M3MA

本科 2 期 10 月度

解答

Z会東大進学教室

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学 M

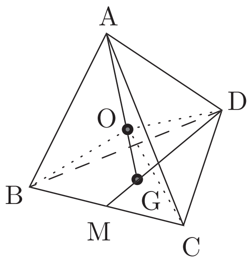
問題

以下必要に応じてベクトル (x, y, z) を縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を用いて表す.

【1】正 4 面体 ABCD に外接する球の中心を O とし，AO と平面 BCD の交点を G とすると

$\quad$ AG $\perp$ 平面 BCD

である．また，正 4 面体の対称性より，G は△ BCD の重心と一致し，BC の中点 M に対して，平面 AMD による切り口を考える.



正 4 面体の 1 辺の長さを a とすると

$$\mathrm{MD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

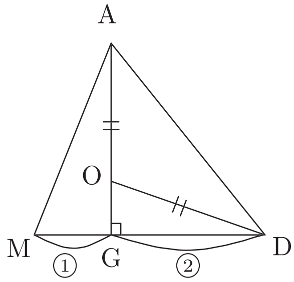
であり，G は△ BCD の重心なので

$$\mathrm{MG} : \mathrm{GD} = 1 : 2$$

であるから

$$\mathrm{GD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

よって，△ AGD に 3 平方の定理を用いて



$$\mathrm{AG} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$$\mathrm{OG} = \sqrt{\frac{2}{3}}a - 1$$

さらに，△ OGD に 3 平方の定理を用いて

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a - 1\right)^2 + \frac{a^2}{3} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}a^2 + \frac{a^2}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}a = 0$$

$$\therefore \quad \left(a - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)a = 0$$

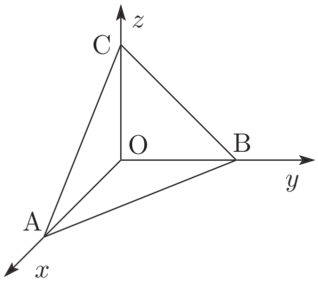
$a \fallingdotseq 0$ であるから，求める 1 辺の長さは

$$a = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{a^2+c^2}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = a^2$

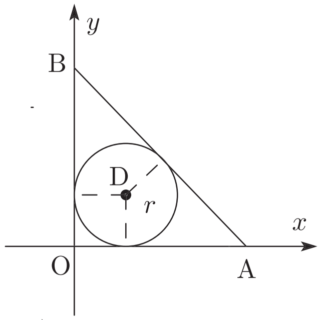


であるから

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\triangle$ OAB の内接円の中心を D とし，半径を r とすると，面積について



$$\triangle \mathrm{OAB} = \triangle \mathrm{OAD} + \triangle \mathrm{OBD} + \triangle \mathrm{ABD}$$

$$\iff \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}r\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{r = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 4 面体 OABC の内接球の中心を E とし，半径を R とすると，体積について

$$\begin{aligned}
(4\text{ 面体 OABC}) &= (4\text{ 面体 EOAB}) + (4\text{ 面体 EOBC}) \\
&\qquad + (4\text{ 面体 EOCA}) + (4\text{ 面体 EABC}) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OAB}\cdot R + \frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OBC}\cdot R \\
&\qquad + \frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OCA}\cdot R + \frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{ABC}\cdot R \\
&= \frac{R}{3}\left(\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ca}{2}+\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2}\right) \\
&= \frac{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{6}R
\end{aligned}$$

よって，OC $\perp$ 平面 OAB より，4 面体 OABC の体積は $\dfrac{abc}{6}$ であるから

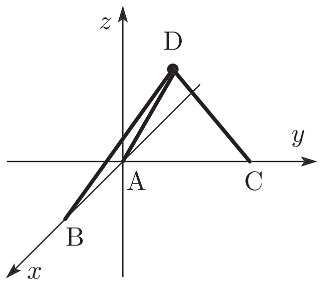
$$\frac{abc}{6} = \frac{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{6}R$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{R = \frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}} \qquad \text{(答)}$$

【3】AB $=3$, AC $=4$, BC $=5$ より AB $\perp$ AC であるから A$(0,\,0,\,0)$, B$(3,\,0,\,0)$, C$(0,\,4,\,0)$ とおけ

D$(x,\,y,\,z)$ $(z>0)$

として, D の座標を求める．AD $=6$, BD $=7$, CD $=8$ より



$$x^2+y^2+z^2=36 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$(x-3)^2+y^2+z^2=49 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

$$x^2+(y-4)^2+z^2=64 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

② − ① より

$$-6x+9=13 \qquad \therefore \quad x=-\frac{2}{3}$$

③ − ① より

$$-8y+16=28 \qquad \therefore \quad y=-\frac{3}{2}$$

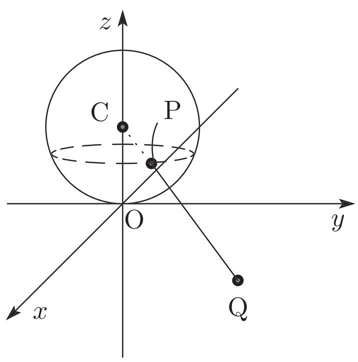
よって，①より

$$\frac{4}{9}+\frac{9}{4}+z^2=36 \qquad \therefore \quad z=\frac{\sqrt{1199}}{6}$$

一方，$\triangle$ ABC $=\dfrac{3\cdot 4}{2}=6$ であるから，求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{1199}}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{1199}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1-1 \end{pmatrix}$ より，直線 CP のベクトル方程式は，k を媒介変数として



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1-1 \end{pmatrix}$$

この直線は点 Q$(u,\,v,\,0)$ を通るので

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ k(z_1-1)+1 \end{pmatrix}$$

よって，$z_1 \neq 1$ より

$$k=\frac{1}{1-z_1}$$

であるから

$$\boldsymbol{u=\frac{x_1}{1-z_1},\ v=\frac{y_1}{1-z_1}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より

$x_1 = u(1-z_1),\ y_1 = v(1-z_1)$

であり，x_1，y_1，z_1 は

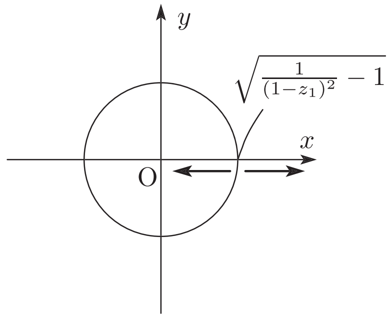
$x_1{}^2 + y_1{}^2 + (z_1-1)^2 = 1$

をみたすので

$u^2(1-z_1)^2 + v^2(1-z_1)^2 + (z_1-1)^2 = 1$

$\therefore\ \ (1-z_1)^2(u^2+v^2+1) = 1$

$\therefore\ \ u^2+v^2 = \dfrac{1}{(1-z_1)^2} - 1$



よって，z_1 を固定すると，点 Q は xy 平面上の原点 O を中心とし，半径 $\sqrt{\dfrac{1}{(1-z_1)^2}-1}$ の円を描く．さらに，$0 \leqq z_1 < 1$ より

$\dfrac{1}{(1-z_1)^2} - 1 \geqq 0$

のすべての実数値をとり得る．したがって，$u^2+v^2 = \dfrac{1}{(1-z_1)^2} - 1$ をみたす任意の実数 u，v が存在するので，点 Q は xy 平面全体を動く． （証終）

(3) (1) より

$1-z_1 = \dfrac{x_1}{u},\ y_1 = v(1-z_1) = \dfrac{x_1 v}{u}$

であり，$x_1 = a$ なので

$1-z_1 = \dfrac{a}{u},\ y_1 = \dfrac{av}{u}$

よって $x_1{}^2 + y_1{}^2 + (z_1-1)^2 = 1$ をみたすので

$a^2 + \dfrac{a^2v^2}{u^2} + \dfrac{a^2}{u^2} = 1$

$\therefore\ \ (1-a^2)u^2 - a^2v^2 = a^2$

したがって，点 Q が描く図形の方程式は

$\boldsymbol{(1-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2}$ **(答)**

≪注≫本問では「軌跡の方程式を求めること」が要求されていたので，限界についてはとくに調べていないが「軌跡を求めよ」と言った場合には，軌跡の限界についても調べなければならない．軌跡の限界については $z_1 < 1$ より

$1-z_1 = \dfrac{a}{u} > 0$

であり，$a > 0$ なので

$u > 0$

よって，点 Q の描く軌跡は

双曲線 $\left(\dfrac{1}{a^2} - 1\right)x^2 - y^2 = 1$ の $x > 0$ の部分

１７章－２　２次曲線（２）

問題

【1】(1)　(i) $(1,\ -2)$ における接線の方程式は

$$\frac{1\cdot x}{2}+\frac{-2\cdot y}{8}=1$$

$\therefore\quad \boldsymbol{2x-y-4=0}$　(答)

(ii) $(-2,\ \sqrt{2})$ における接線の方程式は

$$\frac{-2x}{4}-\sqrt{2}y=-1$$

$\therefore\quad \boldsymbol{x+2\sqrt{2}y-2=0}$　(答)

(2)　(i) 接点を $(p,\ q)$ とおくと，接線の方程式は

$$\frac{px}{9}+\frac{qy}{4}=1 \qquad \therefore\quad 4px+9qy=36$$

これが点 $(-3,\ -2\sqrt{2})$ を通るので

$$-12p-18\sqrt{2}q=36 \qquad \therefore\quad 2p+3\sqrt{2}q+6=0$$

また

$$4p^2+9q^2=36$$

であるから

$$(3\sqrt{2}q+6)^2+9q^2=36 \qquad \therefore\quad (p,\ q)=(-3,\ 0),\ \left(1,\ -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

よって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$\left\{\begin{array}{ll}\boldsymbol{x=-3} & \boldsymbol{(-3,\ 0)}\\ \boldsymbol{y=\dfrac{\sqrt{2}}{6}x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}} & \boldsymbol{\left(1,\ -\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)}\end{array}\right. \quad \text{(答)}$$

(ii) 接点を $(p,\ q)$ とおくと，接線の方程式は

$$qy=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x+p)=-x-p$$

これが点 $(4,\ -1)$ を通るので

$$-q=-4-p$$

また

$$q^2=-2p$$

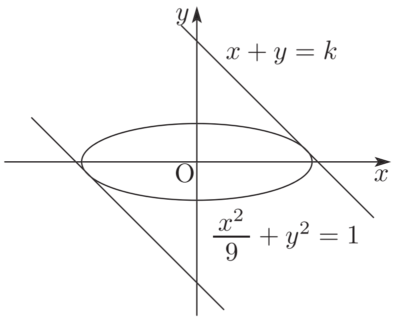
であるから

$$q^2=2(4-q) \qquad \therefore\quad (p,\ q)=(-2,\ 2),\ (-8,\ -4)$$

よって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$\left\{\begin{array}{ll}\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x+1} & \boldsymbol{(-2,\ 2)}\\ \boldsymbol{y=\dfrac{1}{4}x-2} & \boldsymbol{(-8,\ -4)}\end{array}\right. \quad \text{(答)}$$

(3) $x+y=k$ とおいて，これを xy 平面上の直線とみると，右図のように，だ円 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ とこの直線が接するとき k の値は最大値，最小値をとる．



y を消去して

$$\frac{x^2}{9}+(k-x)^2=1$$

$$\therefore\quad 10x^2-18kx+9k^2-9=0$$

これが重解をもつ場合を考えればよく，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=81k^2-10(9k^2-9)=0$$

$$\therefore\quad k^2-10=0$$

k が最大となるのは $k>0$ で接する場合であるから $k=\sqrt{10}$. このとき

$$10x^2-18\sqrt{10}x+81=0$$

$$\therefore\quad (\sqrt{10}x-9)^2=0$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=\left(\frac{9}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

であるから，求める $x+y$ の最大値は

$\boldsymbol{\sqrt{10}}$ 　(答)

【2】(1) 共有点の x 座標は 2 式より y を消去して得られる x の方程式

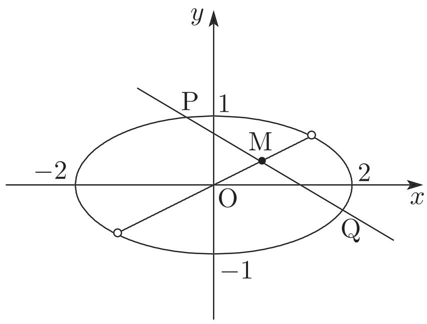
$$x^2+(k-x)^2-4=0$$

$$\therefore\quad 2x^2-2kx+(k^2-4)=0\ \cdots\cdots\ ①$$

の 2 つの実数解である．よって，2 交点をもつための条件は，上式の判別式を D として

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-4)>0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}}$$ (答)



(2) ①の 2 実数解を x_1，x_2 とすると，中点 $\mathrm{M}(X,\ Y)$ について，解と係数の関係より

$$X=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{2}$$

ここで，$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$ より

$$-\sqrt{2}<X<\sqrt{2}$$

また，$\mathrm{M}(X,\ Y)$ は直線 $x+2y=k$ 上にあるから

$$X+2Y=k$$

$$\therefore\quad Y=\frac{1}{2}X\quad(-\sqrt{2}<X<\sqrt{2})$$

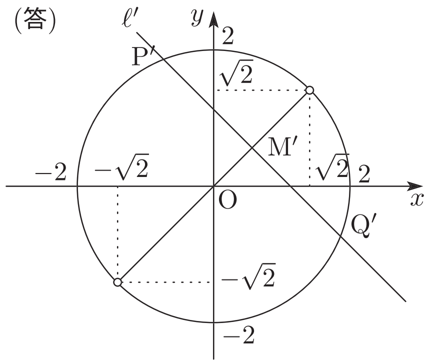
よって，求める軌跡は

線分 $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x\quad(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})}$ (答)

≪別解≫

だ円 $x^2+4y^2=4$ と直線 $\ell : x+2y=k$ を y 軸方向に 2 倍に拡大すると，それぞれ円 $x^2+y^2=4$, 直線 $\ell' : x+y=k$ となる．

この円と直線 ℓ' の交点 P'，Q' を結ぶ線分 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ の中点 $\mathrm{M}'(X',\ Y')$ は，対称性より直線 $y=x$ 上の点である．



定義域は

$$-\sqrt{2}<X'<\sqrt{2}$$

よって，点 M' の軌跡は線分 $y=x\ (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$ であり，これを y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に拡大すると点 M の軌跡が得られる．

すなわち，点 M の軌跡は

線分 $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x\quad(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})}$ (答)

【3】(1) $x^2+9y^2=9,\ y=mx+k$ から y を消去して

$$x^2+9(mx+k)^2=9$$

$\therefore\quad (9m^2+1)x^2+18mkx+9k^2-9=0$

この 2 次方程式が重解をもてばよく，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=81m^2k^2-(9m^2+1)(9k^2-9)=0$$

$\therefore\quad 9m^2-k^2+1=0$

$\therefore\quad \boldsymbol{k=\pm\sqrt{9m^2+1}}$　　**(答)**

(2) $\mathrm{P}(p,\ q)$ とすると

$$p^2+q^2=10 \quad \cdots\cdots ①$$

(i) $p=\pm3$ のとき，①より

$q=\pm1 \qquad \therefore\quad \mathrm{P}(\pm3,\ \pm1)$ (複号任意)

よって，点 P からだ円 C に引いた接線は両軸に平行であり，2 接線は直交する．

(ii) $p\fallingdotseq\pm3$ のとき，接線の方程式は (1) より

$$y=mx\pm\sqrt{9m^2+1}$$

これが点 P を通るので

$$mp\pm\sqrt{9m^2+1}=q \Longleftrightarrow 9m^2+1=(q-mp)^2$$

$\therefore\quad (p^2-9)m^2-2pqm+q^2-1=0$

この判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=p^2q^2-(p^2-9)(q^2-1)$$
$$=8q^2+1>0 \quad (\because\ ①)$$

となり，相異なる 2 実数解 $m_1,\ m_2$ をもつので，解と係数の関係より

$$m_1m_2=\frac{q^2-1}{p^2-9}=\frac{(10-p^2)-1}{p^2-9}$$
$$=-1$$

よって，2 接線は直交する．

(i), (ii) より，点 P からだ円 C に引いた 2 本の接線は直交する．　（証終）

【4】(1) 円上の点 Q$(x_1,\ y_1)$, R$(x_2,\ y_2)$ における接線の方程式はそれぞれ

$x_1x+y_1y=1,\quad x_2x+y_2y=1$

これらは点 P を通るので

$x_1x_0+y_1y_0=1,\quad x_2x_0+y_2y_0=1$

よって，直線 $x_0x+y_0y=1$ は点 Q, R を通る．

したがって，直線 ℓ の方程式は，$x_0x+y_0y=1$ ・・・・・・ ① である．（証終）

(2) 双曲線の方程式を

$x^2-y^2=1$ ・・・・・・ ②

とおく．①, ②より，y を消去すると

$x^2-\dfrac{1}{{y_0}^2}(1-x_0x)^2=1$

$({x_0}^2-{y_0}^2)x^2-2x_0x+{y_0}^2+1=0\ \cdots(*)$

ここで，点 P は双曲線上の点だから，${x_0}^2-{y_0}^2=1$ を $(*)$ に代入して

$x^2-2x_0x+{x_0}^2=0$

$\therefore\quad (x-x_0)^2=0$ すなわち $x=x_0$（重解）

であるから，直線 ℓ は双曲線に接する．（証終）

問題

【1】$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ より

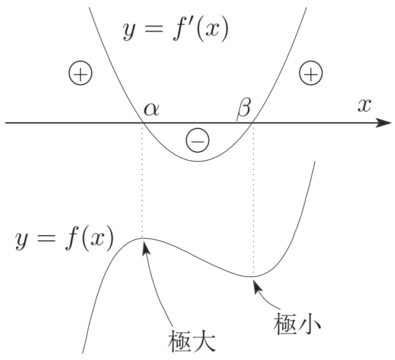
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

であり，$f(x)$ の極値が存在するので，

$f'(x) = 0$ の判別式 D に対して

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3b > 0$$

のもとで考える．



$x = \alpha$ で極大，$x = \beta$ で極小となるので

$$f'(\alpha) = 0,\ f'(\beta) = 0,\ \alpha < \beta$$

をみたす．

(1) $f(x)$ を $f'(x)$ で割ると

商：$\dfrac{1}{3}x + \dfrac{a}{9}$

余り：$\left(\dfrac{2}{3}b - \dfrac{2}{9}a^2\right)x + c - \dfrac{ab}{9}$

であるから

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{a}{9}\right)f'(x) + \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)x + c - \frac{ab}{9}$$

が成り立つ．すると

$$f(\alpha) = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)\alpha + c - \frac{ab}{9}$$

$$f(\beta) = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)\beta + c - \frac{ab}{9}$$

$$\therefore\quad f(\alpha) + f(\beta) = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)(\alpha + \beta) + 2c - \frac{2ab}{9}$$

また，$f'(x) = 0$ の 2 解が α，β なので解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{3}a,\ \alpha\beta = \frac{b}{3}$$

よって

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)\left(-\frac{2}{3}a\right) + 2c - \frac{2ab}{9} \\ &= \frac{4}{27}a^3 - \frac{4}{9}ab + 2c - \frac{2ab}{9} \\ &= \frac{4}{27}a^3 - \frac{2ab}{3} + 2c \quad \cdots\cdots \text{①} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$$

一方

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= f\left(-\frac{a}{3}\right) = \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c \\ &= \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

が成立する．（証終）

(2) (1) と同様にして

$$f(\alpha)-f(\beta)=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)(\alpha-\beta)$$

であり，$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a,\ \alpha\beta=\dfrac{b}{3}$ より

$$a=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta),\ b=3\alpha\beta$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2&=\frac{2}{3}\cdot 3\alpha\beta-\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{4}(\alpha+\beta)^2\\&=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\\&=-\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{2}=-\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\end{aligned}$$

よって

$$f(\alpha)-f(\beta)=-\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\cdot(\alpha-\beta)=\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}$$

が成り立つ. （証終）

≪別解≫ $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ より

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=\Big[f(x)\Big]_{\beta}^{\alpha}=\int_{\beta}^{\alpha}f'(x)dx\\&=\int_{\beta}^{\alpha}3(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=-\frac{3}{6}(\alpha-\beta)^3\\&=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

が成立する. （証終）

(3)

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\\=&\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{\alpha}^{\beta}\\=&\frac{1}{4}(\beta^4-\alpha^4)+\frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{b}{2}(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)\\=&\frac{\beta-\alpha}{2}\left\{\frac{(\beta^2+\alpha^2)(\beta+\alpha)}{2}+\frac{2a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3}+b(\beta+\alpha)+2c\right\}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)}{2}+\frac{2a}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+2c$$

すると

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b$$

より

$$\begin{aligned}\frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx&=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)\\&\quad+\frac{2a}{3}\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b+\frac{b}{3}\right)+b\left(-\frac{2a}{3}\right)+2c\\&=\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab+2c\end{aligned}$$

よって，(1) の ① より

$$f(\alpha)+f(\beta)=\frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

が成立する．　（証終）

【2】円 $(x-t-1)^2+y^2=\dfrac{a}{t+1}$ の外部を表す不等式は

$$(x-t-1)^2+y^2-\frac{a}{t+1}>0$$

であり，この領域に点 (2, 1) がつねにあるためには 0 以上のすべての実数 t に対して

$$(2-t-1)^2+1^2-\frac{a}{t+1}>0$$

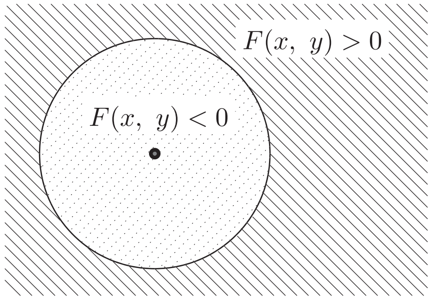
$$\iff t^2-2t+2-\frac{a}{t+1}>0$$

$$\iff (t+1)(t^2-2t+2)>a\ (\because t+1>0)$$

$$\iff t^3-2t^2+2t+t^2-2t+2>a$$

$$\iff t^3-t^2+2>a$$

が成り立つことである．



$$F(x,\ y)=(x-t-1)^2+y^2-\frac{a}{t+1}$$

$f(t)=t^3-t^2+2$ とおくと

$$f'(t)=3t^2-2t=3t\left(t-\frac{2}{3}\right)$$

なので，$t \geqq 0$ における $f(t)$ の増減は下表のようになる．

t	0		$\frac{2}{3}$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	極小	↗

したがって，$t \geqq 0$ において，$f(t)>a$ がつねに成立するためには

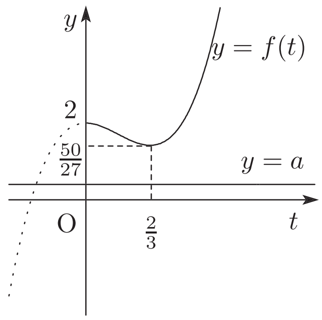
$$f\left(\frac{2}{3}\right)>a$$

であればよく

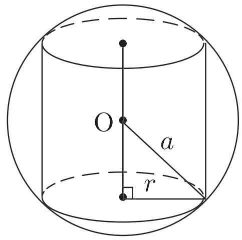
$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}-\frac{4}{9}+2=\frac{8-12+54}{27}=\frac{50}{27}$$

なので

$$\boldsymbol{0<a<\frac{50}{27}}\qquad \text{(答)}$$



【3】球の中心を O とし，円柱の底面の半径を r $(0 < r < a)$ とする．円柱の上底，下底の円の中心を通る平面による切り口を考えると



$$(\text{円柱の高さ}) = 2\sqrt{a^2 - r^2}$$

よって円柱の体積 V は

$$V = \pi r^2 \cdot 2\sqrt{a^2 - r^2}$$
$$= 2\pi\sqrt{a^2r^4 - r^6}$$

$r^2 = x$ とし

$$f(x) = a^2x^2 - x^3 \ (0 < x < a^2)$$

の増減を調べる．

$$f'(x) = 2a^2x - 3x^2 = -3x\left(x - \frac{2}{3}a^2\right)$$

より，$0 < x < a^2$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0		$\frac{2}{3}a^2$		a^2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ここで

$$f\left(\frac{2}{3}a^2\right) = a^2 \cdot \frac{4}{9}a^4 - \frac{8}{27}a^6$$
$$= \frac{4}{27}a^6$$

であるから，求める最大値は

$$V = 2\pi\sqrt{\frac{4}{27}a^6} = \frac{4a^3}{3\sqrt{3}}\pi = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{9}a^3\pi} \qquad (\text{答})$$

【4】(1)

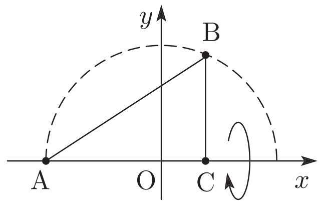
$$\mathrm{AB} = \sqrt{(t+1)^2 + (1-t^2)}$$
$$= \sqrt{2(1+t)}$$

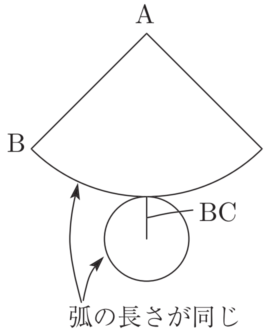
$$2\pi\mathrm{BC} = 2\pi\sqrt{1-t^2}$$

より，側面の展開図は右下図のようになり

$$S(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2(1+t)} \cdot 2\pi\sqrt{1-t^2}$$
$$= \boldsymbol{\pi\sqrt{2(1-t^2)(1+t)}} \qquad \text{(答)}$$

である．





(2) $f(t) = (1-t^2)(1+t)\ (-1 < t < 1)$ とおくと

$$f'(t) = (-3t^2 - 2t + 1)$$
$$= -(3t-1)(t+1)$$

より，$f(t)$ の増減は下表のようになる．

t	-1		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	

$f(t)$ が最大のとき $S(t)$ も最大になるから，求める t は

$$\boldsymbol{t = \frac{1}{3}} \qquad \text{(答)}$$

である．

１８章－２　総合演習（１）

問題

【1】(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{e^x+x-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\left(\frac{e^x-1}{x}+1\right)\ \cdots(*)$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ であり，$f(x)=e^x$ とすると

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

で，$f'(0)=e^0=1$ より

$(*)=1\cdot(1+1)=\mathbf{2}$　　(答)

(2) ①　$\displaystyle\lim_{x\to 3}(x-3)=0$

であるので，題意をみたすためには分子に関して

$$\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+k}-3)=\sqrt{3+k}-3=0$$

であることが必要．よって，$k=\mathbf{6}$　　(答)

また，$k=6$ のとき，極限値は

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+6)-3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\quad\text{(答)}$$

②　$$\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^2-(1+x)}{x^2(1+ax+\sqrt{1+x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x^2+(2a-1)x}{x^2(1+ax+\sqrt{1+x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2+\frac{2a-1}{x}}{1+ax+\sqrt{1+x}}\ \cdots(*)$$

ここで，$(*)$ について，分母は有限な値 2 に収束するので，題意をみたすには，分子が有限な値に収束することが必要．よって

$2a-1=0$　　　　$\therefore\ a=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$　　(答)

このとき

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}x+\sqrt{1+x}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\quad\text{(答)}$$

【2】(1) $n=6$ のとき，例 1，例 2 の図は右図のようになるので，R_6 に関して

$$1+R_6=2R_6$$

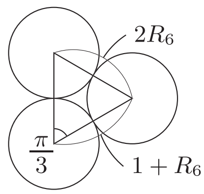
$$\therefore\ R_6=\mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

また，r_6 に関して

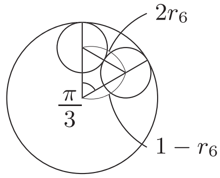
$$1-r_6=2r_6$$

$$\therefore\ r_6=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \qquad \text{(答)}$$

（例 1）

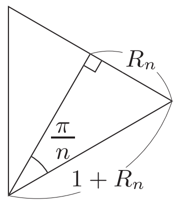


（例 2）

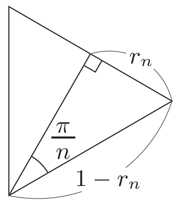


(2) 右図の例 1 より

（例 1）



（例 2）



$$R_n=(1+R_n)\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)R_n=\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\therefore\quad R_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\left(\because\ \sin\frac{\pi}{n}\fallingdotseq 1\right)$$

また，右図の例 2 より

$$r_n=(1-r_n)\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)r_n=\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\therefore\quad r_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\quad\left(\because\ \sin\frac{\pi}{n}\fallingdotseq -1\right)$$

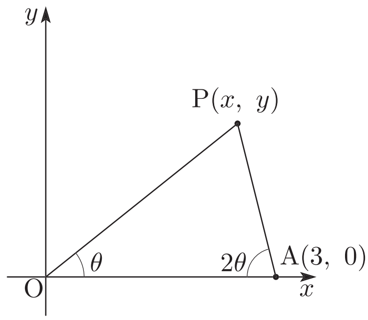
ここで

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}n^2(R_n-r_n)\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}-\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}-\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}}{\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{2\sin^2\frac{\pi}{n}}{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}\quad\cdots(*)
\end{aligned}$$

ここで，$\frac{\pi}{n}=t$ とおくと，$n\to\infty$ のとき，$t\to 0$ となり

$$\begin{aligned}
(*)&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\pi}{t}\right)^2\cdot\frac{2\sin^2 t}{1-\sin^2 t}\\
&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\cdot\frac{2\pi^2}{\cos^2 t}\\
&=\boldsymbol{2\pi^2}\qquad\text{(答)}
\end{aligned}$$

【3】(1) $\angle\mathrm{OPA} = \pi - 3\theta$ であり，正弦定理より



$$\mathrm{OP} = \frac{\mathrm{OA}}{\sin\angle\mathrm{OPA}}\cdot\sin\angle\mathrm{OAP} = \frac{3\sin 2\theta}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{3\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

よって

$$x = \mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{POA} = \frac{3\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\cdot\cos\theta = \boldsymbol{\frac{3\sin 2\theta\cos\theta}{\sin 3\theta}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より

$$\lim_{\theta\to 0+0} x = \lim_{\theta\to 0+0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\cdot 2\cos\theta = \mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $y' = e^x$ より，$\mathrm{A}_0\ (0,\ 1)$ における接線の方程式は

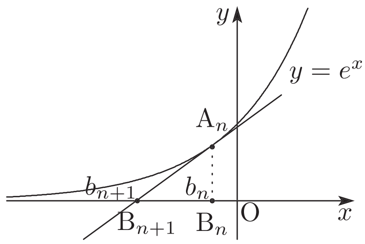
$$y = e^0 x + 1 = x + 1$$

これと x 軸との交点が $\mathrm{B}_1\ (b_1,\ 0)$ なので

$$0 = b_1 + 1$$

$$\therefore\ \boldsymbol{b_1 = -1} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\mathrm{A}_n\ (b_n,\ e^{b_n})$ における接線の方程式は



$$y = e^{b_n}(x - b_n) + e^{b_n} = e^{b_n}x + e^{b_n}(1 - b_n)$$

これと x 軸との交点が $\mathrm{B}_{n+1}\ (b_{n+1},\ 0)$

であるので

$$0 = e^{b_n}\cdot b_{n+1} + e^{b_n}(1 - b_n) = e^{b_n}\cdot(1 - b_n + b_{n+1})$$

ここで，$e^{b_n} \neq 0$ より

$$1 - b_n + b_{n+1} = 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{b_{n+1} = b_n - 1} \qquad \text{(答)}$$

よって，$\{b_n\}$ は初項 -1，公差 -1 の等差数列であるので

$$b_n = -1 + (n-1)\cdot(-1) = \boldsymbol{-n} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\mathrm{B}_n\ (-n,\ 0)$，$\mathrm{B}_{n+1}\ (-n-1,\ 0)$，$\mathrm{A}_n\ (-n,\ e^{-n})$ より

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-n}$$

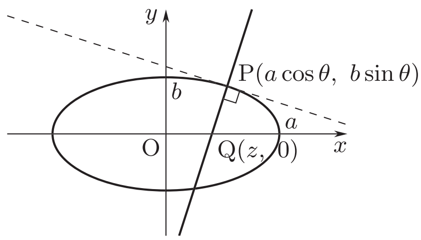
よって，S_n は初項 $S_0 = \dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{e}$ の等比数列なので，$0 < \dfrac{1}{e} < 1$ より

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{e}} = \boldsymbol{\frac{e}{2(e-1)}} \qquad \text{(答)}$$

【5】点 P は，θ を用いて

$\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$

とおける．



P における接線の方程式は

$$\frac{(a\cos\theta)\cdot x}{a^2}+\frac{(b\sin\theta)\cdot y}{b^2}=1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1 \quad \cdots(*)$$

点 $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ を通り，$(*)$ に垂直な直線の方程式は

$$\frac{\sin\theta}{b}(x-a\cos\theta)-\frac{\cos\theta}{a}(y-b\sin\theta)=0$$

これが，点 $\mathrm{Q}(z,\ 0)$ を通るので

$$\frac{\sin\theta}{b}(z-a\cos\theta)+\frac{b}{a}\sin\theta\cos\theta=0$$

$$az\sin\theta-a^2\sin\theta\cos\theta+b^2\sin\theta\cos\theta=0$$

$$\therefore\ z=\frac{(a^2-b^2)\cos\theta}{a}\ (\because\quad \mathrm{P}\ は\ x\ 軸上にないので，\sin\theta\neq 0)$$

ここで，点 P→ 点 A のとき，$\theta\to 0$ であるので

$$\lim_{\theta\to 0}z=\boldsymbol{\frac{a^2-b^2}{a}} \qquad (答)$$

１９章－１　微積分（２）

問題

【1】(1) $y=\dfrac{x^2}{a}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{t^2}{a}\right)$ における接線 l の方程式は $y'=\dfrac{2x}{a}$ より

$$y=\frac{2t}{a}(x-t)+\frac{t^2}{a}$$

$$\therefore\quad y=\frac{2t}{a}x-\frac{t^2}{a}$$

であり，この直線が点 $\mathrm{P}(0,\ -2)$ を通るので

$$-2=-\frac{t^2}{a}\qquad\therefore\quad t=\pm\sqrt{2a}$$

傾き $\dfrac{2t}{a}$ が正すなわち $a>0$ より $t>0$ であるから

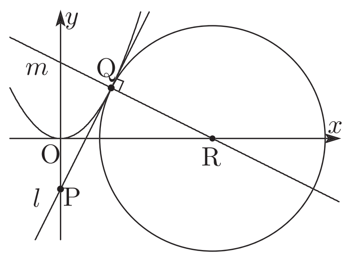
$$t=\sqrt{2a}$$

$\therefore\quad$ $\mathbf{Q(\sqrt{2a},\ 2)}$　　(答)

また，接線 l の方程式は

$$l:\boldsymbol{y=\frac{2\sqrt{2a}}{a}x-2}\qquad\text{(答)}$$

(2) 点 Q を通り，l に垂直な直線を m とする．l と円 $(x-b)^2+y^2=r^2$ が点 Q で接するとき，円の中心は m 上にある．すると



$$m:y=-\frac{a}{2\sqrt{2a}}(x-\sqrt{2a})+2$$

$$\therefore\quad m:y=-\frac{\sqrt{2a}}{4}x+\frac{a}{2}+2$$

この直線と x 軸 $(y=0)$ の交点が円の中心 $\mathrm{R}(b,\ 0)$ なので

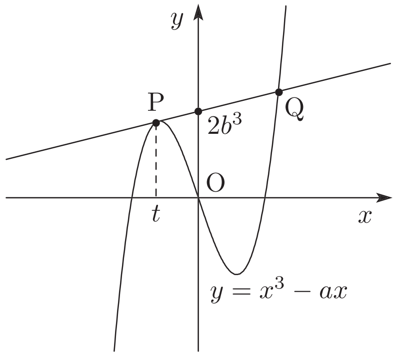
$$-\frac{\sqrt{2a}}{4}b+\frac{a}{2}+2=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b}=\frac{4}{\sqrt{2a}}\left(\frac{a}{2}+2\right)=\boldsymbol{\sqrt{2a}+\frac{8}{\sqrt{2a}}}\qquad\text{(答)}$$

また，半径 r は QR の長さなので

$$\boldsymbol{r}=\sqrt{\left(\sqrt{2a}+\frac{8}{\sqrt{2a}}-\sqrt{2a}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{32}{a}+4}=\boldsymbol{2\sqrt{\frac{a+8}{a}}}\qquad\text{(答)}$$

【2】(1) 3 次関数 $y=x^3-ax$ のグラフと直線がちょうど 2 点を共有するのは，直線と 3 次関数のグラフが接する場合である．



ここで，点 $(t,\ t^3-at)$ における接線の方程式は，$y'=3x^2-a$ より

$y=(3t^2-a)(x-t)+t^3-at$

であり，この直線が $(0,\ 2b^3)$ を通るので

$2b^3=-3t^3+at+t^3-at$

$\therefore\quad b^3=-t^3$すなわち $t=-b$

よって，求める直線は

$y=(3b^2-a)(x+b)-b^3+ab \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{y=(3b^2-a)x+2b^3}$ 　(答)

(2) $y=x^3-ax$，$y=(3b^2-a)x+2b^3$ より y を消去して得られる x の方程式

$x^3-ax=(3b^2-a)x+2b^3 \iff (x+b)^2(x-2b)=0$

の解が，P，Q の x 座標に他ならないので

$\mathbf{P(-\boldsymbol{b},\ -\boldsymbol{b}^3+\boldsymbol{ab}),\ Q(2\boldsymbol{b},\ 8\boldsymbol{b}^3-2\boldsymbol{ab})}$ 　(答)

(3) $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ より

$-2b^2+(8b^3-2ab)(-b^3+ab)=0$

$b\fallingdotseq 0$ より

$-2+(8b^2-2a)(-b^2+a)=0 \iff 4b^4-5ab^2+a^2+1=0 \ \cdots\cdots$ ①

$b^2=t$ とおくと $(t>0)$

$4t^2-5at+a^2+1=0 \ \cdots\cdots$ ②

すると

$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$となる正の実数 b が存在する

$\iff$ ①をみたす正の実数 b が存在する $\iff$ ②をみたす正の実数 t が存在する

と言い換えることができる．よって

② $\iff 4\left(t-\dfrac{5}{8}a\right)^2-\dfrac{25}{16}a^2+a^2+1=0$

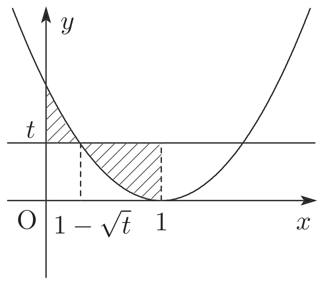
軸：$t=\dfrac{5}{8}a>0$ なので，②をみたす正の実数 t が存在するためには

$-\dfrac{25}{16}a^2+a^2+1\leqq 0 \qquad \therefore\ \ a^2\geqq\dfrac{16}{9}$

$a>0$ より

$\boldsymbol{a}\geqq\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ 　(答)

【3】(1) $y=(x-1)^2$ と $y=t$ の交点との x 座標は



$$t=(x-1)^2$$

$\therefore\quad x=1\pm\sqrt{t}$

であり，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲にあるのは

$$x=1-\sqrt{t}$$

よって，不等式 $((x-1)^2-y)(t-y)\leqq 0$,

$0\leqq x\leqq 1$ で表される領域は右図の斜線部分である．

ここで，$\alpha=1-\sqrt{t}$ とおくと

$$S(t)=\int_0^{\alpha}\left\{(x-1)^2-t\right\}dx+\int_{\alpha}^{1}\left\{t-(x-1)^2\right\}dx$$

$F(x)=\dfrac{(x-1)^3}{3}-tx$ とおくと

$$\begin{aligned}S(t)&=\Big[F(x)\Big]_0^{\alpha}+\Big[-F(x)\Big]_{\alpha}^{1}\\&=F(\alpha)-F(0)-F(1)+F(\alpha)\\&=2F(\alpha)-F(0)-F(1)\end{aligned}$$

であり

$$F(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^3}{3}-t\alpha=\frac{(-\sqrt{t})^3}{3}-t(1-\sqrt{t})=\frac{2}{3}t\sqrt{t}-t$$

$$F(0)=-\frac{1}{3},\ F(1)=-t$$

より

$$\boldsymbol{S(t)}=2\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t}-t\right)+\frac{1}{3}+t=\boldsymbol{\frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}}\qquad(\text{答})$$

(2) $\sqrt{t}=x\ (0<x<1)$ とおくと

$$S(t)=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$

$f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}$ とおくと

$$f'(x)=4x^2-2x=2x(2x-1)$$

$x=\dfrac{1}{2}$ で極小かつ最小で

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{12}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\qquad(\text{答})$$

【4】(1) $C_1 : y = x^2 + 6c^2$ に対し，$y' = 2x$ より，C_1 上の点 $(t,\ t^2 + 6c^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2 + 6c^2$$

$$\therefore \quad y = 2tx - t^2 + 6c^2$$

であり，この直線が C_2 に接するのは

$$-2x^2 = 2tx - t^2 + 6c^2$$

$$\therefore \quad 2x^2 + 2tx - t^2 + 6c^2 = 0 \ \cdots\cdots \ ①$$

が重解をもつときであり，① の判別式を D とすると

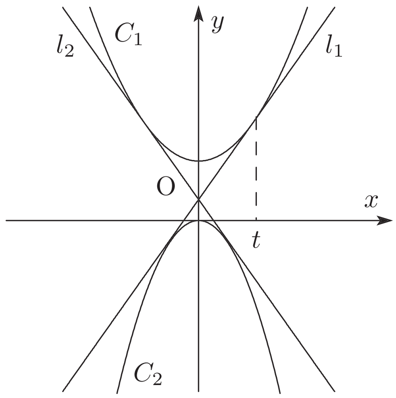
$$\frac{D}{4} = t^2 - 2(-t^2 + 6c^2) = 0$$

$$\therefore \quad t^2 = 4c^2 \text{ すなわち } t = \pm 2c$$

よって

$$\boldsymbol{l_1 : y = 4cx + 2c^2,\ l_2 : y = -4cx + 2c^2} \qquad \text{(答)}$$

(2) C_1 および C_2 の y 軸に関する対称性より



$$S_1 = 2\int_0^{2c} \left\{(x^2 + 6c^2) - (4cx + 2c^2)\right\} dx$$

$$= 2\int_0^{2c} (x - 2c)^2 dx$$

$$= 2\left[\frac{(x-2c)^3}{3}\right]_0^{2c} = \frac{16}{3}c^3$$

$$S_2 = 2\int_0^{c} \left\{(-4cx + 2c^2) - (-2x^2)\right\} dx$$

$$= 2\int_0^{c} 2\left(x - c\right)^2 dx$$

$$= 4\left[\frac{1}{3}\left(x - c\right)^3\right]_0^{c}$$

$$= \frac{4}{3}c^3$$

よって

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{16}{3}c^3}{\frac{4}{3}c^3} = \boldsymbol{4} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) ①

$$y' = (\sin x \cos x)' e^{\sin x \cos x} = (\cos^2 x - \sin^2 x) e^{\sin x \cos x}$$
$$= \boldsymbol{\cos 2x \cdot e^{\frac{1}{2}\sin 2x}} \qquad \text{(答)}$$

②

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+3} - x(\sqrt{x^2+3})'}{(\sqrt{x^2+3})^2} = \frac{\sqrt{x^2+3} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}$$
$$= \frac{x^2+3-x^2}{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}} = \boldsymbol{\frac{3}{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)' \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} = -(x^2-1)^{-2} \cdot 2x \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}$$
$$= -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}$$
$$f''(x) = \left\{-\frac{2x}{(x^2-1)^2}\right\}' \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} - \frac{2x}{(x^2-1)^2} \cdot \left(e^{\frac{1}{x^2-1}}\right)'$$
$$= -\frac{2(x^2-1)^2 - 2x \cdot 2 \cdot 2x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}$$
$$- \frac{2x}{(x^2-1)^2} \cdot \left\{-\frac{2x}{(x^2-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}\right\}$$
$$= \frac{-2(x^2-1)^2 + 8x^2(x^2-1) + 4x^2}{(x^2-1)^4} \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}$$
$$= \frac{2(3x^4-1)}{(x^2-1)^4} \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

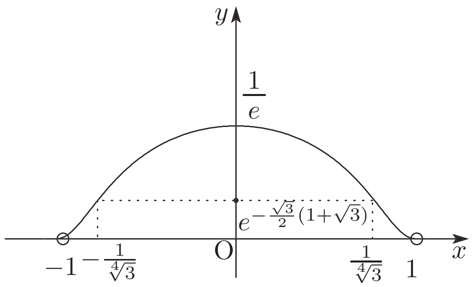
よって

$$f'(x) = 0 \iff x = 0,\ f''(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

より，関数の増減，グラフの凹凸は下の増減表の通り．　(答)

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↗	極大	↘		↘	

また，$\lim_{x\to -1+0} f(x) = 0$，$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 0$ より，グラフは下図．　(答)



【2】(1) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+2}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{4(x^2+2)-8x^2}{(x^2+2)^2}=\frac{4(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$$

であるから，$y=f(x)$ の増減は下表のようになる．

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

また

$$f(-\sqrt{2})=-\sqrt{2},\ f(\sqrt{2})=\sqrt{2},\ \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$$

次に

$$f(t)=f(t+1) \qquad \therefore\quad \frac{4t}{t^2+2}=\frac{4(t+1)}{(t+1)^2+2}$$

をみたす t の値は

$$t\left\{(t+1)^2+2\right\}=(t+1)(t^2+2)\quad \therefore\quad t=-2,\ 1$$

であるから，$t \leqq x \leqq t+1$ における y の最大値 $M(t)$ は

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{4t}{t^2+2}} & \boldsymbol{\left(t<-2,\ t>\sqrt{2}\right)} \\ \boldsymbol{\dfrac{4(t+1)}{(t+1)^2+2}} & \boldsymbol{\left(-2 \leqq t < \sqrt{2}-1\right)} \\ \boldsymbol{\sqrt{2}} & \boldsymbol{(\sqrt{2}-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\cos^2 x=t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと

$$f_n(x)=t^n+(1-t)^n$$

と表せる．ここで，$g_n(t)=t^n+(1-t)^n\ (0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと

$$g_n{}'(t)=nt^{n-1}-n(1-t)^{n-1}$$

$$g_n{}''(t)=n(n-1)t^{n-2}+n(n-1)(1-t)^{n-2}$$

$0 \leqq t \leqq 1$ において $g_n{}''(t) \geqq 0$ であり

$$g_n{}'\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

なので，$0 \leqq t \leqq 1$ における $g_n(t)$ の増減は下表のようになる．

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$g_n{}'(t)$		$-$	0	$+$	
$g_n(t)$		↘	極小	↗	

よって，$g_n(t)$ は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき極小かつ最小であるから，求める $f_n(x)$ の最小値は

$$g_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\boldsymbol{\frac{1}{2^{n-1}}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1)　$f'(x) = 4x + \dfrac{1-a^2}{x+1} = \dfrac{4x(x+1)+1-a^2}{x+1}$

$= \dfrac{4x^2+4x+1-a^2}{x+1}$

ここで，$g(x) = 4x^2+4x+1-a^2$ とおくと，題意をみたすためには，$g(x)$ において

$g(-1) = 1-a^2 > 0 \ \cdots ①$，$g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -a^2 < 0 \ \cdots ②$

が成り立てばよい．ここで，$a \geqq 0$ のもとで

① $\iff$ $0 \leqq a < 1$，② $\iff$ $a > 0$

より，求める条件は，$\boldsymbol{0 < a < 1}$　(答)

(2) $0 < a < 1$ のとき

$f'(x) = \dfrac{(2x+1)^2 - a^2}{x+1} = \dfrac{(2x+1+a)(2x+1-a)}{x+1}$

において，$f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{-a-1}{2}$，$\dfrac{a-1}{2}$

よって，$f(x)$ は

$\boldsymbol{x < \dfrac{-a-1}{2},\ x > \dfrac{a-1}{2}}$ では**増加**　(答)

$\boldsymbol{\dfrac{-a-1}{2} < x < \dfrac{a-1}{2}}$ では**減少**　(答)

となり，極大値，極小値は

極大値：$f\left(\dfrac{-a-1}{2}\right) = 2\cdot\left(\dfrac{-a-1}{2}\right)^2 + (1-a^2)\log\left(\dfrac{-a-1}{2}+1\right)$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(a+1)^2 + (1-a^2)\log\dfrac{1-a}{2}}$　(答)

極小値：$f\left(\dfrac{a-1}{2}\right) = 2\cdot\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 + (1-a^2)\log\left(\dfrac{a-1}{2}+1\right)$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(a-1)^2 + (1-a^2)\log\dfrac{a+1}{2}}$　(答)

(3) $h(a) = \dfrac{1}{2}(a-1)^2 + (1-a^2)\log\dfrac{a+1}{2}$ とおくと

$h(0) = \dfrac{1}{2} + \log\dfrac{1}{2} = \dfrac{1-2\log 2}{2}$

ここで

$h'(a) = (a-1) - 2a\log\dfrac{a+1}{2} + (1-a^2)\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{a+1}{2}}$

$= (a-1) - 2a\log\dfrac{a+1}{2} + (1-a)(1+a)\cdot\dfrac{1}{a+1} = -2a\log\dfrac{a+1}{2}$

であるので，$0 < a < 1$ において，$h'(a) > 0$

よって，$0 < a < 1$ において

$h(a) > h(0) = \dfrac{1-2\log 2}{2}$

これより，題意はみたされた．　(証終)

【4】(1) 接点を $\mathrm{T}_1\left(t_1,\ \dfrac{1}{t_1}\right)$，$\mathrm{T}_2\left(t_2,\ \dfrac{1}{t_2}\right)$ とおく．(ただし，$t_2 < 0 < t_1$)

$y' = -\dfrac{1}{x^2}$ より，l_1，l_2 の方程式は

$$l_1 : y = -\frac{1}{t_1^2}(x - t_1) + \frac{1}{t_1}$$
$$= -\frac{1}{t_1^2}x + \frac{2}{t_1}$$
$$l_2 : y = -\frac{1}{t_2^2}x + \frac{2}{t_2}$$

l_1 は $(a,\ 0)$ を通り，l_2 は $(b,\ 0)$ を通るので

$$0 = -\frac{1}{t_1^2}a + \frac{2}{t_1} \quad \therefore\ t_1 = \frac{a}{2}$$
$$0 = -\frac{1}{t_2^2}b + \frac{2}{t_2} \quad \therefore\ t_2 = \frac{b}{2}$$

よって

$$l_1 : y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{4}{a},\quad l_2 : y = -\frac{4}{b^2}x + \frac{4}{b}$$

を連立させると

$$-\frac{4}{a^2}x + \frac{4}{a} = -\frac{4}{b^2}x + \frac{4}{b}$$
$$4\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)x = 4\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$
$$4\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)x = 4\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

$a \fallingdotseq b$ より

$$\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)x = 1$$
$$x = \frac{ab}{a+b}$$

l_1 の式に代入して

$$y = -\frac{4}{a^2}\cdot\frac{ab}{a+b} + \frac{4}{a}$$
$$= \frac{-4b + 4(a+b)}{a(a+b)}$$
$$= \frac{4}{a+b}$$

よって，$\mathrm{B}\left(\dfrac{ab}{a+b},\ \dfrac{4}{a+b}\right)$

また，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{4}{b}\right)$ であるので S は

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{a} - \frac{4}{b}\right)\left(a - \frac{ab}{a+b}\right)$$
$$= \frac{2(b-a)}{ab}\cdot\frac{a(a+b) - ab}{a+b}$$
$$= \frac{2a(b-a)}{b(a+b)}$$
$$= \frac{2\cdot\frac{a}{b}\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{\frac{a}{b} + 1}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2t(1-t)}{t+1}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\triangle$ ABC の面積を $S(t)$ とおくと

$$S'(t) = \frac{(-4t+2)(t+1) - 2t(1-t)\cdot 1}{(t+1)^2}$$
$$= \frac{-2(t^2+2t-1)}{(t+1)^2}$$

また，B は第 2 象限の点であるので

$$\frac{ab}{a+b} < 0,\ \frac{4}{a+b} > 0$$

であり，これと $a > 0$，$b < 0$ より，$a+b > 0$ が得られる.

$$a+b > 0 \iff \frac{a}{b} + 1 < 0\ (\because\ b < 0)$$
$$\therefore\ t < -1$$

よって，$t < -1$ のもとで $S(t)$ の増減を考えると

t		$-1-\sqrt{2}$		(-1)
$S'(t)$	$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，最小値をとる t の値は

$t = \mathbf{-1-\sqrt{2}}$　　(答)

【5】(1) $0 \leqq k \leqq 3$ のとき，求める長さは

$(l$ が C' から切り取る長さ $r_1) - (l$ が C から切り取る長さ $r_2)$ $\cdots (*)$

であり，l は原点からの距離が k なので，r_2 に関して

$$\begin{aligned} r_2 &= 2\sqrt{3^2 - k^2} \\ &= 2\sqrt{9 - k^2} \end{aligned}$$

よって，$(*)$ を最小にするためには，r_1 を最小にすればよい.

r_1 に関して，l と点 $(0,\ -1)$ との距離を k' とすると

$$r_1 = 2\sqrt{64 - k'^2}$$

となるので，k' を最大にすると r_1 は最小になり，$(*)$ は最小になる.

ここで，k' が最大になるのは，l が直線 $y = k$ となるときで，$k' = k + 1$ となるので

$$\begin{aligned} (*) &= r_1 - r_2 \\ &= 2\sqrt{64 - (k+1)^2} - 2\sqrt{9 - k^2} \\ &= \boldsymbol{2\left(\sqrt{64 - (k+1)^2} - \sqrt{9 - k^2}\right)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) (1) において，$f(k) = \sqrt{64 - (k+1)^2} - \sqrt{9 - k^2}$ とし，$0 \leqq k \leqq 3$ (l と C が共有点をもつための必要十分条件) のもとで，$f(k)$ の最小値を求めればよい.

$$\begin{aligned} f'(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 - 2k}{\sqrt{64 - (k+1)^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-2k}{\sqrt{9 - k^2}} \\ &= \frac{-(k+1)}{\sqrt{64 - (k+1)^2}} + \frac{k}{\sqrt{9 - k^2}} \\ &= \frac{k\sqrt{64 - (k+1)^2} - (k+1)\sqrt{9 - k^2}}{\sqrt{64 - (k+1)^2}\sqrt{9 - k^2}} \end{aligned}$$

ここで，分子について

$$\begin{aligned} & k\sqrt{64 - (k+1)^2} - (k+1)\sqrt{9 - k^2} \\ =& \frac{k^2\{64 - (k+1)^2\} - (k+1)^2(9 - k^2)}{k\sqrt{64 - (k+1)^2} + (k+1)\sqrt{9 - k^2}} \\ =& \frac{(11k + 3)(5k - 3)}{k\sqrt{64 - (k+1)^2} + (k+1)\sqrt{9 - k^2}} \end{aligned}$$

よって，$f(k)$ は $k = \dfrac{3}{5}$ で極小かつ最小となるので，求める最小値は

$$\begin{aligned} 2f\left(\frac{3}{5}\right) &= 2\left(\sqrt{64 - \frac{64}{25}} - \sqrt{9 - \frac{9}{25}}\right) \\ &= \boldsymbol{4\sqrt{6}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

添削課題

【1】(1) $y' = 2x$ より，$y = x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における法線の方程式は

$$x - t + 2t(y - t^2) = 0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

同様に，点 $(t+h,\ (t+h)^2)$ における法線の方程式は

$$x - (t+h) + 2(t+h)\left\{y - (t+h)^2\right\} = 0 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

①－② より

$$h - 2hy + 6t^2h + 6th^2 + 2h^3 = 0 \qquad \therefore \quad y = \frac{1}{2} + 3t^2 + 3th + h^2$$

これと①より

$$x = t - 2t(y - t^2) = -4t^3 - 6t^2h - 2th^2$$

であるから，$h \to 0$ のとき

$$x \to -4t^3,\ y \to 3t^2 + \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \mathbf{R_0}\left(\boldsymbol{-4t^3,\ 3t^2 + \frac{1}{2}}\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) $x = -4t^3,\ y = 3t^2 + \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$t = \left(-\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

であるから，点 $\mathrm{R_0}$ の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{y = 3 \cdot \left(\frac{x^2}{16}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 点 P は，原点を通り傾き 1 の直線上にあるので

$$y = x$$

をみたす．このとき

$$\frac{x-1}{y^2+1} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

であり，$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - (x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}$$

$x^2 - 2x - 1 = 0$ の 2 解を

$$\alpha = 1 - \sqrt{2},\ \beta = 1 + \sqrt{2}$$

とおくと，$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x		α		β	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

ここで，$\alpha,\ \beta$ は $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0,\ \beta^2 - 2\beta - 1 = 0$ をみたすので

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} = \frac{\alpha - 1}{2\alpha + 2} \quad (\because \quad \alpha^2 = 2\alpha + 1)$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$f(\beta) = \frac{\beta - 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\beta - 1}{2\beta + 2} \quad (\because \quad \beta^2 = 2\beta + 1)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

また

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

であるから，$f(x)$ は $x = \alpha$ で極小かつ最小，$x = \beta$ で極大かつ最大となる．したがって，求める最大値と最小値は

最大値$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$，**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$　　(答)

(2) 点 P は原点を中心とする半径 1 の円周上を動くので

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \therefore\quad y^2 = 1 - x^2$$

とみたす．ここで

$$\frac{x-1}{y^2+1} = \frac{x-1}{2-x^2}$$

また，$y^2 \geqq 0$ より

$$1 - x^2 \geqq 0 \qquad \therefore\quad -1 \leqq x \leqq 1$$

$g(x) = \dfrac{x-1}{2-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ とおくと

$$g'(x) = \frac{2 - x^2 - (x-1)(-2x)}{(2-x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(2-x^2)^2}$$

$$= \frac{(x-1)^2 + 1}{(2-x^2)^2} > 0$$

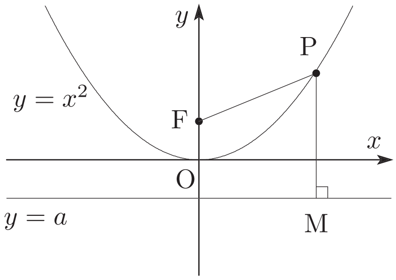
よって，$g(x)$ は単調に増加する関数なので，$x = -1$ で最小，$x = 1$ で最大となるので，求める最大値と最小値は

最大値$\boldsymbol{0}$，**最小値** $\boldsymbol{-2}$　　(答)

問題

【1】(1) $\mathrm{P}(X,\ Y)$ (ただし $Y = X^2$) とすると

$$\mathrm{PF}^2 = X^2 + (Y-b)^2,\ \mathrm{PM}^2 = (Y-a)^2$$



ここで，PF : PM が一定であるとき，定数 c に対して

$$\frac{\mathrm{PF}^2}{\mathrm{PM}^2} = c$$

$$\iff \mathrm{PF}^2 - c\mathrm{PM}^2 = 0$$

$$\iff X^2 + (Y-b)^2 - c(Y-a)^2 = 0$$

が成立し，$X^2 = Y$ より

$$Y + Y^2 - 2bY + b^2 - c(Y^2 - 2aY + a^2) = 0$$

$$\therefore\quad (1-c)Y^2 + (2ac - 2b + 1)Y + b^2 - a^2c = 0 \cdots\cdots ①$$

よって，すべての（正の）実数 Y に対して ① が成立すればよく

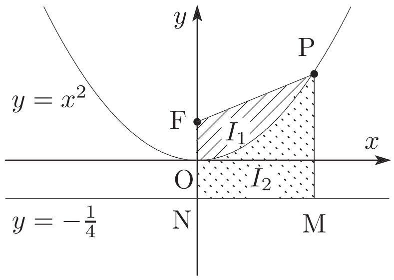
$$\begin{cases} 1 - c = 0 \\ 2ac - 2b + 1 = 0 \\ b^2 - a^2c = 0 \end{cases}$$

第 1 式より $c = 1$ であり，このとき $\begin{cases} 2a - 2b + 1 = 0 \\ b^2 - a^2 = 0 \end{cases}$

ここで $b - a = 0$ とすると，$2a - 2b + 1 = 1 \neq 0$ なので不適．よって $b + a = 0$ であり

$$\boldsymbol{a = -\frac{1}{4},\ b = \frac{1}{4},\ k} = \sqrt{c} = \mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\mathrm{P}(X,\ X^2)$，$\mathrm{N}\left(0,\ -\dfrac{1}{4}\right)$ とする．ここで y 軸に関する対称性より $X > 0$ としても一般性を失わない．



$$I_1 + I_2 = 4\text{ 角形 FNMP}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} + \left(X^2 + \frac{1}{4}\right)\right\}X$$

$$= \frac{X}{2}\left(X^2 + \frac{3}{4}\right)$$

また

$$I_2 = \int_0^X \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x\right]_0^X = \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{4}X$$

よって

$$I_1 = \frac{X^3}{2} + \frac{3X}{8} - \left(\frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{4}X\right) = \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{8}X$$

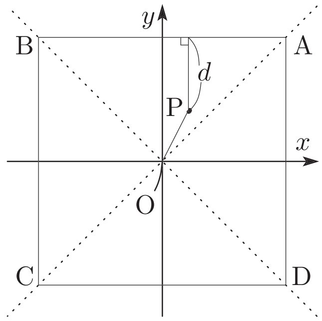
以上より

$$\boldsymbol{I_1 : I_2} = \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{8}X : \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{4}X = \mathbf{1 : 2} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ が

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ y \geqq x$$

の領域にある場合を考える.



すると，点 P と 4 角形 ABCD の辺の距離 d は

$$d = 2 - Y$$

であり，OP$<d$ より

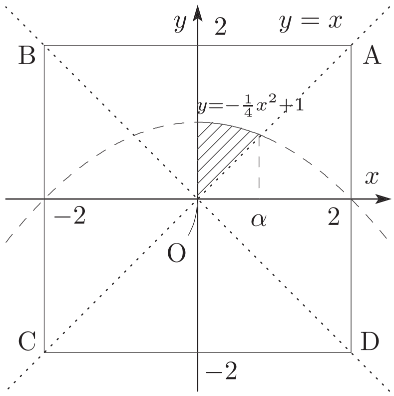
$$\sqrt{X^2+Y^2} < 2 - Y$$

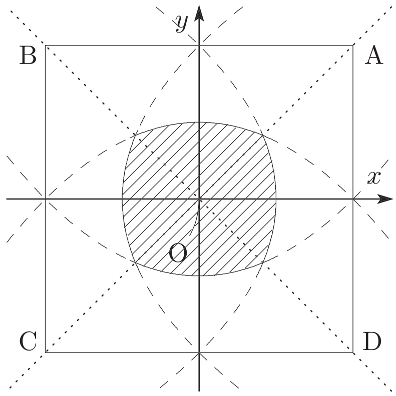
$Y < 2 \iff 2 - Y > 0$ より両辺 2 乗して

$$X^2 + Y^2 < 4 - 4Y + Y^2$$

$$\therefore\quad Y < -\frac{1}{4}X^2 + 1$$

よって，求める領域は $y = \pm x$，x 軸，y 軸による対称性より右下図の斜線部分のようになる．ただし，境界は含まない．　　(答)





(2) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ y \geqq x$ の部分の面積 S を求める.

$$x = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \iff 4x = -x^2 + 4 \iff x^2 + 4x - 4 = 0 \ \cdots\cdots\ ①$$

の大きい方の解を $\alpha = -2 + 2\sqrt{2}$ とおくと

$$S = \int_0^{\alpha}\left(-\frac{x^2}{4} + 1 - x\right)dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{12}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha$$

$$= -\frac{1}{12}\alpha(-4\alpha + 4) - \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha = -\frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha$$

($\because$ ①より $\alpha^2 = -4\alpha + 4$)

$$= -\frac{1}{6}(-4\alpha + 4) + \frac{2}{3}\alpha = \frac{4}{3}\alpha - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{3}(-2 + 2\sqrt{2}) - \frac{2}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{10}{3}$$

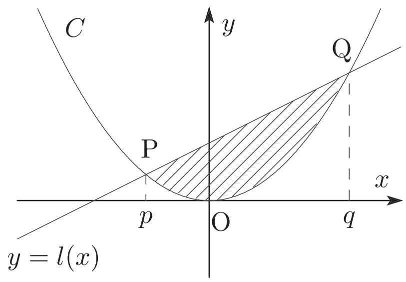
したがって，求める面積は対称性より

$$8S = 8\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{10}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{64\sqrt{2} - 80}{3}}$$　　(答)

【3】(1) 直線 PQ の方程式を $y=l(x)$ とおく．C と $y=l(x)$ の交点は P，Q なので

$$x^2-l(x)=(x-p)(x-q)$$

となり，直線 PQ と C で囲まれた図形の面積は



$$\int_p^q \left\{l(x)-x^2\right\}dx$$

$$=-\int_p^q (x-p)(x-q)dx$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)^3$$

よって，面積が $\frac{1}{6}$ なので

$$\frac{1}{6}(q-p)^3=\frac{1}{6} \qquad \therefore \quad q-p=1$$

が成立する． （証終）

(2) 2 点 P，Q を通る直線の方程式は

$$y=\frac{p^2-q^2}{p-q}(x-p)+p^2 \qquad \therefore \quad y=(p+q)x-pq$$

ここで，(1) より $q=p+1$ なので，$y=(2p+1)x-p^2-p$．ゆえに

傾き：$\boldsymbol{2p+1}$，$\boldsymbol{y}$切片：$\boldsymbol{-p^2-p}$ (答)

(3) 求める領域に含まれる点を $(X,\ Y)$ とすると

直線 $y=(2p+1)x-p^2-p$ が点 $(X,\ Y)$ を通る

$\iff$ $Y=(2p+1)X-p^2-p$ をみたす p が存在する

$\iff$ p の方程式 $p^2+(1-2X)p-X+Y=0$ が実数解をもつ

と読み替えることができる．

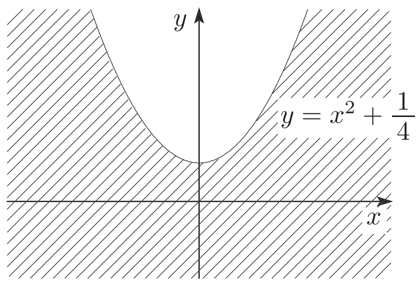
よって，p の 2 次方程式の判別式を D として

$$D=(1-2X)^2-4(-X+Y)\geqq 0$$

$$\therefore \quad 1-4X+4X^2+4X-4Y\geqq 0$$

$$\therefore \quad Y\leqq X^2+\frac{1}{4}$$

したがって，求める領域は**右図の斜線部分**のようになる．**ただし，境界はすべて含む．**



(答)

【4】(1)

$$f_2(x)=\frac{3}{x+1}\int_1^{x+2}(t^2-10t+a)dt=\frac{3}{x+1}\left[\frac{1}{3}t^3-5t^2+at\right]_1^{x+2}$$
$$=\frac{3}{x+1}\left\{\frac{(x+2)^3-1}{3}-5\left\{(x+2)^2-1\right\}+a(x+2-1)\right\}$$
$$=\frac{3}{x+1}\left\{\frac{(x+1)(x^2+5x+7)}{3}-5(x+1)(x+3)+a(x+1)\right\}$$
$$=x^2+5x+7-15(x+3)+3a$$
$$=\boldsymbol{x^2-10x+3a-38}\qquad\text{(答)}$$

(2) (1) より，$f_n(x)=x^2+a_nx+b_n$(a_n，b_nは x によらない定数) と表せると推測できるので，これを数学的帰納法により証明する．

(I) $n=1$ のとき，与えられた条件より成立する．

(II) $n=k$ のとき ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

$$f_k(x)=x^2+a_kx+b_k$$

と表せると仮定すると

$$f_{k+1}(x)=\frac{3}{x+1}\int_1^{x+2}f_k(t)dt=\frac{3}{x+1}\int_1^{x+2}(t^2+a_kx+b_k)dt$$
$$=\frac{3}{x+1}\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a_kt^2}{2}+b_kt\right]_1^{x+2}$$
$$=\frac{3}{x+1}\left\{\frac{(x+2)^3-1}{3}+\frac{a_k\left\{(x+2)^2-1\right\}}{2}+b_k(x+2-1)\right\}$$
$$=\frac{3}{x+1}\left\{\frac{(x+1)(x^2+5x+7)}{3}+\frac{a_k(x+1)(x+3)}{2}+b_k(x+1)\right\}$$
$$=x^2+5x+7+\frac{3a_k}{2}(x+3)+3b_k$$
$$=x^2+\left(\frac{3}{2}a_k+5\right)x+7+\frac{9}{2}a_k+3b_k$$

よって

$$a_{k+1}=\frac{3}{2}a_k+5,\ b_{k+1}=3b_k+\frac{9}{2}a_k+7\ \cdots\cdots\ ①$$

をみたす $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ をとると

$$f_{k+1}(x)=x^2+a_{k+1}x+b_{k+1}$$

と表せる．

(I)，(II) より $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $f_n(x)=x^2+a_nx+b_n$ と表せることが示された．

次に，a_n，b_n を求める．① の第 1 式より

$$\alpha=\frac{3}{2}\alpha+5\iff\ \alpha=-10$$

に対して

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{3}{2}(a_n-\alpha)\qquad\therefore\quad a_{n+1}+10=\frac{3}{2}(a_n+10)$$

と表せるので，$a_1=-10$ より

$$a_n+10=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}(-10+10)=0\qquad\therefore\quad a_n=-10$$

すると

$$b_{n+1} = 3b_n - 38 \qquad \therefore \quad b_{n+1} - 19 = 3(b_n - 19)$$

より数列 $\{b_n - 19\}$ は初項 $a - 19$，公比 3 の等比数列なので

$$b_n - 19 = 3^{n-1}(a - 19) \qquad \therefore \quad b_n = 3^{n-1}(a - 19) + 19$$

よって　　$\boldsymbol{f_n(x) = x^2 - 10x + 3^{n-1}(a - 19) + 19}$　　(答)

２０章－２　総合演習（３）

問題

【1】与えられた方程式は

$$x^2+2x-2+ae^x=0 \iff (x^2+2x-2)e^{-x}=-a$$

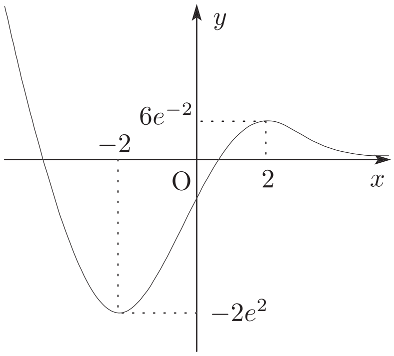
と同値変形できる．

$f(x)=(x^2+2x-2)e^{-x}$ とおくと

$$f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x-2)e^{-x}$$
$$=-(x+2)(x-2)e^{-x}$$

なので，$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x		-2		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$



ここで

$f(-2)=-2e^2$

$f(2)=6e^{-2}$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

より，$y=f(x)$ のグラフは右上図のようになる．したがって，$f(x)=-a$ の実数解の個数は

$-a<-2e^2$ のとき 0 個

$-a=-2e^2$ のとき 1 個

$-2e^2<-a\leqq 0$ のとき 2 個

$0<-a<6e^{-2}$ のとき 3 個

$-a=6e^{-2}$ のとき 2 個

$6e^{-2}<-a$ のとき 1 個

すなわち

$2e^2<a$ のとき 0 個
$a=2e^2$ のとき 1 個
$0\leqq a<2e^2$ のとき 2 個
$-6e^{-2}<a<0$ のとき 3 個　　(答)
$a=-6e^{-2}$ のとき 2 個
$a<-6e^{-2}$ のとき 1 個

【2】(1) $f'(x)=-ae^{-x}+1$

ここで，$-a\geqq 0$ すなわち $a\leqq 0$ のとき，任意の実数 x に対して $f'(x)>0$ であるので題意をみたさない．よって，$a>0$ であることが必要.

$a>0$ のとき

$$f'(x)=0 \iff e^{-x}=\frac{1}{a} \iff x=\log a$$

であり

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

であることから，題意をみたすことと，条件

$$f(\log a)<0 \text{ かつ } f(0)>0 \text{ かつ } \log a>0$$

をみたすことは必要かつ十分.

$$\begin{aligned} f(\log a)&=ae^{-\log a}+\log a+b\\ &=1+b+\log a<0\\ &\therefore b<-1-\log a \ \cdots ① \end{aligned}$$

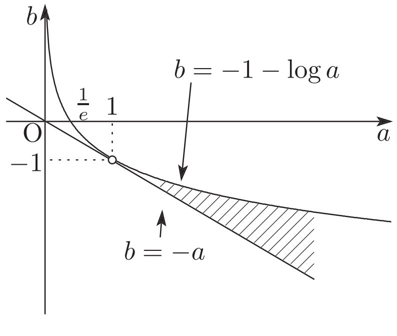
$$f(0)=a+b>0$$
$$\therefore b>-a \ \cdots ②$$

$$\log a>0$$
$$\therefore a>1 \ \cdots ③$$

求める条件は ① かつ ② かつ ③ であるので

$b<-1-\log a$ かつ $b>-a$ かつ $a>1$ (答)

(2) 条件をみたす a, b の組を ab 平面上に表すと下図の斜線部で境界線を含まない． (答)



【3】(1) $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とすると，$a+b+c=1$ で

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

$$\therefore a=2R\sin\alpha,\ b=2R\sin\beta,\ c=2R\sin\gamma$$

$a+b+c=1$ に代入して

$$2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=1$$

$$\therefore\ R=\frac{1}{2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}$$

ここで，$\sin\gamma=\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}=\sin(\alpha+\beta)$ より

$$R=\boldsymbol{\frac{1}{2\{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\}}}\qquad\text{(答)}$$

(2) α を固定し

$$f(\beta)=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$$

とすると

$$\begin{aligned}f(\beta)&=\sin\alpha+2\sin\frac{(\alpha+\beta)+\beta}{2}\cos\frac{(\alpha+\beta)-\beta}{2}\\&=\sin\alpha+2\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

ここで，$\beta=\pi-(\alpha+\gamma)<\pi-\alpha$ であるので

$$0<\beta<\pi-\alpha$$

より

$$\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha+2\beta}{2}<\pi-\frac{\alpha}{2}$$

であるが，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であることより，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$．また，$\dfrac{\alpha+2\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ となる β が存在するので，$\dfrac{\alpha+2\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(\beta)$ は最大値

$$\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}$$

をとる．このとき，R は最小値

$$R(\alpha)=\boldsymbol{\frac{1}{2\left(\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}\right)}}\qquad\text{(答)}$$

をとる．

(3)

$$R(\alpha)=k\iff\frac{1}{2\left(\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=k\ \cdots(*)$$

ここで，$k=0$ のとき，$(*)$ をみたす α は存在しない．

一方，$k\neq 0$ のとき

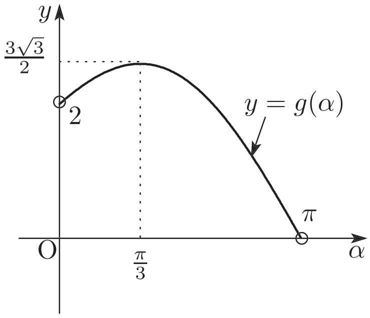
$$(*)\iff\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2k}$$

ここで，$g(\alpha) = \sin\alpha + 2\cos\dfrac{\alpha}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \cos\alpha - \sin\frac{\alpha}{2} \\ &= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \\ &= -\left(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

$0 < \alpha < \pi$ より，$0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるので

$\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{6} \iff \alpha = \dfrac{\pi}{3}$



のとき $g'(\alpha) = 0$．$0 < \alpha < \pi$ における $g(\alpha)$ の増減は以下の表の通り．

α	(0)		$\dfrac{\pi}{3}$		(π)
$g'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$g(\alpha)$		$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	

また，$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0} g(\alpha) = 2$，$\displaystyle\lim_{\alpha\to\pi-0} g(\alpha) = 0$ であるので，$y = g(\alpha)$ のグラフは右上図のようになり，これと直線 $y = \dfrac{1}{2k}$ の共有点の個数が方程式 $(*)$ の求める解の個数になるので

$k = 0$，$\dfrac{1}{2k} > \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1}{2k} < 0$ すなわち $\boldsymbol{k < \dfrac{1}{3\sqrt{3}}}$ のとき，**0 個**

$\dfrac{1}{2k} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$0 < \dfrac{1}{2k} \leqq 2$ すなわち $\boldsymbol{k = \dfrac{1}{3\sqrt{3}},\ k \geqq \dfrac{1}{4}}$ のとき，**1 個** (答)

$2 < \dfrac{1}{2k} < \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\boldsymbol{\dfrac{1}{3\sqrt{3}} < k < \dfrac{1}{4}}$ のとき，**2 個**

【4】(1) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ より

$$\log f(x)=\frac{1}{x}\log(1+x)$$

この等式の両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}\log(1+x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}$$
$$=\frac{-(1+x)\log(1+x)+x}{x^2(1+x)}$$

$$\therefore\ f'(x)=\boldsymbol{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}-1}}{x^2}\{x-(1+x)\log(1+x)\}}$$ (答)

(2) $g(x)=x-(1+x)\log(1+x)$ とおくと

$$g'(x)=1-\left\{(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}+\log(1+x)\right\}$$
$$=-\log(1+x)$$

$x>0$ において，$g'(x)<0$ であるので，$g(x)$ は $x>0$ において単調減少であり

$$g(x)<g(0)=0$$

これより，$x>0$ において $f'(x)$ は

$$f'(x)=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}-1}}{x^2}\cdot g(x)<0$$

となるので，$f(x)$ は単調減少．よって，$0<x_1<x_2$ なる x_1，x_2 に対して

$$f(x_1)>f(x_2)$$

である． (証終)

(3) $f\left(\frac{1}{100}\right)=\left(\frac{101}{100}\right)^{100}$，$f\left(\frac{1}{99}\right)=\left(\frac{100}{99}\right)^{99}$

であり，(2) の結果と $\frac{1}{100}<\frac{1}{99}$ であることにより

$$\left(\frac{101}{100}\right)^{100}>\left(\frac{100}{99}\right)^{99}\ \cdots①$$

である．さらに，$\frac{101}{100}>1$ より

$$\left(\frac{101}{100}\right)^{101}>\left(\frac{101}{100}\right)^{100}\ \cdots②$$

である．①，② より

$$\boldsymbol{\left(\frac{101}{100}\right)^{101}>\left(\frac{100}{99}\right)^{99}}$$ (答)

【5】(1) $g(x)=\dfrac{f'(x)}{e^x}$ とすると

$$g'(x)=\frac{f''(x)e^x-f'(x)e^x}{e^{2x}}$$
$$=\frac{f''(x)-f'(x)}{e^x}<0$$

よって，$g(x)$ は単調減少な関数であるので，$a<b$ なる a，b に対して

$$g(a)>g(b)$$

これより

$$\frac{f'(a)}{e^a}>\frac{f'(b)}{e^b}$$

となり，題意は示された．(証終)

(2) $\alpha=e^a$，$\beta=e^b$ とおくと，α，β は $\alpha<\beta$ なる正の実数であり

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f(\log\beta)-f(\log\alpha)}{\beta-\alpha}\quad\cdots(*)$$

ここで，$g(t)=f(\log t)$ とすると

$$g'(t)=(\log t)'f'(\log t)$$
$$=\frac{f'(\log t)}{t}$$

であり

$$(*)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

と表される．ここで，平均値の定理より

$$g'(\gamma)=\frac{f'(\log\gamma)}{\gamma}=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha},\ \alpha<\gamma<\beta$$

なる γ が存在する．ここで，$c=\log\gamma$ とおくと，$a<c<b$ であり

$$\frac{f'(\log\gamma)}{\gamma}=\frac{f'(c)}{e^c}$$

である．また，(1) の結果および $a<c<b$ であるので

$$\frac{f'(a)}{e^a}>\frac{f'(c)}{e^c}>\frac{f'(b)}{e^b}$$

よって

$$\frac{f'(a)}{e^a}>\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}>\frac{f'(b)}{e^b}$$

である．(証終)

(3) すべての実数 x について，$f(x)>0$ であるとき，$a<b$ なる任意の実数 a，b に対し，(2) の不等式から

$$f'(a)>\frac{e^a}{e^b-e^a}\{f(b)-f(a)\}=\frac{e^af(b)}{e^b-e^a}-\frac{e^af(a)}{e^b-e^a}>\frac{-e^a}{e^b-e^a}f(a)$$
$$f'(b)<\frac{e^b}{e^b-e^a}\{f(b)-f(a)\}=\frac{e^bf(b)}{e^b-e^a}-\frac{e^bf(a)}{e^b-e^a}<\frac{e^b}{e^b-e^a}f(b)$$

が成り立つので

$$\frac{f'(a)}{f(a)}>\frac{-e^a}{e^b-e^a}\quad\cdots①,\quad\frac{f'(b)}{f(b)}<\frac{e^b}{e^b-e^a}\quad\cdots②$$

が成り立つ．ここで，① において，a を固定すると ① の右辺に対して

$$\lim_{b\to\infty}\frac{-e^a}{e^b-e^a}=0$$

であるので

$$\frac{f'(a)}{f(a)} \geqq 0 \quad \therefore\ f'(a) \geqq 0 \quad (\because \quad f(a) > 0)$$

が成り立つ．また，② において b を固定すると ② の右辺に対して

$$\lim_{a \to -\infty} \frac{e^b}{e^b - e^a} = 1$$

であるので

$$\frac{f'(b)}{f(b)} \leqq 1 \quad \therefore\ f'(b) \leqq f(b)$$

が成り立つ．以上より，任意の実数 x に対して

$$f(x) \geqq f'(x) \geqq 0 \ \cdots (\#)$$

が成り立つことが示された．以下では

$$f(x) \fallingdotseq f'(x), \quad f'(x) \fallingdotseq 0$$

であることを示す．

(I) ある実数 p に対して

$$f(p) = f'(p)$$

が成り立つとする．ここで，$h(x) = f(x) - f'(x)$ を考えると

$$h'(x) = f'(x) - f''(x) > 0$$

よって, $h(x)$ は単調増加であるので, $q < p$ なる q に対して, $h(q) < h(p) = 0$. すなわち $f(q) < f'(q)$ であり，これは $(\#)$ と矛盾するので，任意の実数 x に対して $f(x) \fallingdotseq f'(x)$ である．

(II) ある実数 p に対して

$$f'(p) = 0$$

が成り立つとする．すると (1) の結果より $p < q$ なる実数 q に対し

$$\frac{f'(q)}{e^q} < \frac{f'(p)}{e^p} = 0$$

より $f'(q) < 0$ となり $(\#)$ と矛盾するので, 任意の実数 x に対して, $f'(x) \fallingdotseq 0$ である．

以上より，全ての実数 x に対して

$$f(x) > f'(x) > 0$$

であることが示された． (証終)

M3MA

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学 M

Z-KAI

会員番号	

氏　名	