002}\right)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}} > \left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}} \qquad \text{(答)}$$

２０章－１　数列

問題

【1】特性方程式

$$\alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 = 1$$

の解は $\alpha = \pm 1$ である.

$$x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{x_n+2} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \quad \cdots\cdots ②$$

とすると，① − ② より

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha &= \frac{(\alpha+2)(2x_n+1)-(2\alpha+1)(x_n+2)}{(\alpha+2)(x_n+2)} \\ &= \frac{3x_n - 3\alpha}{(\alpha+2)(x_n+2)} \\ &= \frac{3}{\alpha+2} \cdot \frac{x_n-\alpha}{x_n+2} \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

③ に $\alpha = \pm 1$ を代入すると，それぞれ

$$\begin{cases} x_{n+1} - 1 = \dfrac{x_n-1}{x_n+2} & \cdots\cdots ④ \\ x_{n+1} + 1 = 3 \cdot \dfrac{x_n+1}{x_n+2} & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

与えられた漸化式より，$n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ において $x_n > 1$ であるから，④ と ⑤ の比をとって

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_n-1}{x_n+1}$$

これより

$$\frac{x_n-1}{x_n+1} = \frac{x_1-1}{x_1+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$\therefore \quad 3^n(x_n-1) = x_n+1$

$\therefore \quad x_n = \boldsymbol{\dfrac{3^n+1}{3^n-1}}$ 　　(答)

＜別解＞

$$x_1 = 2 = \frac{2}{1}$$

$$x_2 = \frac{2\cdot 2+1}{2+2} = \frac{5}{4}$$

$$x_3 = \frac{2\cdot\frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}+2} = \frac{14}{13}$$

$$x_4 = \frac{2\cdot\frac{14}{13}+1}{\frac{14}{13}+2} = \frac{41}{40}$$

現れる分母の列を $\{y_n\}$ とすると

$1,\ 4,\ 13,\ 40,\ \cdots\cdots$

より

$$y_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{3^n-1}{2}$$

となるから

$$x_n = \frac{y_n + 1}{y_n} = \frac{\frac{3^n-1}{2}+1}{\frac{3^n-1}{2}} = \frac{3^n+1}{3^n-1} \quad \cdots\cdots(*)$$

と予想される．

(i) $n=1$ のとき $(*)$ は成立する．

(ii) $x_n = \dfrac{3^n+1}{3^n-1}$ で成立すると仮定すると

$$x_{n+1} = \frac{2\cdot\frac{3^n+1}{3^n-1}+1}{\frac{3^n+1}{3^n-1}+2} = \frac{2(3^n+1)+(3^n-1)}{(3^n+1)+2(3^n-1)} = \frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}-1}$$

(i), (ii) より，数学的帰納法により，$(*)$ は成立する．

よって

$$x_n = \boldsymbol{\frac{3^n+1}{3^n-1}} \qquad (答)$$

【2】(1) 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=4, \quad \alpha\beta=-1$$

であるから

$$\begin{cases} s_1 = \alpha+\beta = \mathbf{4} \\ s_2 = \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = \mathbf{18} \\ s_3 = \alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) = \mathbf{76} \end{cases} \qquad (答)$$

である．また，$n \geqq 3$ において

$$\begin{aligned} s_n &= \alpha^n+\beta^n \\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}) - \alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}) \\ &= 4s_{n-1}+s_{n-2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{s_n = 4s_{n-1}+s_{n-2} \quad (n \geqq 3)} \qquad (答)$$

(2) 2 次方程式を解くと，$\beta = 2-\sqrt{5}$ である．

$-1 < 2-\sqrt{5} < 0$ より

$$-1 < (2-\sqrt{5})^3 < 0 \qquad \therefore \quad -1 < \beta^3 < 0$$

よって，β^3 以下の最大の整数は

$\mathbf{-1}$ 　(答)

(3) $\alpha^{2003} = s_{2003} - \beta^{2003}$

である．$-1 < \beta < 0$ であるから

$$0 < -\beta^{2003} < 1$$

より，α^{2003} 以下の最大の整数は s_{2003} となる．

ここで，(1) の漸化式より，s_n は整数である．

$$\begin{aligned} & s_1 = 4 \\ & s_2 = 18 \equiv 8 \pmod{10} \\ & s_3 = 76 \equiv 6 \pmod{10} \\ & s_4 \equiv 4\cdot 6+8 \equiv 2 \pmod{10} \\ & s_5 \equiv 4\cdot 2+6 \equiv 4 \pmod{10} \\ & s_6 \equiv 4\cdot 4+2 \equiv 8 \pmod{10} \end{aligned}$$

のように，s_n の 1 の位は周期 4 で循環し，k を正の整数として

$$s_n = \begin{cases} s_{4k-3} \equiv 4 \\ s_{4k-2} \equiv 8 \\ s_{4k-1} \equiv 6 \\ s_{4k} \equiv 2 \end{cases} \pmod{10}$$

となるから

$$\begin{aligned} s_{2003} &= s_{4\cdot 500+3} \\ &\equiv s_3 \pmod{10} \\ &\equiv 6 \pmod{10} \end{aligned}$$

したがって，α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位は

6　　(答)

【3】(1) $k = 8$ のとき

$$a_1 = 0,\quad a_2 = \left[\frac{0+8}{3}\right] = 2,\quad a_3 = \left[\frac{2+8}{3}\right] = 3,\quad a_4 = \left[\frac{3+8}{3}\right] = 3$$

$n \geqq 5$ において，$a_n = 3$ であるから

$a_1 = \mathbf{0}$, $a_2 = \mathbf{2}$, $a_n = \mathbf{3}$　$(\boldsymbol{n} \geqq \mathbf{3})$　　(答)

$k = 9$ のとき，同様にして

$a_1 = \mathbf{0}$, $a_2 = \mathbf{3}$, $a_n = \mathbf{4}$　$(\boldsymbol{n} \geqq \mathbf{3})$　　(答)

(2) (A) $a_n \leqq \dfrac{k-1}{2}$ について

(i) $n = 1$ のとき

$$a_1 = 0 \leqq \frac{k-1}{2} \qquad (\because\quad k \geqq 1)$$

より成立.

(ii) $a_n \leqq \dfrac{k-1}{2}$ が成立すると仮定すると

$$a_{n+1} = \left[\frac{a_n + k}{3}\right] \leqq \left[\frac{\frac{k-1}{2} + k}{3}\right] = \left[\frac{3k-1}{6}\right]$$

ここで，i を正の整数として，$k = 2i$ ならば

$$a_{n+1} \leqq \left[\frac{3k-1}{6}\right] = \left[\frac{6i-1}{6}\right] = i - 1 = \frac{k}{2} - 1 \leqq \frac{k-1}{2}$$

また，$k = 2i - 1$ ならば

$$a_{n+1} \leqq \left[\frac{3k-1}{6}\right] = \left[\frac{3(2i-1)-1}{6}\right] = \left[\frac{3i-2}{3}\right] = i - 1 = \frac{k-1}{2}$$

したがって，$a_{n+1} \leqq \dfrac{k-1}{2}$ が成立する.

(i), (ii) より，数学的帰納法により，すべての n に対して

$$a_n \leqq \frac{k-1}{2}$$

が成り立つ.　　〔証明終〕

(B) $a_n \leqq a_{n+1}$ について

(iii) $n = 1$ のとき，$a_2 = \left[\dfrac{k}{3}\right] \geqq 0 = a_1$ で成立.

(iv) $a_n \leqq a_{n+1}$ が成立すると仮定すると

$$a_{n+1} = \left[\frac{a_n + k}{3}\right] \leqq \left[\frac{a_{n+1} + k}{3}\right] = a_{n+2}$$

(iii), (iv) より，数学的帰納法により，すべての n に対して，

$a_n \leqq a_{n+1}$

が成り立つ．〔証明終〕

(3) $m \geqq n$ の整数 m について $a_m = a_n$ とすると

$$a_{m+1} = \left[\frac{a_m + k}{3}\right] = \left[\frac{a_n + k}{3}\right] = a_{n+1} = a_n$$

したがって，帰納的に，n 以上のすべての整数 m に対して，$a_n = a_m$ である．

〔証明終〕

次に

$$a_{n+1} = \left[\frac{a_n + k}{3}\right] = a_n$$

より

$$\frac{a_n + k}{3} - 1 < a_n \leqq \frac{a_n + k}{3} \iff \frac{k-3}{2} < a_n \leqq \frac{k}{2}$$

一方，(2) より，$a_n \leqq \dfrac{k-1}{2}$ であるから

$$\frac{k-3}{2} < a_n \leqq \frac{k-1}{2}$$

i を正の整数として

(i) $k = 2i$ のとき

$$\frac{2i-3}{2} < a_n \leqq \frac{2i-1}{2} \qquad \therefore \quad (i-1) - \frac{1}{2} < a_n \leqq i - \frac{1}{2}$$

a_n は整数であるから

$$a_n = i - 1 = \frac{k}{2} - 1 = \frac{k-2}{2}$$

(ii) $k = 2i - 1$ のとき

$$\frac{2i-4}{2} < a_n \leqq \frac{2i-2}{2} \qquad \therefore \quad i - 2 < a_n \leqq i - 1$$

a_n は整数であるから

$$a_n = i - 1 = \frac{k+1}{2} - 1 = \frac{k-1}{2}$$

以上より

$$a_n = \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{k-2}{2}} & \textbf{(}\boldsymbol{k}\ \textbf{が偶数のとき)} \\ \boldsymbol{\dfrac{k-1}{2}} & \textbf{(}\boldsymbol{k}\ \textbf{が奇数のとき)} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

２０章－２　定積分（１）

問題

【1】$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で考えればよいから，$\sin x \geqq 0$，$\cos x \geqq 0$ である．

(i)$a > 0$ のとき

$$\sin x - a\cos x = 0$$

となる x を α とすると，

$$0 \leqq x \leqq \alpha \text{で} \sin x - a\cos x \leqq 0$$

$$\alpha \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \text{で} \sin x - a\cos x \geqq 0$$

だから

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^{\alpha}(a\cos x - \sin x)dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - a\cos x)dx \\ &= \Big[a\sin x + \cos x\Big]_0^{\alpha} + \Big[-\cos x - a\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2a\sin\alpha + 2\cos\alpha - a - 1 \end{aligned}$$

ここで，$\sin\alpha - a\cos\alpha = 0$ より

$$a = \tan\alpha$$

であり，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると，

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

だから

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{2a^2}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{a^2+1}} - a - 1 \\ &= 2\sqrt{a^2+1} - a - 1 \end{aligned}$$

これより

$$F'(a) = \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} - 1 = \frac{2a - \sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}$$

であり，

$$2a - \sqrt{a^2+1} = 0$$

となる a は $a > 0$ に注意すると，$4a^2 = a^2 + 1$ より，

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

だから，$a > 0$ における $F(a)$ の増減は下のようになる．

a	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$F'(a)$		$-$	0	$+$
$F(a)$		↘		↗

よって $a > 0$ における $F(a)$ の最小値は

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} - 1$$

(ii)$a \leqq 0$ のとき

$\sin x - a\cos x \geqq 0$ だから，

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - a\cos x)dx$$

$$= \Big[-\cos x - a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -a + 1$$

よって，$a \leqq 0$ における $F(a)$ の最小値は

$$F(0) = 1$$

(i)，(ii) より，$F(a)$ を最小とする a の値は

$$a = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad (答)$$

で，そのときの $F(a)$ の値は

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\sqrt{3} - 1} \qquad (答)$$

【2】(1)

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(p-q)x - \cos(p+q)x\}dx$$

ここで，$p \neq q$ のとき，

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p-q)x}{p-q} - \frac{\sin(p+q)x}{p+q}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \mathbf{0} \qquad (答)$$

$p = q$ のとき

$$A = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(p+q)x}{p+q}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \boldsymbol{\pi} \qquad (答)$$

(2)

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{x - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right)\right\}^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{x^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k x \sin kx + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right)^2\right\}dx$$

ここで，$\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right)^2$ の各項は

$a_l a_m \sin lx \sin mx$（$1 \leqq l \leqq n$，$1 \leqq m \leqq n$）

の定数倍で表され，(1) より $l \neq m$ のとき，

積分値は 0 となるから，

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx-2\sum_{k=1}^{n}a_k\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kxdx+\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx$$

となる．

そして，

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^3$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kxdx&=\left[-\frac{1}{k}x\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx\\&=-\frac{1}{k}\pi\cos k\pi+\frac{1}{k}(-\pi)\cos(-k\pi)+\frac{1}{k^2}\left[\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=-\frac{2}{k}\pi(-1)^k\end{aligned}$$

また (1) より，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\pi$$

だから，

$$\begin{aligned}I&=\frac{2}{3}\pi^3+4\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}a_k+\pi\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\\&=\pi\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k^2-\frac{4(-1)^{k-1}}{k}a_k\right\}+\frac{2}{3}\pi^3\\&=\pi\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(a_k-\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\right)^2-\frac{4}{k^2}\right\}+\frac{2}{3}\pi^3\\&=\pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\right)^2+\frac{2}{3}\pi^3-4\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

よって I を最小にする a_k の値は

$$a_k=\boldsymbol{\frac{2(-1)^{k-1}}{k}}\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\qquad\text{(答)}$$

【3】(1)

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx\\&=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\\&=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2 xdx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{48} - \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^2}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx\right)$$

$$= \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx\right)$$

$$= \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$$

よって

$$S_2 > \frac{1}{48}(3.1)^3 + \frac{1}{8} \times 3.1$$

$$= \frac{48.3\cdots}{48} > 1$$

これより

$S_2 > S_1$ 〔証明終〕

(2)

$$S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^{n+2}\sin^{n+2} x - 2x^{n+1}\sin^{n+1} x + x^n \sin^n x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n x (x \sin x - 1)^2 dx$$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ なので，

$x^n \sin^n x \geqq 0$

よって，

$S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n > 0$

$\therefore \quad S_{n+2} + S_n > 2S_{n+1}$ 〔証明終〕

(3) (2) より

$S_{n+2} - S_{n+1} > S_{n+1} - S_n$

だから

$S_{n+2} - S_{n+1} > \cdots\cdots > S_2 - S_1$

であり，(1) より $S_2 - S_1 > 0$ だから

$n > m$ のとき

$S_n - S_m > 0 \qquad \therefore \quad S_n > S_m$ 〔証明終〕

【4】(1) $x \leqq t$ のとき

$$\left|\log\frac{t}{x}\right| = \log\frac{t}{x}$$

$x \geqq t$ のとき

$$\left|\log\frac{t}{x}\right| = -\log\frac{t}{x}$$

だから，

$$f_n(t) = \int_1^t \frac{1}{x}\log\frac{t}{x}dx + \int_t^n \frac{1}{x}\left(-\log\frac{t}{x}\right)dx$$

であり，ここで，

$$I=\int\frac{1}{x}\log\frac{t}{x}dx$$
$$=\int\frac{\log t}{x}dx-\int\frac{\log x}{x}dx$$

であり，

$$J=\int\frac{\log x}{x}dx$$

とすると，

$$J=\int(\log x)'\log x dx$$
$$=(\log x)^2-\int\frac{\log x}{x}dx$$
$$=(\log x)^2-J$$
$$\therefore\quad J=\frac{(\log x)^2}{2}+C_0\ (C_0\text{は積分定数})$$

だから

$$I=\log t\log x-\frac{(\log x)^2}{2}+C_1\ (C_1\text{は積分定数})$$
$$f_n(t)=\left[\log t\log x-\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^t+\left[-\log t\log x+\frac{(\log x)^2}{2}\right]_t^n$$
$$=\frac{1}{2}(\log t)^2-\log t\log n+\frac{(\log n)^2}{2}+\frac{1}{2}(\log t)^2$$
$$=(\log t)^2-\log n\log t+\frac{1}{2}(\log n)^2$$
$$=\left(\log t-\frac{\log n}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(\log n)^2$$

そして，$1\leqq t\leqq n$ より $0\leqq\log t\leqq\log n$ だから，$f_n(t)$ を $\log t$ の２次関数とみれば，

$\log t=0,\ \log n$ で最大値

$$A_n=\boldsymbol{\frac{1}{2}(\log n)^2}\qquad(\text{答})$$

をとり，$\log t=\dfrac{\log n}{2}$ で最小値

$$B_n=\boldsymbol{\frac{1}{4}(\log n)^2}\qquad(\text{答})$$

をとる．

(2)

$$A_{n+1}-A_n$$
$$=\frac{1}{2}\{\log(n+1)\}^2-\frac{1}{2}(\log n)^2$$
$$=\frac{1}{2}\{\log(n+1)+\log n\}\{\log(n+1)-\log n\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\log(n+1)+\log n\}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\{\log(n+1)+\log n\}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\frac{n}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\log(n+1)}{n+1}\times\frac{n+1}{n}+\frac{\log n}{n}\right\}\times\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(A_{n+1}-A_n)&=\frac{1}{2}(0\times 1+0)\times\log e\\&=\mathbf{0}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

添削課題

【1】$n=1$ として

$$2=a_1a_2+a_2a_1 \qquad \therefore \quad a_2=1=\frac{1}{1!}$$

$n=2$ として

$$2=a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1 \qquad \therefore \quad a_3=\frac{1}{2}=\frac{1}{2!}$$

$n=3$ として

$$\frac{4}{3}=a_1a_4+a_2a_3+a_3a_2+a_4a_1 \qquad \therefore \quad a_4=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!}$$

$n=4$ として

$$\frac{2}{3}=a_1a_5+a_2a_4+a_3a_3+a_4a_2+a_5a_1 \qquad \therefore \quad a_5=\frac{1}{24}=\frac{1}{4!}$$

よって

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!} \quad \cdots\cdots(*)$$

と予想される．これを数学的帰納法により証明する．

(i) $n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\frac{2^m}{m!}=a_1a_{m+1}+a_{m+1}a_1+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{(m+1-k)!}$$

$$\iff \quad 2^m=2(m!)a_{m+1}+\sum_{k=2}^{m}\frac{m!}{(k-1)!(m+1-k)!}$$

$$\iff \quad 2(m!)a_{m+1}=2^m-\sum_{k=2}^{m}{}_m\mathrm{C}_{k-1}$$

$$\iff \quad 2(m!)a_{m+1}=2^m-\left(\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k-{}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_m\right)$$

$$\iff \quad 2(m!)a_{m+1}=2 \qquad \left(\because \quad \sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k=2^m\right)$$

$$\therefore \quad a_{m+1}=\frac{1}{m!}$$

よって，数学的帰納法により $(*)$ は成り立つ．

したがって

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{(n-1)!}} \qquad \text{(答)}$$

M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠAⅡB

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学T

Z-KAI

会員番号		氏　名	