M3JSB/M3JB/M3TB

本科 2 期 10 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大クラス文系数学

東大文系数学

難関大文系数学 T

１７章　代数（４）

問題

【1】示すべき不等式について，右辺から左辺を引いた差が非負であることを示す．

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\\
&=\sin\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)\\
&=\sin\frac{x_1+x_2}{2}-\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2} \qquad (\because \text{和積の公式})\\
&=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(1-\cos\frac{x_1-x_2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ここで $0^\circ \leqq x_1 \leqq 180^\circ$，$0^\circ \leqq x_2 \leqq 180^\circ$ だから，

$$0^\circ \leqq \frac{x_1+x_2}{2} \leqq 180^\circ \qquad \therefore\ \sin\frac{x_1+x_2}{2} \geqq 0$$

また，任意の角 x_1，x_2 について

$$1-\cos\frac{x_1-x_2}{2} \geqq 0$$

よって

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(1-\cos\frac{x_1-x_2}{2}\right) \geqq 0$$

が成り立つから，

$$\therefore\quad \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leqq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$ ［証明終］

＜別解＞

$y=\sin x$ のグラフを $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ の範囲で考えると，この範囲で上に凸だから

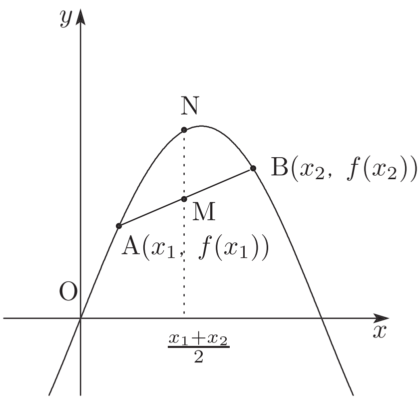
点 $\mathrm{A}(x_1,\ f(x_1))$，$\mathrm{B}(x_2,\ f(x_2))$

の中点を M とすれば，

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$$

である．

図 1: $\sin x$ の凸性



ここで $y=f(x)$ 上の点 N を

$$\mathrm{N}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$$

とすると，M の y 座標は N の y 座標に比べて，等しいか小さい．よって示された．

[証明終]

【2】まず，$x \geqq y$，$z \geqq w$ とすると

$$
\begin{aligned}
(xz+yw)-(xw+yz) &= (z-w)x-(z-w)y \\
&= (z-w)(x-y) \geqq 0, \\
\therefore \quad xz+yw &\geqq xw+yz \cdots\cdots (\#)
\end{aligned}
$$

であることに着目する．

b_i, b_j, b_k の並び方について，次のように場合を分ける：

Case 1．$(ijk)=(132)$，(321)，(213) のとき，つまり，(ijk) が (123) から 2 つのものの交換によって得られるとき．(これを『互換によって得られる』と言う．『1 個が自然な位置にある』という言い方もできる．)

Case 2．$(ijk)=(231)$，(312) のとき，つまり，(ijk) が (123) から巡回によって得られるとき．(これを『巡回置換によって得られる』と言う．『自然な位置にあるものが存在しない』とも言える．)

$N = a_1b_1+a_2b_2+c_3b_3$ とする．

Case 1．(ijk) が (123) から互換で得られるとき．

例えば $(ijk)=(213)$ のとき，$(\#)$ によって

$a_1b_1+a_2b_2 \geqq a_1b_2+a_2b_1$

が成り立つ．この両辺に a_3b_3 を加えれば，

$N = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \geqq a_1b_2+a_2b_1+a_3b_3$

となる．$(ijk)=(321)$, (132) の場合も同様に示される．

従って，(123) に互換を施して (ijk) が得られるとき，示すべき式が成り立つ．

Case 2．(ijk) が (123) から巡回置換で得られるとき．

- $(ijk)=(231)$ のとき，示すべき式は

  $a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1 \leqq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = N$

  である．まず左辺の第 1 項と第 3 項について，$b_1 \geqq b_2$ と $(\#)$ より

  $$a_1b_2+a_3b_1 \leqq a_1b_1+a_3b_2,$$

  $$\therefore\ a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1 \leqq a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2 \cdots ①$$

  が成り立つ．ところがこの右辺の第 2 項と第 3 項について，Case 1 で示したように

  $$a_2b_3+a_3b_2 \leqq a_2b_2+a_3b_3,$$

  $$\therefore\ a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2 \leqq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = N \cdots ②$$

  が成り立つから，①と②によって

  $N = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \geqq a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1$

  が成り立つ．

- $(ijk) = (312)$ のとき，示すべき式は
  $a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2 \leqq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = N$
  である．まず左辺の第 1 項と第 2 項について，$b_1 \geqq b_3$ と $(\#)$ より
  $$a_1b_3 + a_2b_1 \leqq a_1b_1 + a_2b_3,$$
  $$\therefore\ a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2 \leqq a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 \cdots ③$$
  が成り立つ．ところがこの右辺の第 2 項と第 3 項について，Case 1 で示したように
  $$a_2b_3 + a_3b_2 \leqq a_2b_2 + a_3b_3,$$
  $$\therefore\ a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 \leqq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = N \cdots ④$$
  が成り立つから，③と④によって
  $N = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geqq a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2$
  が成り立つ．

以上，Cases $1, 2$ によって，(123) の任意の並べ替え (ijk) について，
$N = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geqq a_1b_i + a_2b_j + a_3b_k$
であることが示された．　　　［証明終］

【3】題意より $\sqrt{2x+y}>0$ であるから，

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y} \iff \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}} \leqq k \qquad \cdots(\#)$$

求めるものは $(\#)$ が任意の整数 x, y で成り立つような k の最小値であるから，$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}$ の最大値を求める．ここで, コーシー・シュワルツの不等式

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \geqq (ac+bd)^2 \quad (\text{等号成立は } ad=bc \text{ のとき})$$

を用いることを考える．この不等式において

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b=1, \quad c=\sqrt{2x}, \quad d=\sqrt{y}$$

と置くと

$$\frac{3}{2}(2x+y) \geqq \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \iff \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq \sqrt{\frac{3}{2}(2x+y)}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}} \leqq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

等号は

$$ad=bc \iff \sqrt{\frac{y}{2}}=\sqrt{2x} \iff y=4x$$

のときに成立するから，$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ である.

以上より，$(\#)$ が成り立つ条件は

$$k \geqq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

であるから，求める k の最小値は

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad (\text{答})$$

＜別解＞

$y>0$ なので，不等式は

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+1 \leqq k\sqrt{\frac{2x}{y}+1}$$

と変形できる．$\sqrt{\dfrac{x}{y}}=t$ と置くと $t>0$ である．ここで，k は明らかに正なので，両辺2乗しても同値であることに着目する.

すると，求めるものは

$$(t+1)^2 \leqq k^2(2t^2+1) \iff (2k^2-1)t^2-2t+k^2-1 \geqq 0 \quad \cdots ①$$

が，$t>0$ であるすべての t で成立するような k の最小値である.

いま，① の左辺を $f(t)$ とおくと，$t>0$ であるすべての t で $f(t) \geqq 0$ が成立するためには

$$f(0)=k^2-1 \geqq 0 \qquad \therefore k \geqq 1$$

が必要である.

このとき

- $f(t)$ の 2 次の係数について，$2k^2-1>0$
- $y=f(t)$ のグラフの軸について，$\dfrac{1}{2k^2-1}>0$

であるから，方程式 $f(t)=0$ の判別式を D として

$$\frac{D}{4}=1-(k^2-1)(2k^2-1)=-2k^4+3k^2 \leqq 0$$

が成り立てばよい.

$k \geqq 1$ に注意して解くと

$$\frac{3}{2} \leqq k^2 \qquad \therefore \quad \frac{\sqrt{6}}{2} \leqq k$$

よって，k の最小値は

$$\frac{\sqrt{6}}{2}$$

であり，このとき，$t=\dfrac{1}{2k^2-1}=\dfrac{1}{2}$ であるから，$t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ より

$$4x=y$$

となる.

【4】与えられた方程式を変形して，条件

$$s^2+t^2=1$$

を用いれば，次の 4 次方程式になる：

$$x^4-2(s+t)x^2+1-2st=0 \qquad \cdots(\#)$$

$s+t=k$ と置けば，$s^2+t^2=1$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ より，

$$s=\cos\theta,\ t=\sin\theta,\quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

とすることが出来る．sin への合成によって

$$k=s+t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形され，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 1 \Longleftrightarrow 1 \leqq k=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$

である．

また，s，t の対称式処理によって

$$(s+t)^2=1+2st=k^2 \Longleftrightarrow st=\frac{k^2-1}{2}$$

であるから，方程式 $(\#)$ は

$$x^4-2kx^2+2-k^2=0 \Longleftrightarrow k^2+2x^2k-x^4-2=0 \quad \cdots(*)$$

となり，k に関する 2 次方程式に変形される．従って問題の条件は，この

　　方程式 $(*)$ が $1 \leqq k \leqq \sqrt{2}$ をみたす解をもつような x の範囲を求めること

に帰着される．

$(*)$ の左辺を $f(k)$ として

$$f(k)=\left(k+x^2\right)^2-2x^4-2$$

であるから，放物線 $y=f(k)$ の頂点は第 3 象限にあり，従って

$$f(1) \leqq 0 \quad かつ \quad f\left(\sqrt{2}\right) \geqq 0$$

が必要かつ十分.

- $f(1)=-\left(x^2-1\right)^2$ であるから，$f(1) \leqq 0$ は常に成立.
- $f\left(\sqrt{2}\right)=-x^2\left(x^2-2\sqrt{2}\right)$ より，

$$f\left(\sqrt{2}\right) \geqq 0 \Longleftrightarrow x^2-2\sqrt{2} \leqq 0 \Longleftrightarrow -\sqrt{2\sqrt{2}} \leqq x \leqq \sqrt{2\sqrt{2}}$$

を得る.

以上をまとめて，求める x の範囲は

$$-\sqrt{2\sqrt{2}} \leqq x \leqq \sqrt{2\sqrt{2}} \qquad (答)$$

添削課題

【1】$f(a)$，$f(b)$ のうち大きくないほうを，$\min\{f(a),\ f(b)\}$，小さくないほうを $\max\{f(a),\ f(b)\}$ とすると

$$m \leqq f(a) \leqq M,\ m \leqq f(b) \leqq M$$

より

$$m \leqq \min\{f(a),\ f(b)\},\ \max\{f(a),\ f(b)\} \leqq M \cdots\cdots ①$$

ここで，$y = Ax + B$ について $a \leqq x \leqq b$ で

$$\min\{f(a),\ f(b)\} \leqq Ax + B \leqq \max\{f(a),\ f(b)\}$$

だから，これと ① より

$$m \leqq Ax + B \leqq M$$

$$\therefore\quad -M \leqq -(Ax + B) \leqq -m$$

これと $m \leqq f(x) \leqq M$ を加えると

$$-M + m \leqq f(x) - (Ax + B) \leqq M - m$$

$$\therefore\quad -(M - m) \leqq f(x) - (Ax + B) \leqq M - m$$

$$\therefore\quad |f(x) - (Ax + B)| \leqq M - m$$ (証明終)

問題

【1】与えられた第 2 式は，$\{a_n\}$ を生成する漸化式である．そこで，いくつかの項を実際に求めてみて，一般項 a_n を推定し，その推定が正しいことを数学的帰納法により証明する．

- $n=1$ として，
  $2=a_1a_2+a_2a_1 \qquad \therefore \quad a_2=1$
- $n=2$ として，
  $2=a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1 \qquad \therefore \quad a_3=\dfrac{1}{2}$
- $n=3$ として，
  $\dfrac{4}{3}=a_1a_4+a_2a_3+a_3a_2+a_4a_1 \qquad \therefore \quad a_4=\dfrac{1}{6}$
- $n=4$ として，
  $\dfrac{3}{2}=a_1a_5+a_2a_4+a_3a_3+a_4a_2+a_5a_1 \qquad \therefore \quad a_5=\dfrac{1}{24}$

以上から，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$ が推定される．この推定が正しいことを，数学的帰納法により証明する．

この推定が正しいとすると

$$n!\,a_{n+1}=(n-1)!\,a_n \quad \therefore \quad (n-1)!\,a_n=0!\,a_1=1 \quad \therefore \quad a_n=\frac{1}{(n-1)!} \qquad \cdots(*)$$

となる．以下，これを示す．

$n=1$ で $(*)$ は成り立つ．

また，ある n までで成り立つと仮定すると，

$$\frac{2^n}{n!}=a_1a_{n+1}+a_{n+1}a_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{(n+1-k)!}$$

$$\iff 2^n=2n!\,a_{n+1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-1)!\,(n+1-k)!}$$

$$\iff 2n!\,a_{n+1}=2^n-\sum_{k=2}^{n}{}_n\mathrm{C}_{k-1}$$

$$\iff 2n!\,a_{n+1}=2^n-\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k-{}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_n\right)$$

$$\iff 2n!\,a_{n+1}=2$$

$$\iff a_{n+1}=\frac{1}{n!}$$

よって，数学的帰納法の原理より，$(*)$ が成り立つから，求める一般項 a_n は

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 与漸化式より

$$\frac{1}{a_2}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2b_1}=\frac{a_1+2b_1}{2a_1b_1},\ b_2=\frac{1}{4}(a_1+2b_1)$$

であるから，

$$b_2-a_2=\frac{1}{4}(a_1+2b_1)-\frac{2a_1b_1}{a_1+2b_1}=\frac{(a_1-2b_1)^2}{4(a_1+2b_1)}>0$$

$$b_1-b_2=b_1-\frac{1}{4}(a_1+2b_1)=\frac{1}{4}(2b_1-a_1)>0$$

$\therefore\quad a_2<b_2<b_1$ ［証明終］

(2) 数学的帰納法による．

(I) $n=1$ のとき，(1) より $b_1>b_2>a_2$ だから，$b_1>a_2$ より確かに成り立つ．

(II) $n=k$ で成立を仮定する．

(IH) $a_{k+1}<b_{k+1}<b_k$

示すべきことは $a_{k+2}<b_{k+2}<b_{k+1}$ である．

$n=k+1$ のとき，

$$b_{k+2}-a_{k+2}=\frac{1}{4}(a_{k+1}+2b_{k+1})-\frac{2a_{k+1}b_{k+1}}{a_{k+1}+2b_{k+1}}=\frac{(2b_{k+1}-a_{k+1})^2}{4(a_{k+1}+2b_{k+1})}>0$$

$$b_{k+1}-b_{k+2}=b_{k+1}-\frac{1}{4}(a_{k+1}+2b_{k+1})=\frac{1}{4}(2b_{k+1}-a_{k+1})>0$$

$\therefore\quad a_{k+2}<b_{k+2}<b_{k+1}$

よって，(I), (II) と数学的帰納法の原理により，すべての n について

$a_{n+1}<b_{n+1}<b_n\qquad\therefore\quad b_n>a_{n+1}$

が成り立つ． ［証明終］

(3) (2) より，$\{b_n\}$ は減少数列であるから，$n\geqq 2$ のとき，明らかに

$b_n<b_1$ ［証明終］

【3】(1) α, β は 2 次方程式

$$x^2-4x-1=0$$

の 2 解であるから,

$$\alpha^2=4\alpha+1,\quad \beta^2=4\beta+1$$

が成り立つ.

従って，これらの辺々にそれぞれ α^n, β^n をかけると

$$\alpha^{n+2}=4\alpha^{n+1}+\alpha^n,\quad \beta^{n+2}=4\beta^{n+1}+\beta^n$$

を得る.

辺々加えると，$n\geqq 1$ の下で

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=4\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)+\alpha^n+\beta^n$$

となり，s_n の定義から 3 項間漸化式

$$s_{n+2}=4s_{n+1}+s_n$$

を得る.

s_1, s_2 を求めると

$$s_1=\alpha+\beta=4,\quad s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2(-1)=18$$

以上より，数列 $\{s_n\}$ を生成する漸化式は，n を正整数として

$$\begin{cases} s_1=4,\ s_2=18 \\ s_{n+2}=4s_{n+1}+s_n \end{cases}\qquad \text{(答)}$$

(2) β は 2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の小さい方の解だから,

$$\beta=2-\sqrt{5}$$

である．$2^2<5<3^2 \iff 2<\sqrt{5}<3$ であるから,

$$-1<\beta<0 \qquad \therefore\quad -1<\beta^3<0$$

が成り立ち，よって β^3 を越えない最大の整数は -1 である：

$$\lfloor\beta^3\rfloor=-1 \qquad \text{(答)}$$

(3) $N=2003$ とすると，求めるものは $\lfloor\alpha^N\rfloor$ の 1 の位の数である.

$s_N=\alpha^N+\beta^N$ より,

$$\alpha^N=s_N-\beta^N$$

である．ここで (2) で考察したように $-1<\beta<0$ であるから，正整数 n について

- n が偶数ならば $0<\beta^n<1$
- n が奇数ならば $-1<\beta^n<0$

である.

$N=2003$ は奇数であるから $0<-\beta^N<1$ となり,

$$s_N<\alpha^N=s_N-\beta^N<s_N+1 \qquad \therefore\quad \lfloor\alpha^N\rfloor=s_N$$

従って，求める値は s_N の 1 の位の数である.

mod 10 を固定して，10 を法とする合同関係で考えると，(1) で得た漸化式を用いて,

$$s_1\equiv 4,\quad s_2\equiv 8,\quad s_3\equiv 4\cdot 8+4\equiv 6,\quad s_4\equiv 4\cdot 6+8\equiv 2,$$
$$s_5\equiv 4\cdot 2+6\equiv 4,\quad s_6\equiv 4\cdot 4+2\equiv 8,\quad \cdots$$

となり，s_n を 10 で割った余り，つまり s_n の 1 の位は

$$4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ \cdots$$

という，周期 4 をもつ循環数列になることが推定される：

推定： $s_{n+4} \equiv s_n$

この推定が正しいことを，帰納法により示す.

(I) $n = 1, 2$ のとき,

$$s_5 \equiv s_1, \quad s_6 \equiv s_2$$

より成立.

(II) $n = k,\ k+1$ で推定が正しいとする：

$$\text{(IH)} \ : \ s_{k+4} \equiv s_k, \quad s_{k+5} \equiv s_{k+1}$$

このとき,

$$s_{k+6} = 4s_{k+5} + s_{k+4} \equiv 4s_{k+1} + s_k = s_{k+2} \qquad \therefore\ s_{k+6} \equiv s_{k+2}$$

よってこのときも推定は正しい.

(I), (II) より，任意の正整数 n について推定が正しいことが，数学的帰納法により示された.

従って，$N = 2003$ について

$$s_N \equiv s_{N-4} \equiv s_{N-8} \equiv \cdots \equiv s_3 \equiv 6$$

であるから，求める値は

$$\lfloor \alpha^{2003} \rfloor = 6 \qquad \text{(答)}$$

【4】(1)　$a^2=1+2b^2$ より a^2 は奇数．よって，a も奇数である．

$a=2n+1$（n は整数）と置くと，

$$(2n+1)^2=1+2b^2 \iff 4n^2+4n=2b^2$$

$$\therefore\ b^2=2n(n+1)$$

よって，b^2 は偶数となり，b も偶数となる．　[証明終]

(2)　$a^2-2b^2=1$ において，$a=2n+1$，$b=2m$ と置くと，

$$(2n+1)^2-2(2m)^2=1$$

$$\iff 4n^2+4n-8m^2=0$$

$$\iff n(n+1)=2m^2$$

$$\therefore\ m^2=\frac{n(n+1)}{2}=1+2+\cdots+n$$

ここで，左辺は平方数を表し，右辺は 3 角数を示す．

また，$m^2=\dfrac{b^2}{4}$ であることに注目すると，正整数 a，b が $a^2-2b^2=1$ をみたすとき，$\dfrac{b^2}{4}$ は平方 3 角数になる．　(答)

(3)　正整数 k に対して，

$$\begin{aligned} a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^{k+1} &= (3+2\sqrt{2})^k(3+2\sqrt{2}) \\ &= (a_k+b_k\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) \\ &= (3a_k+4b_k)+(2a_k+3b_k)\sqrt{2} \end{aligned}$$

ここで，a_k，b_k，a_{k+1}，b_{k+1} はすべて正整数，従って有理数であり，また $\sqrt{2}$ は無理数だから，

$$a_{k+1}=3a_k+4b_k,\quad b_{k+1}=2a_k+3b_k \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．よって，

$$a_{k+1}{}^2-2b_{k+1}{}^2=(3a_k+4b_k)^2-2(2a_k+3b_k)^2=a_k{}^2-2b_k{}^2$$

これより，すべての正整数 k に対して，$a_k{}^2-2b_k{}^2$ は一定の値となるから，

$$\begin{aligned} a_k{}^2-2b_k{}^2 &= a_1{}^2-2b_1{}^2 \\ &= 3^2-2\cdot 2^2 \quad (\because\ a_1=3,\ b_1=2) \\ &= 9-8=1 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$

[証明終]

(4)　① より，

$$b_{k+1}-b_k=2a_k+2b_k>0 \quad (\because\ a_k,\ b_k \text{ は正整数})$$

が成り立つから，

$$b_1<b_2<b_3<\cdots \quad \cdots\cdots ②$$

一方，(2)，(3) の結果より，

$$\frac{1}{4}b_k{}^2 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

はすべて平方 3 角数であるから，② と合わせて，平方 3 角数が無数に存在することが示された．　[証明終]

添削課題

【1】(1) x_1 を 3 で割った余りは 2，y_1 を 3 で割った余りは 0 だから，

x_n，y_nを 3 で割った余りは，それぞれ 2，0 である $\cdots$ ⊛

と推測される．

これが正しいことを数学的帰納法で証明する．

(i) $n=1$ のとき $x_1=2$，$y_1=6$ で成り立つ．

(ii) $n=k$ (k は自然数) のとき x_k，y_k を 3 で割った余りが，それぞれ 2，0 であると仮定する．

$n=k+1$ のとき x_k，y_k は，それぞれ l，m を整数として $x_k=3l+2$，$y_k=3m$ と表せるから

$$x_{k+1}=x_k+y_k=(3l+2)+3m=3(l+m)+2$$

$$y_{k+1}=3x_k+y_k=3(3l+2)+3m=3(3l+m+2)$$

よって，x_{k+1}，y_{k+1} を 3 で割った余りは，それぞれ 2，0 である．

以上から，すべての自然数に対して ⊛ が成り立つ．

よって

x_nを 3 で割った余りは 2，y_nを 3 で割った余りは 0　　(答)

(2) 条件式より

$$y_n=x_{n+1}-x_n$$

であるから

$$y_{n+1}=x_{n+2}-x_{n+1}$$

これらを

$$y_{n+1}=3x_n+y_n$$

に代入して

$$x_{n+2}-x_{n+1}=3x_n+(x_{n+1}-x_n)$$

$$\therefore\quad x_{n+2}-2x_{n+1}-2x_n=0\quad (n\geqq 1)$$

特性方程式は $t^2-2t-2=0$ であり，これより $t=1\pm\sqrt{3}$

そして，$x_1=2$，$x_2=x_1+y_1=2+6=8$ だから

$$\begin{cases} x_{n+2}-(1+\sqrt{3})x_{n+1}=(1-\sqrt{3})\{x_{n+1}-(1+\sqrt{3})x_n\} \\ x_{n+2}-(1-\sqrt{3})x_{n+1}=(1+\sqrt{3})\{x_{n+1}-(1-\sqrt{3})x_n\} \end{cases}$$

これより

$$x_{n+1}-(1+\sqrt{3})x_n=-2\sqrt{3}(1-\sqrt{3})^n \quad \cdots\cdots ①$$

$$x_{n+1}-(1-\sqrt{3})x_n=2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^n \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② から

$$-2\sqrt{3}x_n=-2\sqrt{3}\{(1-\sqrt{3})^n+(1+\sqrt{3})^n\}$$

$$\therefore\quad x_n=(1-\sqrt{3})^n+(1+\sqrt{3})^n \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) より

$$(1+\sqrt{3})^n=x_n-(1-\sqrt{3})^n\quad (n\geqq 1)$$

(1) より $x_n=3k+2$ (k は整数) と表せ，また，$-1<1-\sqrt{3}<0$ だから

n が奇数のとき

$$0<-(1-\sqrt{3})^n<1 \qquad \therefore\quad x_n<x_n-(1-\sqrt{3})^n<x_n+1$$

よって $z_n = x_n = 3k+2$ だから z_n を 3 で割った余りは 2

n が偶数のとき

$$-1 < -(1-\sqrt{3})^n < 0 \qquad \therefore \quad x_n - 1 < x_n - (1-\sqrt{3})^n < x_n$$

よって，$z_n = x_n - 1 = (3k+2) - 1 = 3k+1$ だから z_n を 3 で割った余りは 1

以上より

n が奇数のとき 2, n が偶数のとき 1　　(答)

１９章　解析（２）

問題

【1】(1) まず，$a_1 = \sin\theta_1$ とすると，

$$2\sin\theta_1 = \sqrt{2} \iff \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

また，$a_n = 2\sin\theta_n$，$a_{n+1} = 2\sin\theta_{n+1}$ として，与えられた第 2 式により

$$2\sin\theta_{n+1} = \sqrt{2 + 2\sin\theta_n} = \sqrt{2(1 + \sin\theta_n)}$$

ここで，単位円の直線 $y = x$ に関する対称性と，cos の倍角公式により，

$$\begin{aligned} 1 + \sin\theta_n &= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_n\right) \\ &= 1 + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_n}{2}\right) - 1 \\ &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_n}{2}\right) \end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} 2\sin\theta_{n+1} &= \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_n}{2}\right)} \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_n}{2}\right) \\ &= 2\sin\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_n}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

従って，

$$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2} + \frac{\pi}{4}$$

を得る．

以上より，数列 $\{\theta_n\}$ について，漸化式

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\pi}{4}, \\ \theta_{n+1} = \dfrac{1}{2}\theta_n + \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

が得られた．これを解く．$\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{\pi}{4}$ として $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ であるから，漸化式の第 2 式から辺々引いて

$$\theta_{n+1} - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(\theta_n - \frac{\pi}{2}\right)$$

従って，数列 $\left\{\theta_n - \dfrac{\pi}{2}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列で，初項は $\theta_1 - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$ である．

よって第 n 項 θ_n は

$$\theta_n = -\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \text{(答)}$$

(2) まず，数列 $\{x_n\}$ は，どの項も 1 より小さいことを確認する．初項 $x_0 = a < 1$ であり，また

$$x_n = \frac{1}{2 - x_{n-1}} < \frac{1}{2 - 1} = 1$$

であるから，帰納的に，任意の $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ について

$$x_n < 1$$

である．

与えられた漸化式の第 2 式により，特性方程式は

$$\alpha=\frac{1}{2-\alpha}\iff\alpha(2-\alpha)=1\iff\alpha^2-2\alpha+1=0$$

であるから，漸化式の固有値 $\alpha=1$ を得る．そこで，両辺から 1 を引いて

$$x_{n+1}-1=\frac{1}{2-x_n}-1=\frac{1-(2-x_n)}{2-x_n}=\frac{1}{2-x_n}(x_n-1)$$

ここで $x_n-1=y_n\iff x_n=y_n+1$ と置けば

$$y_{n+1}=\frac{1}{2-(y_n+1)}y_n=\frac{y_n}{-y_n+1}$$

既に示したように，任意の非負整数 n について $x_n<1$ であるから，$y_n=x_n-1<1-1=0$，つまり $y_n\fallingdotseq 0$ が言える．従ってこの式の両辺の逆数を作ることができて，

$$\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{1}{y_n}-1$$

よって数列 $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ は公差 -1 の等差数列である．初項 $\frac{1}{y_0}$ は

$$\frac{1}{y_0}=\frac{1}{x_0-1}=\frac{1}{a-1}$$

であるから，

$$\frac{1}{y_n}=\frac{1}{a-1}+(-1)\cdot n=\frac{1-n(a-1)}{a-1}\qquad\therefore\quad y_n=\frac{a-1}{1-n(a-1)}$$

従って

$$x_n=y_n+1=\frac{a-1+1-n(a-1)}{1-n(a-1)}=\frac{a-n(a-1)}{1-n(a-1)}\qquad\text{(答)}$$

【2】いくつか記法上の約束をしておく．

- n を正整数として，1 から n までの正整数の集合を E_n で表す
  : $E_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$
- 有限集合 S について，$\#S$ で S の要素の個数を表す．
- 2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を $\binom{n}{r}$ で表す．

(1) **順列における加法等式** ${}_n\mathrm{P}_r={}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\cdot{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

Proof 1) 一般に ${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}$ であることに着目して，右辺から左辺を導く．

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}\\&=\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\\&=\frac{(n-r)(n-1)!+r(n-1)!}{(n-r)!}\\&=\frac{\{(n-r)+r\}(n-1)!}{(n-r)!}\\&=\frac{n\cdot(n-1)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}={}_n\mathrm{P}_r\quad\text{[証明終]}\end{aligned}$$

Proof 2) 集合 E_n から r 個をとって並べる順列全体からなる集合を P_n とすれば，$\#P_n={}_n\mathrm{P}_r$ である．P_n を次の 2 つの，互いに素な部分集合に分割する：

- E_n の要素 1 が現れない順列の集合を S_1,
- 1 が現れる順列の集合を S_2

とする.
S_1 は，集合 E_n から 1 を除いた集合 $E_n-\{1\}$ の要素を r 個並べてできる順列全体の集合であり，$\#(E_n-\{1\})=n-1$ であるから,

$$\#S_1={}_{n-1}\mathrm{P}_r$$

S_2 の要素は，集合 $E_n-\{1\}=\{2,\,3,\,\cdots,\,n\}$ から $(r-1)$ 個をとって一列に並べてできる順列それぞれに，そのどこかに 1 を付け加えてできる順列である．$\{2,\,3,\,\cdots,\,n\}$ から $(r-1)$ 個をとる順列の個数は ${}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$ 個あり，1 を付け加える場所は両端または隙間であるから r 通りある.
従って，積の法則により

$$\#S_2=r\cdot{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$$

よって

$$\#P_n=\#S_1+\#S_2={}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\cdot{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$$ ［証明終］

(2) **対称等式** $\dbinom{n}{r}=\dbinom{n}{n-r}$

一般に

$$\binom{n}{r}=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

が成り立つ．これを用いると

$$(\text{左辺})=\frac{n!}{r!\,(n-r)!},\quad(\text{右辺})=\frac{n!}{(n-r)!\,\{n-(n-r)\}!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

より成立. ［証明終］

(3) **吸収等式** $r\dbinom{n}{r}=n\dbinom{n-1}{r-1}$,（ただし $n\geqq 1$).

Proof 1)
左辺から右辺を導く.

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=r\cdot\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\\&=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}=n\binom{n-1}{r-1}=(\text{右辺})\end{aligned}$$ ［証明終］

Proof 2)
集合 $E_n=\{1,\,2,\,\cdots,\,n\}$ の r 元部分集合の個数は，異なる n 個のものから r 個をとる組合せの個数に等しいから，その個数は $\dbinom{n}{r}$ 個ある.
いま，$j=1,\,2,\,\cdots,\,n$ に関して，E_n からその要素 j を取り除いてできる集合を A_j と表す：

$$A_j=E_n-\{j\}=\{1,\,2,\,\cdots,\,j-1,\,j+1,\cdots,\,n\}$$

任意の j について，集合 A_j の $(r-1)$ 元部分集合の個数は，$(n-1)$ 個の異なるものから $(r-1)$ 個をとる組合せの個数になるから，それは $\dbinom{n-1}{r-1}$ 個ある.

ある j について，集合 A_j の $(r-1)$ 元部分集合それぞれに j を加えてできる集合を作ると，それは E_n の r 元部分集合で，これを $j=1,\,2,\,\cdots,\,n$ すべてについて行うと，重複を許して全部で $n\dbinom{n-1}{r-1}$ 個できる．この中に，同じ集合が何度重複しているかを考える．

いま，特に E_n の r 元部分集合 $\{1,\,2,\,\cdots,\,r\}$ を考えると，この集合は

- A_1 の $(r-1)$ 元部分集合 $\{2,\,3,\,\cdots,\,r\}$ に 1 を加えてできる．
- A_2 の $(r-1)$ 元部分集合 $\{1,\,3,\,\cdots,\,r\}$ に 2 を加えてできる．
- $\cdots\cdots$
- A_r の $(r-1)$ 元部分集合 $\{1,\,2,\,\cdots,\,r-1\}$ に r を加えてできる．

という，r 通りのでき方が考えられるから，重複度は r である．

これは一般に E_n の r 元部分集合 $\{a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_r\}$ について成り立つから，すべての r 元部分集合は，重複度 r で，つまり，r 回ずつ重複して数えて $n\dbinom{n-1}{r-1}$ 個ある．

従って

$$\binom{n}{r}=\frac{1}{r}\cdot n\binom{n-1}{r-1} \qquad \therefore\quad r\binom{n}{r}=n\binom{n-1}{r-1} \qquad \text{[証明終]}$$

(4) **加法等式** $\dbinom{n}{r}=\dbinom{n-1}{r-1}+\dbinom{n-1}{r}$

Proof 1)

右辺から左辺を導く．

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!}\\
&= \frac{(n-1)!\,r+(n-1)!\,(n-r)}{r!\,(n-r)!}\\
&= \frac{(n-1)!\,(r+n-r)}{r!\,(n-r)!}\\
&= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\binom{n}{r}=(\text{左辺}) \qquad \text{[証明終]}
\end{aligned}$$

Proof 2)

E_n の r 元部分集合全体を考える．これを次の 2 つに類別する：

- 要素 1 を含む r 元部分集合は，$E_n-\{1\}$ の $(r-1)$ 元部分集合に 1 を加えてできるから，その個数は $\dbinom{n-1}{r-1}$ 個ある．
- 要素 1 を含まない r 元部分集合は，$E_n-\{1\}$ の r 元部分集合に他ならないからその個数は $\dbinom{n-1}{r}$ 個ある．

E_n の r 元部分集合の個数は，これらの和に等しいから，加法等式が成り立つ． [証明終]

【3】(1) n に関する数学的帰納法による.

(I) $n=1$ のとき,

$$F_1(x)=(1+x)^2=1+2x+x^2$$

であるから, 確かに $P_1(x)=x$ とすれば題意の言う通りである.

(II) k を正整数として, $n=k$ のとき成立を仮定する. 数学的帰納法の仮定は, 次の (IH) である:

(IH): ある整数係数多項式 $P_k(x)$ が存在して

$$F_k(x)=(1+x)^{2^k}=1+2P_k(x)+x^{2^k}$$

が成り立つ.

$n=k+1$ のとき, $2^{k+1}=2^k\cdot 2$ に注意して

$$\begin{aligned}F_{k+1}(x)&=(x+1)^{2^{k+1}}=(1+x)^{2^k\cdot 2}=\left\{(1+x)^{2^k}\right\}^2=(F_k(x))^2\\&=\left(1+2P_k(x)+x^{2^k}\right)^2\end{aligned}$$

以下で, $P_k(x)$ を単に P と略記すると

$$\begin{aligned}F_{k+1}(x)&=(F_k(x))^2\\&=\left(1+2P+x^{2^k}\right)^2\\&=1+4P^2+x^{2^{k+1}}+4P+4P\cdot x^{2^k}+2x^{2^k}\\&=1+2\left(2P^2+2P+2P\cdot x^{2^k}+x^{2^k}\right)+x^{2^{k+1}}\end{aligned}$$

そこで,

$$2P^2+2P+2P\cdot x^{2^k}+x^{2^k}=P_{k+1}(x)$$

と定めれば, 確かに整数係数多項式 $P_{k+1}(x)$ がこのときも存在する.

以上, (I), (II) より, 任意の正整数 n について整数係数多項式 $P_n(x)$ が存在して,

$$F_n(x)=1+2P_n(x)+x^{2^n}$$

が成り立つ. ［証明終］

(2) 以下では, 2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を $\dbinom{n}{r}$ と表す.

2 項定理により

$$F_n(x)=(1+x)^{2^n}=\sum_{k=0}^{2^n}\binom{2^n}{k}x^k=1+\sum_{k=1}^{2^n-1}\binom{2^n}{k}x^k+2^{2^n}$$

(1) より，最右辺の第 2 項 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1}\binom{2^n}{k}x^k$ は，整数係数多項式 $P_n(x)$ の 2 倍，$2P_n(x)$ に恒等的に等しい：

$$\sum_{k=1}^{2^n-1}\binom{2^n}{k}x^k = 2P_n(x)$$

そこで，両辺の x^k （ただし $k=1, 2, \cdots, 2^n-1$）の係数を比べて，$k = 1, 2, \cdots, 2^n-1$ について，$\displaystyle\binom{2^n}{k}$ は偶数であることが示された.　　　[証明終]

(3) 加法等式

$$\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k}=\binom{N+1}{k}$$

において，$N=2^n-1$ とすれば

$$\binom{2^n-1}{k-1}+\binom{2^n-1}{k}=\binom{2^n}{k} \quad \therefore \binom{2^n-1}{k}=\binom{2^n}{k}-\binom{2^n-1}{k-1}$$

(2) より，$\displaystyle\binom{2^n}{k}$ が偶数であることが示されているから，$\displaystyle\binom{2^n-1}{k-1}$ が奇数ならば，$\displaystyle\binom{2^n-1}{k}$ も奇数となる．そこで，k に関する数学的帰納法により示す.

(I) $k=1$ のとき，$\displaystyle\binom{2^n}{1}=2^n$ は偶数であり，また，$\displaystyle\binom{2^n-1}{0}=1$ であるから，

$$\binom{2^n-1}{1}=\binom{2^n}{1}-\binom{2^n-1}{0}=2^n-1$$ は奇数となり，成立.

(II) p を 2^n-1 以下の正整数として，$k=p$ で成立を仮定する：

(IH)　2 項係数 $\displaystyle\binom{2^n-1}{p}$ は奇数である.

$k=p+1$ のとき，加法公式により

$$\binom{2^n-1}{p+1}=\binom{2^n}{p+1}-\binom{2^n-1}{p}$$

であり，(2) より右辺の第 1 項は偶数，(IH) より第 2 項は奇数であるから，左辺の $\displaystyle\binom{2^n-1}{p+1}$ は奇数である．よって $k=p+1$ のときも成り立つ.

以上，(I), (II) により，$k=1, 2, \cdots, 2^n-1$ について $\displaystyle\binom{2^n-1}{k}$ は奇数であることが示された.　　　[証明終]

【4】(1) k は整数とする．

(i) $n=3k$ のとき，$\omega^n=1$ であるから，

$$\begin{aligned}\omega^{2n}+\omega^n+1&=3,\\(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n&=(-\omega^2)^n+(-\omega)^n\\&=(-1)^n\omega^{2n}+(-1)^n\omega^n\\&=2(-1)^n\end{aligned}$$

(ii) $n=3k+1$ のとき，$\omega^n=\omega^{3k+1}=\omega$ より

$$\begin{aligned}\omega^{2n}+\omega^n+1&=\omega^2+\omega+1=0,\\(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n&=(-\omega^2)^n+(-\omega)^n\\&=(-1)^n(\omega^{2n}+\omega^n)\\&=(-1)^n(-1)=(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

(iii) $n=3k+2$ のとき，$\omega^n=\omega^{3k+2}=\omega^2$ より

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega+\omega^2+1=0,$$
$$\begin{aligned}(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n&=(-\omega^2)^n+(-\omega)^n\\&=(-1)^n(\omega^{2n}+\omega^n)\\&=(-1)^n(-1)=(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

以上より

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\begin{cases}3 & (3\mid n)\\ 0 & (3\nmid n)\end{cases}\quad,\quad (1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n=\begin{cases}2(-1)^n & (3\mid n)\\ (-1)^{n+1} & (3\nmid n)\end{cases}$$

(答)

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_{3N}\mathrm{C}_{3k}=S$ と置く．2 項定理より

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r x^r\ \cdots\cdots(*)$$

$(*)$ で $n=3N$，$x=\omega$ とすれば，

$$(1+\omega)^{3N}=\sum_{r=0}^{3N}{}_{3N}\mathrm{C}_r\omega^r\ \cdots\cdots①$$

$(*)$ で $n=3N$，$x=\omega^2$ とすれば，

$$(1+\omega^2)^{3N}=\sum_{r=0}^{3N}{}_{3N}\mathrm{C}_r\omega^{2r}\ \cdots\cdots②$$

(1) の (i) より，①，② の辺々を加えると

$$(\text{左辺})=(1+\omega)^{3N}+(1+\omega^2)^{3N}=2(-1)^N$$

右辺は

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{3N} {}_{3N}\mathrm{C}_r\omega^r + \sum_{r=0}^{3N} {}_{3N}\mathrm{C}_r\omega^{2r} \\
=&\sum_{k=0}^{N} {}_{3N}\mathrm{C}_{3k}(\omega^{3k}+\omega^{6k}) + \sum_{k=0}^{N-1} {}_{3N}\mathrm{C}_{3k+1}(\omega^{3k+1}+\omega^{6k+2}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \sum_{k=0}^{N-1} {}_{3N}\mathrm{C}_{3k+2}(\omega^{3k+2}+\omega^{6k+4}) \\
=&2\sum_{k=0}^{N} {}_{3N}\mathrm{C}_{3k} + (\omega^2+\omega)\sum_{k=0}^{N-1}({}_{3N}\mathrm{C}_{3k+1} + {}_{3N}\mathrm{C}_{3k+2}) \cdots\cdots (☆)
\end{aligned}$$

第 2 項は $-\sum_{k=0}^{N-1}({}_{3N}\mathrm{C}_{3k+1} + {}_{3N}\mathrm{C}_{3k+2})$ だから,

$$\begin{aligned}
(☆) &= 3\sum_{k=0}^{N} {}_{3N}\mathrm{C}_{3k} - \left(\sum_{k=0}^{N} {}_{3N}\mathrm{C}_{3k} + \sum_{k=0}^{N-1} {}_{3N}\mathrm{C}_{3k+1} + \sum_{k=0}^{N-1} {}_{3N}\mathrm{C}_{3k+2}\right) \\
&= 3\sum_{k=0}^{N} {}_{3N}\mathrm{C}_{3k} - \sum_{r=0}^{3N} {}_{3N}\mathrm{C}_r \\
&= 3\sum_{k=0}^{N} {}_{3N}\mathrm{C}_{3k} - (1+1)^{3N}
\end{aligned}$$

$\therefore \quad 2(-1)^N = 3S - 2^{3N}$ より, $\quad S = \dfrac{1}{3}\left\{2^{3N} + 2(-1)^N\right\}$ (答)

【5】(1) 与えられた 2 次方程式を解けば,

$$\gamma_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \gamma_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

である. $f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ で生成される数列 (これを「Fibonacci 数列」と呼ぶ) の一般項 f_n が,

$$f_n = \frac{{\gamma_+}^n - {\gamma_-}^n}{\sqrt{5}}$$

で得られることを, n に関する数学的帰納法により示す.

(I) $n = 1, 2$ のとき.

- $n = 1$ ならば
  $$\frac{\gamma_+ - \gamma_-}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = f_1$$
  で成立.
- $n = 2$ ならば
  $$\frac{{\gamma_+}^2 - {\gamma_-}^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\gamma_+ + \gamma_-)(\gamma_+ - \gamma_-)}{\sqrt{5}} = \frac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = f_2$$
  で成立.

(II) $n=k,\,k+1$ で成立を仮定する：

$$\text{(IH)}: f_k = \frac{{\gamma_+}^k - {\gamma_-}^k}{\sqrt{5}}, \quad f_{k+1} = \frac{{\gamma_+}^{k+1} - {\gamma_-}^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

$n=k+2$ のとき，与えられた漸化式により

$$\begin{aligned} f_{k+2} &= f_{k+1} + f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left({\gamma_+}^{k+1} - {\gamma_-}^{k+1} + {\gamma_+}^k - {\gamma_-}^k\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{{\gamma_+}^k(\gamma_+ + 1) - {\gamma_-}^k(\gamma_- + 1)\right\} \qquad \cdots(\#) \end{aligned}$$

ここで，γ_+ と γ_- は 2 次方程式 $t^2-t-1=0$ の解であるから，

$$\begin{cases} {\gamma_+}^2 - \gamma_+ - 1 = 0 \\ {\gamma_-}^2 - \gamma_- - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma_+ + 1 = {\gamma_+}^2 \\ \gamma_- + 1 = {\gamma_-}^2 \end{cases}$$

が成り立つ．よって $(\#)$ より

$$f_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left({\gamma_+}^k \cdot {\gamma_+}^2 - {\gamma_-}^k \cdot {\gamma_-}^2\right) = \frac{{\gamma_+}^{k+2} - {\gamma_-}^{k+2}}{\sqrt{5}}$$

となり，$n=k+2$ のときも成立.

以上 (I), (II) より，任意の正整数 n について $f_n = \dfrac{{\gamma_+}^n - {\gamma_-}^n}{\sqrt{5}}$ ［証明終］

(2) 1, 0 からできる数 X_n に現れる 0 の個数を α_n，1 の個数を β_n と定めれば，X_n の桁数 a_n は

$$a_n = \alpha_n + \beta_n$$

である.

X_n から X_{n+1} を作るとき，0 は 1 に，1 は 10 になるから，X_{n+1} に現れる 0, 1 について

- X_{n+1} における 0 の個数は X_n の 1 の個数に等しく，$\alpha_{n+1} = \beta_n$
- X_{n+1} における 1 の個数は X_n の 0 の個数と 1 の個数の和になり，$\beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$

従って，次の連立漸化式が成り立つ：

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \beta_n \\ \beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n \end{cases}$$

これから

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \\ &= \beta_{n+1} + (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) \\ &= (\alpha_n + \beta_n) + (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) \\ &= a_{n+1} + a_n \end{aligned}$$

従って数列 $\{a_n\}$ は，Fibonacci 数列 $\{f_n\}$ の漸化式と同じ漸化式によって生成される．ただし，$a_1 = 1$, $a_2 = 2$ であるから，初期条件が異なり，$a_n = f_{n+1}$ である．よって求める a_n は

$$a_n = \frac{{\gamma_+}^{n+1} - {\gamma_-}^{n+1}}{\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

(3) X_n は 1 と 10 を並べてできる文字列と考えられるから，0 が連続して現れることはない．また，末尾以外の 0 には必ず 1 が続くから，

文字列 “01” が表れる回数は，末尾以外の 0 の個数に等しい．$\cdots\cdots$(☆)

また，問題文で与えられた X_n の例から推定されるように，

n が奇数ならば末尾は 1 であり，n が偶数ならば末尾は 0 である．$\cdots\cdots$(†)

推定 (†) が正しいことは，帰納的に次のように示される：

- $X_1 = 1$ であるから，$k = 1$ で成立．
- k が奇数ならば，その末尾の 1 は X_{k+1} では “10” になるから，X_{k+1} の末尾は 0 で，$k+1$ は偶数．
- $k+1$ が偶数ならば，その末尾の 0 は X_{k+2} では 1 になるから，X_{k+2} の末尾は 1 で，$k+2$ は奇数．

よって，末尾以外の 0 の個数 b_n は (2) で定めた 0 の個数を表す α_n を用いて，(☆) から

- n が奇数ならば，$b_n = \alpha_n$
- n が偶数ならば，$b_n = \alpha_n - 1$

である．

(2) で定めた α_n，β_n について $\alpha_{n+1} = \beta_n$，$\beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$ であるから，

$$\alpha_{n+2} = \beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n = \alpha_n + \alpha_{n+1}$$

となり，α_n も Fibonacci 数列 $\{f_n\}$ の漸化式によって生成される．ただし，初期条件について，

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1 = f_1,\ \alpha_3 = 1 = f_2$$

であるから，$n \geqq 2$ の下で

$$\alpha_n = f_{n-1} = \frac{{\gamma_+}^{n-1} - {\gamma_-}^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

が成り立つ．

この式で，$n = 1$ とすると，右辺の値は 0 となり，これは $b_1 = 0$ に一致する．

以上より次が成り立つ：

$$b_n = \begin{cases} \alpha_n & = \dfrac{{\gamma_+}^{n-1} - {\gamma_-}^{n-1}}{\sqrt{5}} & (\text{ただし } 2 \nmid n) \\ \alpha_n - 1 & = \dfrac{{\gamma_+}^{n-1} - {\gamma_-}^{n-1}}{\sqrt{5}} - 1 & (\text{ただし } 2 \mid n) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) (i) $1 \leqq i \leqq k-1$ のとき

$$P(X=i)=0$$

(ii) $i \geqq k$ のとき

$X=i$ となるのは, 番号 1〜番号 $(i-1)$ の玉から $(k-1)$ 個と, 番号 i の玉との計 k 個を取り出す場合だから, その数は ${}_{i-1}\mathrm{C}_{k-1}$ 通り.

n 個の玉から k 個取り出す場合の数は ${}_{n}\mathrm{C}_{k}$ 通り.

これらは同様に確からしいので,

$$P(X=i)=\frac{{}_{i-1}\mathrm{C}_{k-1}}{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}$$

したがって,

$$P(X=i)=\begin{cases} 0 & (1 \leqq i \leqq k-1) \\ \dfrac{{}_{i-1}\mathrm{C}_{k-1}}{{}_{n}\mathrm{C}_{k}} & (k \leqq i \leqq n) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) $m+l-1=u$ とすると，証明すべき式は

$$\sum_{i=1}^{m}\left({}_{i+l-1}\mathrm{C}_{l}\cdot l!\right)={}_{m+l}\mathrm{C}_{l+1}\cdot l!$$

すなわち

$$\sum_{i=l}^{u}{}_{i}\mathrm{C}_{l}={}_{u+1}\mathrm{C}_{l+1}$$

と変形できるから，これが成り立つことを示す.

ここで

$${}_{i}\mathrm{C}_{l}={}_{i+1}\mathrm{C}_{l+1}-{}_{i}\mathrm{C}_{l+1}$$

だから

$$\sum_{i=l}^{u}{}_{i}\mathrm{C}_{l}=\sum_{i=l+1}^{u+1}{}_{i}\mathrm{C}_{l+1}-\sum_{i=l}^{u}{}_{i}\mathrm{C}_{l+1}={}_{u+1}\mathrm{C}_{l+1}$$

となり，題意は示された. [証明終]

２０章　解析（３）

問題

【1】(1)　$f(x) = mx^3 + nx^2 - 1$ と置くと

$$f'(x) = 3mx^2 + 2nx = x(3mx + 2n)$$

$n > m > 2$ より，$f(x)$ の増減は次の表のようになる:

x	$\cdots$	$-\dfrac{2n}{3m}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

この増減表より，極小値は

$$f(0) = -1 < 0$$

であり，また極大値は

$$f\left(-\frac{2n}{3m}\right) = \frac{4n^3 - 27m^2}{27m^2}$$

である．

ここで，m, n は整数で，$n > m > 2$ であるから

$$\begin{aligned} 4n^3 - 27m^2 &\geqq 4(m+1)^3 - 27m^2 \\ &= 4m^3 - 15m^2 + 12m + 4 \\ &= (m-2)^2(4m+1) > 0 \end{aligned}$$

が成り立ち，よって極大値は正である．

従って，3 次方程式 $mx^3 + nx^2 - 1 = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつ．　　［証明終］

(2)　(1) の増減表から

$$\alpha < \beta < 0 < \gamma$$

である．よって

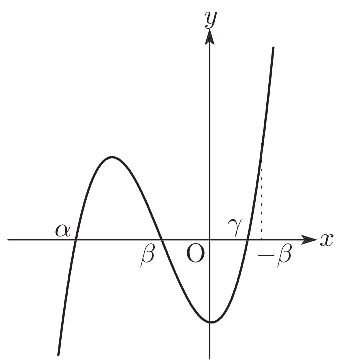
$$|\alpha| = -\alpha,\ |\beta| = -\beta,\ |\gamma| = \gamma$$

であり

$$|\beta| < |\alpha|$$

が成り立つ．

図１：$y = f(x)$



さらに

$$f(\beta) = m\beta^3 + n\beta^2 - 1 = 0$$

より

$$\begin{aligned} f(-\beta) &= -m\beta^3 + n\beta^2 - 1 \\ &= -2m\beta^3 \\ &> 0 \quad (\because m > 0,\ \beta < 0) \end{aligned}$$

であるから，$y = f(x)$ のグラフより

$$\gamma < -\beta \quad \Longleftrightarrow \quad |\gamma| < |\beta|$$

が成り立つ．以上より

$$|\gamma| < |\beta| < |\alpha| \qquad \text{(答)}$$

【2】 $(x^n)' = nx^{n-1}$ より，与えられた $f(x)$ について明らかに

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) \quad \cdots\cdots ①$$

まず，方程式 $f_1(x) = 1 + x = 0$ はただ 1 つの負の解 -1 をもつ．そこで奇数次の方程式

$$f_{2k-1}(x) = 0$$

がただ 1 つの負の解 α をもつと仮定すると

$$x \to \pm\infty \text{ のとき } f_{2k}(x) \to +\infty$$

であり，かつ ① により，

$$f_{2k}'(x) = 0$$

がただ 1 つの負の解 α をもつから，$f_{2k}(x)$ は $x = \alpha$ で極小となる．

関数 $f_{2k}(x)$ について，与えられた定義式から

$$f_{2k}(x) = f_{2k-1}(x) + \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

が成り立つ．よって $f_{2k-1}(\alpha) = 0$，$\alpha \fallingdotseq 0$ から

$$f_{2k}(\alpha) = f_{2k-1}(\alpha) + \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} = \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} > 0 \qquad \therefore \quad f_{2k}(x) > 0$$

これを ① と合わせれば

$$f_{2k+1}'(x) > 0$$

であるから，$f_{2k+1}(x)$ は増加関数である．よって，

$$x \to -\infty \text{ のとき } f_{2k+1}(x) \to -\infty$$

であり，また

$$f_{2k+1}(0) = 1 > 0$$

より，方程式 $f_{2k+1}(x) = 0$ はただ 1 つの負の解をもつ．

以上から数学的帰納法により，任意の正整数 k に対して，方程式 $f_{2k-1}(x) = 0$ はただ 1 つの負の解をもち，また $f_{2k}(x) > 0$ が任意の実数 x で成り立つから，方程式 $f_{2k}(x) = 0$ は実数解をもたない．

すなわち，題意は証明された． [証明終]

【3】(1) $f'(x)=3x^2-\dfrac{5}{3}$ だから $\mathrm{P}\left(t,\ t^3-\dfrac{5}{3}t\right)$ における接線の傾きは $3t^2-\dfrac{5}{3}$．よって

$3t^2-\dfrac{5}{3}\fallingdotseq 0$ のとき，法線の傾きは

$$-\frac{1}{3t^2-\frac{5}{3}}=\frac{-3}{9t^2-5} \qquad \therefore \quad n: y=\frac{-3}{9t^2-5}(x-t)+t^3-\frac{5}{3}t \qquad \text{(答)}$$

$3t^2-\dfrac{5}{3}=0$ のとき，すなわち，$t=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，法線 n の方程式は

$$x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{(複号同順)} \qquad \text{(答)}$$

(2) $3t^2-\dfrac{5}{3}=0$ のとき，法線 n は曲線 C に接しない。そこで，$3t^2-\dfrac{5}{3}\fallingdotseq 0$ のもとで，(1) で求めた法線 n が，曲線 C と接するような t の値を求める．図 2 を参照せよ．

$$x^3-\frac{5}{3}x=\frac{-3}{9t^2-5}(x-t)+t^3-\frac{5}{3}t$$

$$\Longleftrightarrow x^3-t^3+\frac{3}{9t^2-5}(x-t)-\frac{5}{3}(x-t)=0$$

$x\fallingdotseq t$ の下で両辺を $x-t$ で割って

$$x^2+tx+t^2+\frac{3}{9t^2-5}-\frac{5}{3}=0 \quad \cdots\cdots(\#)$$

x の方程式 (#) が重解をもつから，その判別式 $D=0$ となり，

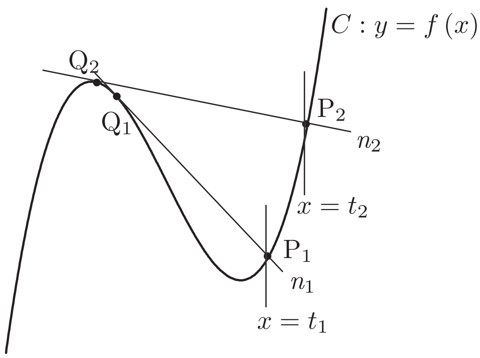
$$D=t^2-4\left(t^2+\frac{3}{9t^2-5}-\frac{5}{3}\right)=0 \Longleftrightarrow -3t^2-\frac{12}{9t^2-5}+\frac{20}{3}=0$$

$$\Longleftrightarrow 81t^4-225t^2+136=0 \Longleftrightarrow (9t^2-8)(9t^2-17)=0$$

$$\therefore \quad t=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \pm\frac{\sqrt{17}}{3} \qquad \text{(答)}$$

(3) $t_1=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$t_2=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ で図 2 のようになる．

図 2 ：法線が接線になる



一般に，次の積分計算が成り立つ：

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3\,dx+(\alpha-\beta)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4\right]_\alpha^\beta + (\alpha-\beta)\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta$$
$$= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4 - \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4$$
$$= -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

従って，3 次の係数が a である 3 次関数 $y = g(x)$ と直線 ℓ が $(\alpha,\ g(\alpha))$ で接し，かつ $(\beta,\ g(\beta))$ で交わるとき，$y = g(x)$ のグラフと ℓ で囲まれる部分の面積 s は

$$s = \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

と表される．

問題にもどり，(#) の重解は $x = -\dfrac{t}{2}$ であるから，$\mathrm{P_1Q_1}$ と C で囲まれる部分の面積 s_1，および $\mathrm{P_2Q_2}$ と C で囲まれる部分の面積 s_2 は

$$s_1 = \frac{1}{12}\left\{t_1 - \left(-\frac{1}{2}t_1\right)\right\}^4 = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{2}t_1\right)^4 = \frac{27}{64}{t_1}^4$$
$$s_2 = \frac{1}{12}\left\{t_2 - \left(-\frac{1}{2}t_2\right)\right\}^4 = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{2}t_2\right)^4 = \frac{27}{64}{t_2}^4$$

よって，求める面積 S は

$$S = \frac{27}{64}{t_2}^4 - \frac{27}{64}{t_1}^4 = \frac{27}{64}\cdot\frac{17^2-8^2}{3^4} = \frac{75}{64} \qquad \text{(答)}$$

【4】与式は t に関する積分であり，t にとって x は無関係な定数であるから，

$$f_n(x) = 3x^2\int_0^1 tf'_{n-1}(t)\,dt + 3\int_0^1 f_{n-1}(t)\,dt$$

と変形できる．ここで

$$a_n = 3\int_0^1 tf'_{n-1}(t)\,dt$$
$$b_n = 3\int_0^1 f_{n-1}(t)\,dt$$

と置くと，

$$f_n(x) = a_nx^2 + b_n \quad (n \geqq 2)$$

$f_1(x) = 4x^2 + 1$ より，

$$a_1 = 4,\quad b_1 = 1$$

これより，

$$a_n = 3\int_0^1 t(2a_{n-1}t)\,dt = 2a_{n-1}$$
$$\therefore\quad a_n = 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \cdots ①$$

また，

$$b_n = 3\int_0^1 (a_{n-1}t^2 + b_{n-1})\,dt = a_{n-1} + 3b_{n-1} = 2^n + 3b_{n-1} \quad (\because ①)$$
$$\therefore\quad \frac{b_n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}}$$

n を $n+1$ にして，階差数列を作れば

$$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{b_n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\therefore \frac{b_n}{3^n} = \frac{b_1}{3} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}$$

従って

$$\begin{aligned} b_n &= 3^{n-1} + 3^n\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right) \\ &= 3^{n-1} + 4\cdot 3^{n-1} - 2^{n+1} \\ &= 5\cdot 3^{n-1} - 2^{n+1} \end{aligned}$$

以上より

$f_n(x) = 2^{n+1}\cdot x^2 + 5\cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}$　　(答)

添削課題

【1】C' の方程式は

$$y=(x-a)^3+a$$

であり，C と C' の交点の x 座標は

$$(x-a)^3+a=x^3$$

$$3x^2-3ax+a^2-1=0\cdots\cdots①$$

の実数解だから，異なる 2 点で交わる条件は，

$$9a^2-12(a^2-1)>0 \qquad \therefore\quad a^2<4$$

$a>0$ に注意すると

$$0<a<2 \quad \text{（答）}$$

このとき，① の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると

$$3x^2-3ax+a^2-1=3(x-\alpha)(x-\beta)$$

だから，C と C' の囲む図形の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{(x-a)^3+a-x^3\}\,dx=-3a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{a(\beta-\alpha)^3}{2}$$

$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=\dfrac{a^2-1}{3}$ より

$$(\beta-\alpha)^2=a^2-\frac{4}{3}(a^2-1)=\frac{4-a^2}{3}$$

だから

$$S=\frac{a(4-a^2)^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{3}} \quad \text{（答）}$$

S が最大になるのは

$$(6\sqrt{3}S)^2=a^2(4-a^2)^3$$

が最大になる場合である．そこで $t=4-a^2$ とすると

$$f(t)=a^2(4-a^2)^3=(4-t)t^3=4t^3-t^4\ (0<t<4)$$

であり

$$f'(t)=12t^2-4t^3=4t^2(3-t)$$

だから，$f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0		3		4
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	最大	↘	

よって，$t=3$ つまり $a=1$ のとき最大で，S の最大値は $\dfrac{1}{2}$ 　（答）

M3JSB/M3JB/M3TB
選抜東大クラス文系数学
東大文系数学
難関大文系数学 T

Z-KAI

会員番号		氏　名	