M3MB

本科 2 期 10 月度

解答

Z会東大進学教室

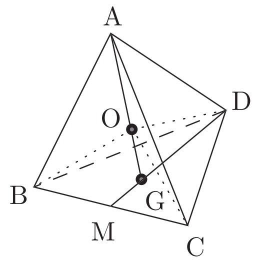
難関大数学ⅠAⅡB

難関大文系数学M

問題

以下必要に応じてベクトル (x, y, z) を縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を用いて表す.

【1】正 4 面体 ABCD に外接する球の中心を O とし,



AO と平面 BCD の交点を G とすると

$\quad \mathrm{AG} \perp$ 平面 BCD

である. また, 正 4 面体の対称性より, G は

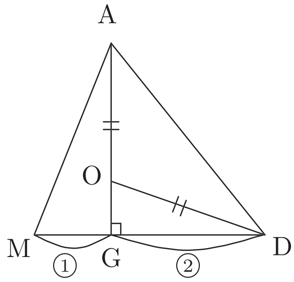
△ BCD の重心と一致し, BC の中点 M に対して,

平面 AMD による切り口を考える.

正 4 面体の 1 辺の長さを a とすると

$$\mathrm{MD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

であり, G は



△ BCD の重心なので

$$\mathrm{MG} : \mathrm{GD} = 1 : 2$$

であるから

$$\mathrm{GD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

よって, △ AGD に 3 平方の定理を用いて

$$\mathrm{AG} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$$\mathrm{OG} = \sqrt{\frac{2}{3}}a - 1$$

さらに, △ OGD に 3 平方の定理を用いて

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a - 1\right)^2 + \frac{a^2}{3} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}a^2 + \frac{a^2}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}a = 0$$

$$\therefore \quad \left(a - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)a = 0$$

$a \neq 0$ であるから, 求める 1 辺の長さは

$$a = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$

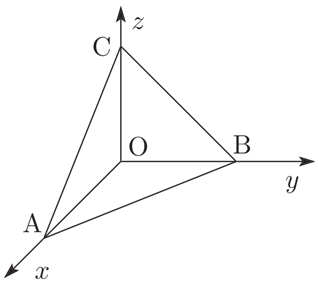
$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{a^2+c^2}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = a^2$

であるから

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2}} \quad \text{(答)}$$

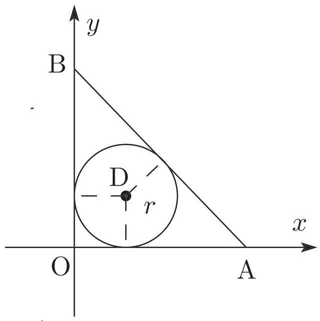


(2) △ OAB の内接円の中心を D とし，半径を r とすると，面積について

$$\triangle \mathrm{OAB} = \triangle \mathrm{OAD} + \triangle \mathrm{OBD} + \triangle \mathrm{ABD}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}r\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{r = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}} \quad \text{(答)}$$



(3) 4 面体 OABC の内接球の中心を E とし，半径を R とすると，体積について

$$(4\text{ 面体 OABC}) = (4\text{ 面体 EOAB}) + (4\text{ 面体 EOBC}) + (4\text{ 面体 EOCA}) + (4\text{ 面体 EABC})$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OAB}\cdot R + \frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OBC}\cdot R + \frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OCA}\cdot R + \frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{ABC}\cdot R$$

$$= \frac{R}{3}\left(\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ca}{2}+\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2}\right)$$

$$= \frac{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{6}R$$

よって，OC ⊥ 平面 OAB より，4 面体 OABC の体積は $\frac{abc}{6}$ であるから

$$\frac{abc}{6} = \frac{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{6}R$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{R = \frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}} \quad \text{(答)}$$

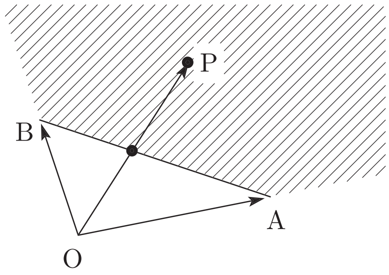
【3】■解答 1

線分 OP と AB が交わるための必要十分条件は，点 P が右図の位置にあることであり，これは

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a+b \geqq 1$

をみたす実数 a, b が存在することである．



$$\begin{pmatrix} 5+t \\ 9+2t \\ 5+3t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ a+3b \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} 5+t = 2b \ \cdots\cdots \ ① \\ 9+2t = a+3b \ \cdots\cdots \ ② \\ 5+3t = 2a \ \cdots\cdots \ ③ \end{cases}$$

①，③より

$a = \dfrac{1}{2}(5+3t),\ b = \dfrac{1}{2}(5+t)$

なので，②に代入して

$9+2t = \dfrac{1}{2}(5+3t) + \dfrac{3}{2}(5+t)$

$\therefore\quad t = -1$

であり，このとき，①，②より

$a = 1,\ b = 2$

であるから，線分 OP と線分 AB は交わる．（証終）

また，このとき

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

であるから，線分 OP と線分 AB の交点を Q とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore\quad \mathbf{Q}\left(\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$ （答）

■解答 2

線分 OP 上の点は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\begin{pmatrix} 5+t \\ 9+2t \\ 5+3t \end{pmatrix}\ (0 \leqq k \leqq 1) \ \cdots\cdots \ ④$$

また，線分 AB 上の点は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2u \\ 1+2u \\ 2-2u \end{pmatrix}\ (0 \leqq u \leqq 1) \ \cdots\cdots \ ⑤$$

と表せる．線分 OP と線分 AB が交点をもつための必要十分条件は，④かつ⑤をみたす

$x,\ y,\ z$ が存在すること，すなわち

$$\begin{cases} k(5+t)=2u \ \cdots\cdots \ ⑥ \\ k(9+2t)=1+2u \ \cdots\cdots \ ⑦ \\ k(5+3t)=2-2u \ \cdots\cdots \ ⑧ \\ 0 \leqq k \leqq 1,\ 0 \leqq u \leqq 1 \end{cases}$$

をみたす $k,\ t,\ u$ が存在することである．よって，⑥を⑦，⑧に代入して u を消去すると

$$\begin{cases} k(9+2t)=1+k(5+t) \\ k(5+3t)=2-k(5+t) \end{cases} \iff \begin{cases} 4k+kt=1 \\ 5k+2kt=1 \end{cases}$$

であり kt を消去すると

$$5k+2(1-4k)=1 \qquad \therefore \quad k=\frac{1}{3}$$

このとき

$$t=-1,\ u=\frac{2}{3}$$

であり，$0 \leqq k \leqq 1,\ 0 \leqq u \leqq 1$ をみたし，線分 OP と線分 AB が交点をもつような t が存在する．（証終）

したがって，線分 OP と線分 AB の交点の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{4}{3}},\ \boldsymbol{\frac{7}{3}},\ \boldsymbol{\frac{2}{3}}\right) \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(-2)\cdot(-1)+2\cdot(-1)+0\cdot(-1)=\mathbf{0} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $(x>0)$ とすると $\left|\vec{n}\right|=1$ より

$$x^2+y^2+z^2=1 \ \cdots\cdots \ ①$$

また，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より

$$\begin{cases}-2x+2y=0\\-x-y-z=0\end{cases}$$

$\therefore \quad y=x,\ z=-2x$

であるから①に代入して

$$x^2+x^2+4x^2=1 \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって

$$\boldsymbol{\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$ は 2 点 D，P の距離であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$ が最小になるのは

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}\perp\text{平面}\pi$$

のときである．$\overrightarrow{\mathrm{DP}}\perp$ 平面π となる点 P を P_0 とすると，P_0 は直線 DP 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}_0}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+k\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k-3\\k-1\\-2k-1\end{pmatrix}$$

また，P_0 は $\vec{n}$ と垂直な平面 π 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CP}_0}\cdot\vec{n}=0$ より

$$k-3+k-1-2(-2k-1)=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{1}{3}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DP}_0}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$ の最小値は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}_0}\right|=\frac{1}{3}\sqrt{1+1+4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(4) (1) より，$\mathrm{CA}\perp\mathrm{CB}$ なので，3 角形 ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$$

よって，求める体積は (3) より

$$\frac{1}{3}\cdot S\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}_0}\right|=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad \text{(答)}$$

１８章　微積分（１）

問題

【1】(1) 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の 3 解が $p,\ q,\ r$ であるから解と係数の関係より

$$p+q+r=-a$$
$$pq+qr+rp=b$$
$$pqr=-c$$

すると $p+q+r=9$ より

$$-a=9 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a=-9} \qquad \text{(答)}$$

また，$(p+q+r)^2=p^2+q^2+r^2+2(pq+qr+rp)$ なので

$$81=123+2b \qquad \therefore\ \boldsymbol{b=-21} \qquad \text{(答)}$$

(2) 「$y=x^3-9x^2-21x+c$ が x 軸と 3 点で交わる」

$\iff$「$x^3-9x^2-21x+c=0$ が 3 つの異なる実数解をもつ」

であり，さらに

$$x^3-9x^2-21x+c=0 \iff x^3-9x^2-21x=-c$$

より

$y=x^3-9x^2-21x$ と直線 $y=-c$ が 3 点で交わる

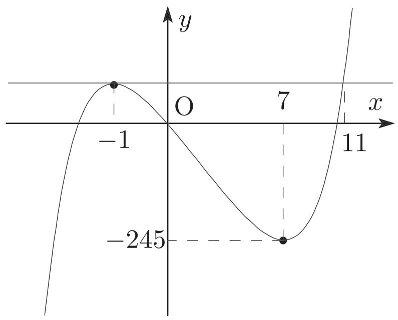
と読み替えることができる.

$y=x^3-9x^2-21x$ より

$$y'=3x^2-18x-21=3(x^2-6x-7)$$
$$=3(x-7)(x+1)$$

より，増減は下表のようになる.

x		-1		7	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	11	$\searrow$	-245	$\nearrow$



よって

$$-245<-c<11$$

$$\therefore\ \boldsymbol{-11<c<245} \qquad \text{(答)}$$

また，$p,\ q,\ r$ は $y=x^3-9x^2-21x$ と直線 $y=-c$ の交点の x 座標であり

$$x^3-9x^2-21x=11 \iff (x+1)^2(x-11)=0$$

なので

$$\boldsymbol{7<r<11} \qquad \text{(答)}$$

【2】円 $(x-t-1)^2+y^2=\dfrac{a}{t+1}$ の外部を表す不等式は

$$(x-t-1)^2+y^2-\frac{a}{t+1}>0$$

であり，この領域に点 (2, 1) がつねにあるためには 0 以上のすべての実数 t に対して

$$(2-t-1)^2+1^2-\frac{a}{t+1}>0$$

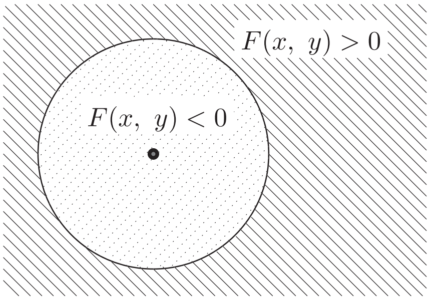
$$\iff t^2-2t+2-\frac{a}{t+1}>0$$

$$\iff (t+1)(t^2-2t+2)>a\ (\because t+1>0)$$

$$\iff t^3-2t^2+2t+t^2-2t+2>a$$

$$\iff t^3-t^2+2>a$$

が成り立つことである．



$$F(x,\ y)=(x-t-1)^2+y^2-\frac{a}{t+1}$$

$f(t)=t^3-t^2+2$ とおくと

$$f'(t)=3t^2-2t=3t\left(t-\frac{2}{3}\right)$$

なので，$t\geqq 0$ における $f(t)$ の増減は下表のようになる．

t	0		$\frac{2}{3}$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	極小	↗

したがって，$t\geqq 0$ において，$f(t)>a$ がつねに成立するためには

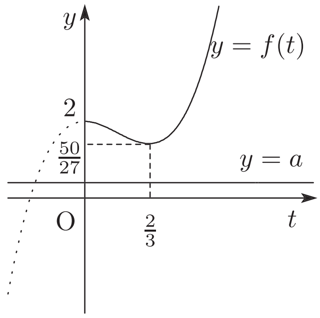
$$f\left(\frac{2}{3}\right)>a$$

であればよく

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}-\frac{4}{9}+2=\frac{8-12+54}{27}=\frac{50}{27}$$

なので

$$\boldsymbol{0<a<\frac{50}{27}}\qquad (答)$$



【3】(1) $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

と変形できるので，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\iff\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ より

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{1\leqq t\leqq\sqrt{2}}\qquad (答)$$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ より

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta\qquad \therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

であるから，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ で表すと

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=t^3-\frac{3(t^2-1)t}{2}=\frac{2t^3+3t-3t^3}{2}=\frac{-t^3+3t}{2}$$

$f(t) = \dfrac{-t^3+3t}{2}$ とおくと

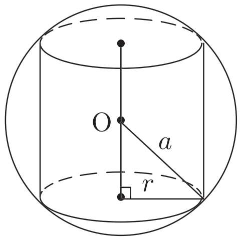
$f'(t) = \dfrac{-3t^2+3}{2}$

であり，$1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ の範囲で $f'(t) \leqq 0$ なので

$f(\sqrt{2}) \leqq f(t) \leqq f(1)$

$\therefore \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq f(t) \leqq 1$ すなわち $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq \sin^3\theta + \cos^3\theta \leqq 1}$ (答)

【4】球の中心を O とし，円柱の底面の半径を r $(0 < r < a)$ とする．円柱の上底，下底の円の中心を通る平面による切り口を考えると



(円柱の高さ) $= 2\sqrt{a^2-r^2}$

よって円柱の体積 V は

$V = \pi r^2 \cdot 2\sqrt{a^2-r^2}$

$= 2\pi\sqrt{a^2r^4-r^6}$

$r^2 = x$ とし

$f(x) = a^2x^2 - x^3$ $(0 < x < a^2)$

の増減を調べる．

$f'(x) = 2a^2x - 3x^2 = -3x\left(x - \dfrac{2}{3}a^2\right)$

より，$0 < x < a^2$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0		$\frac{2}{3}a^2$		a^2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ここで

$f\left(\dfrac{2}{3}a^2\right) = a^2 \cdot \dfrac{4}{9}a^4 - \dfrac{8}{27}a^6$

$= \dfrac{4}{27}a^6$

であるから，求める最大値は

$V = 2\pi\sqrt{\dfrac{4}{27}a^6} = \dfrac{4a^3}{3\sqrt{3}}\pi = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}a^3\pi}$ (答)

１９章　微積分（２）

問題

【1】(1) $y' = 3x^2 - 1$ より，C 上の点 $(t,\ t^3 - t)$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2-1)(x-t)+t^3-t \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{y = (3t^2-1)x - 2t^3} \qquad (答)$$

(2) 直線 $y = (3t^2-1)x - 2t^3$ が点 $(0,\ 2)$ を通るので

$$2 = -2t^3 \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{t = -1} \qquad (答)$$

(3) 直線 $y = (3t^2-1)x - 2t^3$ が点 $(a,\ b)$ を通るので

$$b = (3t^2-1)a - 2t^3$$

$$\therefore\quad 2t^3 - 3at^2 + a + b = 0 \ \cdots\cdots\ (*)$$

この t の方程式の実数解が点 $(a,\ b)$ から曲線 C に接線を引いたときの接点の x 座標に他ならないので，点 Q から接線が 2 本引けるということは

$(*)$ が 2 重解をもつこと，すなわち 2 重解 $t=\alpha$と別の解 $t=\beta$をもつこと

である．よって，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+\beta = \dfrac{3a}{2} \\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha = 0 \\ \alpha^2\beta = -\dfrac{a+b}{2} \end{cases} \qquad \therefore\ \ \begin{cases} 2\alpha+\beta = \dfrac{3a}{2} \ \cdots\cdots\ ① \\ \alpha(\alpha+2\beta) = 0 \ \cdots\cdots\ ② \\ \alpha^2\beta = -\dfrac{a+b}{2} \ \cdots\cdots\ ③ \end{cases}$$

② より $\alpha+2\beta=0$ または $\alpha=0$ であり，$\alpha=-2\beta$ とすると，①，③ より

$$\begin{cases} -3\beta = \dfrac{3}{2}a \\ 4\beta^3 = -\dfrac{a+b}{2} \end{cases} \qquad \therefore\ \ \begin{cases} \beta = -\dfrac{a}{2} \\ 4\beta^3 = -\dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

β を消去すると

$$4\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)^3 = -\frac{a+b}{2} \qquad \therefore\ \ b = a^3 - a$$

となり条件より不適である．

よって，$\alpha=0$ であり，①，③より

$$\beta = \frac{3}{2}a,\ \ a+b=0$$

すると $x=0,\ \dfrac{3}{2}a$ における接線が直交するので

$$-1\cdot\left(3\cdot\frac{9}{4}a^2-1\right) = -1$$

$$\therefore\quad a^2 = \frac{8}{27}\ \ すなわち\ a = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

よって，$a+b=0$ より求める $a,\ b$ の値は

$$a = \frac{2\sqrt{6}}{9},\ \ b = -\frac{2\sqrt{6}}{9}$$

ゆえに

$$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{9},\ -\frac{2\sqrt{6}}{9}}\right) \qquad (答)$$

【2】(1) $y=\dfrac{x^2}{a}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{t^2}{a}\right)$ における接線 l の方程式は $y'=\dfrac{2x}{a}$ より

$$y=\frac{2t}{a}(x-t)+\frac{t^2}{a}$$

$$\therefore\quad y=\frac{2t}{a}x-\frac{t^2}{a}$$

であり，この直線が点 $\mathrm{P}(0,\ -2)$ を通るので

$$-2=-\frac{t^2}{a}\qquad\therefore\quad t=\pm\sqrt{2a}$$

傾き $\dfrac{2t}{a}$ が正すなわち $a>0$ より $t>0$ であるから

$$t=\sqrt{2a}$$

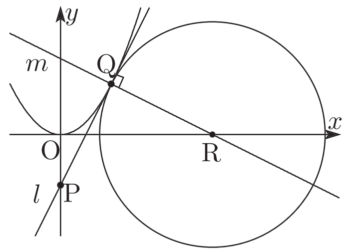
$$\therefore\quad \mathbf{Q}(\boldsymbol{\sqrt{2a},\ 2})\qquad (答)$$

また，接線 l の方程式は

$$l:\boldsymbol{y=\frac{2\sqrt{2a}}{a}x-2}\qquad (答)$$

(2) 点 Q を通り，l に垂直な直線を m とする．

l と円 $(x-b)^2+y^2=r^2$ が点 Q で接するとき，円の中心は m 上にある．すると



$$m:y=-\frac{a}{2\sqrt{2a}}(x-\sqrt{2a})+2$$

$$\therefore\quad m:y=-\frac{\sqrt{2a}}{4}x+\frac{a}{2}+2$$

この直線と x 軸 $(y=0)$ の交点が円の中心 $\mathrm{R}(b,\ 0)$ なので

$$-\frac{\sqrt{2a}}{4}b+\frac{a}{2}+2=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b}=\frac{4}{\sqrt{2a}}\left(\frac{a}{2}+2\right)=\boldsymbol{\sqrt{2a}+\frac{8}{\sqrt{2a}}}\qquad (答)$$

また，半径 r は QR の長さなので

$$\boldsymbol{r}=\sqrt{\left(\sqrt{2a}+\frac{8}{\sqrt{2a}}-\sqrt{2a}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{32}{a}+4}=\boldsymbol{2\sqrt{\frac{a+8}{a}}}\qquad (答)$$

【3】(1) $C: y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，$y'=2x$ より

$$y=2t(x-t)+t^2 \qquad \therefore\ \ y=2tx-t^2$$

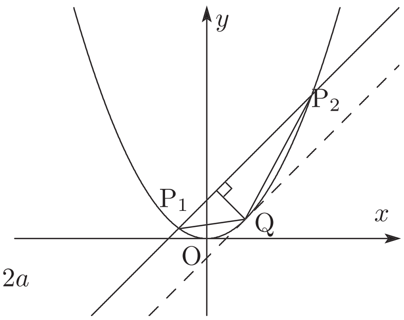
であり，この直線が点 $(a,\ b)$ を通るとき

$$b=2at-t^2 \qquad \therefore\ \ t^2-2at+b=0\ \cdots(*)$$

t の 2 次方程式 $(*)$ の解が点 $(a,\ b)$ から C に接線を引いたときの接点の x 座標 $x_1,\ x_2$ に他ならないので，解と係数の関係より

$$\boldsymbol{x_1+x_2=2a,\ x_1x_2=b} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\mathrm{P_1P_2}$ を底辺とみると，点 Q と直線 $\mathrm{P_1P_2}$ の距離が最大のとき 3 角形 $\mathrm{P_1P_2Q}$ の面積は最大となる．よって，このとき，C のグラフは下に凸なので“点 Q における接線の傾きと直線 $\mathrm{P_1P_2}$ の傾きが一致”すればよく，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とすると



$$2q=\frac{{x_1}^2-{x_2}^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2=2a$$

$$\therefore\ \ q=a \text{ すなわち } \boldsymbol{\mathrm{Q}(a,\ a^2)} \qquad \text{(答)}$$

(3) $x_1<a<x_2$ としても一般性を失わないので，$x_1<a<x_2$ のもとで考えると

$$S_1=\int_{x_1}^{a}\left\{\frac{{x_1}^2-a^2}{x_1-a}(x-a)+a^2-x^2\right\}dx$$

$$=-\int_{x_1}^{a}(x-a)(x-x_1)dx=\frac{(a-x_1)^3}{6}$$

$$S_2=\frac{(x_2-a)^3}{6}$$

よって

$$S_1+S_2=\frac{1}{6}(a^3-3a^2x_1+3a{x_1}^2-{x_1}^3)+\frac{1}{6}({x_2}^3-3a{x_2}^2+3a^2x_2-a^3)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{({x_2}^3-{x_1}^3)-3a({x_2}^2-{x_1}^2)+3a^2(x_2-x_1)\right\}$$

$$=\frac{(x_2-x_1)\left\{{x_2}^2+x_2x_1+{x_1}^2-3a(x_1+x_2)+3a^2\right\}}{6}$$

$$=\frac{(x_2-x_1)\left\{(x_1+x_2)^2-x_1x_2-3a(x_1+x_2)+3a^2\right\}}{6}$$

$$=\frac{(x_2-x_1)(4a^2-b-6a^2+3a^2)}{6}=\frac{(x_2-x_1)(a^2-b)}{6}$$

ここで，$x_1,\ x_2$ は t の方程式 $t^2-2at+b=0$ の 2 解なので

$$x_1=a-\sqrt{a^2-b},\ x_2=a+\sqrt{a^2-b} \qquad \therefore\ \ x_2-x_1=2\sqrt{a^2-b}$$

したがって

$$S_1+S_2=\boldsymbol{\frac{1}{3}(a^2-b)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $C_1 : y = x^2 + 6c^2$ に対し，$y' = 2x$ より，C_1 上の点 $(t,\ t^2 + 6c^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2 + 6c^2$$

$$\therefore \quad y = 2tx - t^2 + 6c^2$$

であり，この直線が C_2 に接するのは

$$-2x^2 = 2tx - t^2 + 6c^2$$

$$\therefore \quad 2x^2 + 2tx - t^2 + 6c^2 = 0 \ \cdots\cdots \ ①$$

が重解をもつときであり，① の判別式を D とすると

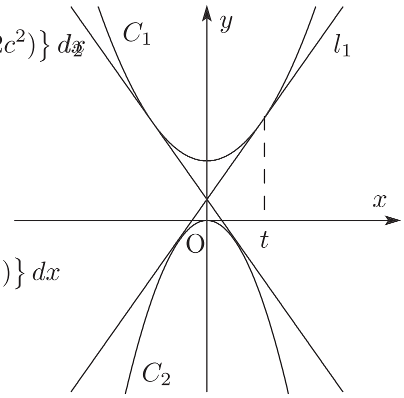
$$\frac{D}{4} = t^2 - 2(-t^2 + 6c^2) = 0$$

$$\therefore \quad t^2 = 4c^2 \text{ すなわち } t = \pm 2c$$

よって

$$\boldsymbol{l_1 : y = 4cx + 2c^2,\ l_2 : y = -4cx + 2c^2} \qquad \text{(答)}$$

(2) C_1 および C_2 の y 軸に関する対称性より



$$S_1 = 2\int_0^{2c} \left\{(x^2 + 6c^2) - (4cx + 2c^2)\right\} dx$$

$$= 2\int_0^{2c} (x - 2c)^2 dx$$

$$= 2\left[\frac{(x - 2c)^3}{3}\right]_0^{2c} = \frac{16}{3}c^3$$

$$S_2 = 2\int_0^{c} \left\{(-4cx + 2c^2) - (-2x^2)\right\} dx$$

$$= 2\int_0^{c} 2\,(x - c)^2\, dx$$

$$= 4\left[\frac{1}{3}\,(x - c)^3\right]_0^{c}$$

$$= \frac{4}{3}c^3$$

よって

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{16}{3}c^3}{\frac{4}{3}c^3} = \boldsymbol{4} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $y' = 2ax$ より $C : y = ax^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ ap^2\right)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y = 2ap(x-p) + ap^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y = 2apx - ap^2} \qquad (答)$$

(2) $ap \neq 0$ より，l_2 の傾きは $-\dfrac{1}{2ap}$ であるから，l_2 の方程式は

$$y = -\frac{1}{2ap}(x-p) + ap^2$$

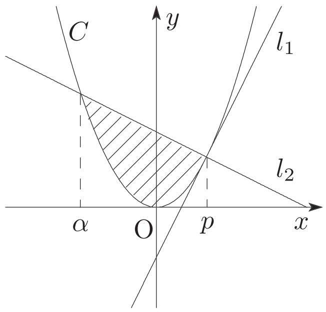
$$\therefore\quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2} \qquad (答)$$

(3) C と l_2 の方程式より y を消去すると

$$ax^2 = -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2$$

$$\therefore\quad ax^2 + \frac{1}{2ap}x - \frac{1}{2a} - ap^2 = 0$$

$$\therefore\quad (x-p)\left(ax + \frac{1}{2ap} + ap\right) = 0$$



ここで，$\alpha = -\dfrac{1}{2a^2p} - p$ とおくと，C と l_2 で囲まれる領域の面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^p \left(-\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2 - ax^2\right)dx \\
&= -\int_\alpha^p (x-p)\left(ax + \frac{1}{2ap} + ap\right)dx \\
&= -a\int_\alpha^p (x-p)(x-\alpha)dx \\
&= \frac{a}{6}(p-\alpha)^3 \\
&= \boldsymbol{\frac{a}{6}\left(2p + \frac{1}{2a^2p}\right)^3} \qquad (答)
\end{aligned}$$

(4) $p > 0$ より，相加・相乗平均の関係より

$$2p + \frac{1}{2a^2p} \geqq 2\sqrt{2p \cdot \frac{1}{2a^2p}} = \frac{2}{a} \ (\because\quad a > 0)$$

$$\therefore\quad S \geqq \frac{a}{6}\left(\frac{2}{a}\right)^3 = \frac{4}{3a^2}$$

等号は

$$2p = \frac{1}{2a^2p} \qquad \therefore\quad p = \frac{1}{2a}$$

のとき成立するので，S の最小値は

$$\boldsymbol{\frac{4}{3a^2}} \qquad (答)$$

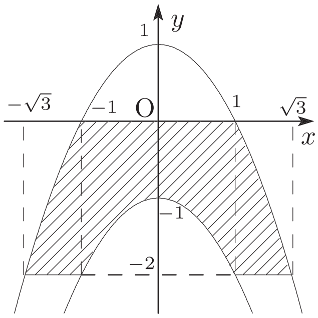
である.

問題

【1】(1) 与えられた不等式は

$$\begin{cases} |y+x^2| \leqq 1 \\ |y+1| \leqq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leqq y+x^2 \leqq 1 \\ -1 \leqq y+1 \leqq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x^2-1 \leqq y \leqq -x^2+1 \\ -2 \leqq y \leqq 0 \end{cases}$$



であるから，領域 D は右図の斜線部分のようになる．ただし，境界はすべて含む．

(答)

(2) 領域 D の面積 S は

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{-x^2+1-(-2)\right\} dx - \int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx - \int_{-1}^{1} \left\{-x^2-1-(-2)\right\} dx$$

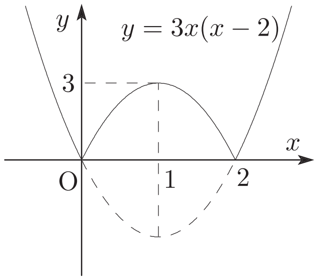
$$= -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})dx + 2\int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)dx$$

$$= \frac{(2\sqrt{3})^3}{6} - \frac{2\cdot 2^3}{6}$$

$$= \boldsymbol{4\sqrt{3} - \frac{8}{3}} \qquad \text{(答)}$$

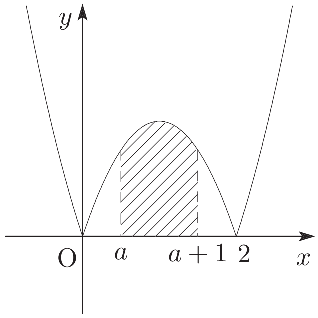
【2】(1) $$3x^2-6x=3x(x-2)=3(x-1)^2-3$$

より $y=\left|3x^2-6x\right|$ は $y=3x^2-6x$ の $y \leqq 0$ の部分を y 軸に関して折り返してできるグラフなのでこれを図示すると右図のようになる．　　(答)



(2) 積分区間 $a \leqq x \leqq a+1$ に 2 が含まれるか否かで場合を分けて考える．

(i) $a+1 \leqq 2 \iff a \leqq 1$ のとき，$a \geqq 0$ より



$$S(a)=\int_a^{a+1}(-3x^2+6x)dx$$
$$=\Big[F(x)\Big]_a^{a+1}$$
$$(F(x)=-x^3+3x^2\text{とおく})$$
$$=F(a+1)-F(a)$$

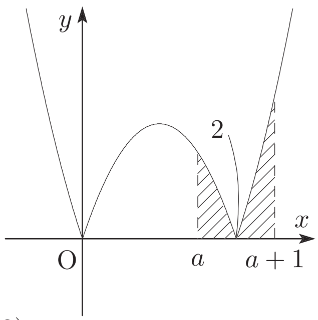
であり

$$F(a+1)=-(a+1)^3+3(a+1)^2$$
$$=-a^3-3a^2-3a-1+3a^2+6a+3$$
$$=-a^3+3a+2$$

より

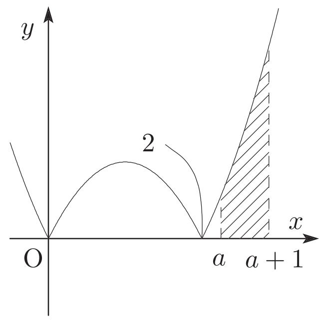
$$S(a)=-a^3+3a+2-(-a^3+3a^2)$$
$$=-3a^2+3a+2$$

(ii) $a \leqq 2 \leqq a+1 \iff 1 \leqq a \leqq 2$ のとき



$$S(a)=\int_a^2(-3x^2+6x)dx$$
$$+\int_2^{a+1}(3x^2-6x)dx$$
$$=\Big[F(x)\Big]_a^2+\Big[-F(x)\Big]_2^{a+1}$$
$$=2F(2)-F(a)-F(a+1)$$
$$=2\cdot4-(-a^3+3a^2)-(-a^3+3a+2)$$
$$=2a^3-3a^2-3a+6$$

(iii) $a \geqq 2$ のとき



$$S(a)=\int_a^{a+1}(3x^2-6x)dx$$
$$=\Big[-F(x)\Big]_a^{a+1}$$
$$=-F(a+1)+F(a)$$
$$=a^3-3a-2-a^3+3a^2$$
$$=3a^2-3a-2$$

以上をまとめて

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 \leqq a \leqq 1} \text{ のとき，} \boldsymbol{S(a)=-3a^2+3a+2} \\ \boldsymbol{1 \leqq a \leqq 2} \text{ のとき，} \boldsymbol{S(a)=2a^3-3a^2-3a+6} \\ \boldsymbol{a \geqq 2} \text{ のとき，} \boldsymbol{S(a)=3a^2-3a-2} \end{cases} \quad \textbf{(答)}$$

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ のとき

$$S'(a)=6a^2-6a-3=3(2a^2-2a-1)$$

$S'(a)=0$ かつ $1 \leqq a \leqq 2$ をみたす a の値を $a=\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ とおくと $S(a)$ の増減は下表のようになる．

a	1		α		2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで $S(a)$ を $2a^2-2a-1$ で割った商は $a-\dfrac{1}{2}$，余りは $-3a+\dfrac{11}{2}$ であるから

$$S(a)=(2a^2-2a-1)\left(a-\frac{1}{2}\right)-3a+\frac{11}{2}$$

と変形でき

$$S(\alpha)=(2\alpha^2-2\alpha-1)\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)-3\alpha+\frac{11}{2}$$
$$=-3\alpha+\frac{11}{2}=-3\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{11}{2}$$
$$=\frac{8-3\sqrt{3}}{2}$$

また，$a \geqq 2$ において，$S(a)$ は単調に増加するので，$S(a)$ は

$$\boldsymbol{a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

のとき最小で，その最小値は

$$\boldsymbol{\frac{8-3\sqrt{3}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $\{a_n\}$ は初項 0，公差 2 の等差数列なので

$$\boldsymbol{a_n = 2(n-1)} \qquad (答)$$

すると

$$b_{n+1} - b_n = 2(n-1) + \frac{4}{3} = 2n - \frac{2}{3}$$

であるから $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(2k - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(2 - \frac{2}{3}\right) + \left(2n - 2 - \frac{2}{3}\right)\right\}(n-1) \\ &= \frac{1}{2}\left(2n - \frac{4}{3}\right)(n-1) = \boldsymbol{(n-1)\left(n - \frac{2}{3}\right)} \qquad (答) \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立する．

(2) (i)

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{2}\int_x^{x+2} t^2 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_x^{x+2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left\{(x+2)^3 - x^3\right\} \\ &= \boldsymbol{x^2 + 2x + \frac{4}{3}} \qquad (答) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{1}{2}\int_x^{x+2}\left(t^2 + 2t + \frac{4}{3}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3 + t^2 + \frac{4}{3}t\right]_x^{x+2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left\{(x+2)^3 - x^3\right\} + \frac{1}{2}\left\{(x+2)^2 - x^2\right\} + \frac{2}{3}(x+2-x) \\ &= x^2 + 2x + \frac{4}{3} + 2x + 2 + \frac{4}{3} \\ &= \boldsymbol{x^2 + 4x + \frac{14}{3}} \qquad (答) \end{aligned}$$

(ii) すべての自然数 n について

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n$$

と表されることを数学的帰納法によって証明する．

(I) $n = 1$ のとき $a_1 = b_1 = 0$ より成立する．

(II) $n = k$ のとき $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$f_k(x) = x^2 + a_k x + b_k$$

と仮定すると

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \frac{1}{2}\int_x^{x+2}(t^2 + a_k t + b_k)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} + \frac{a_k}{2}t^2 + b_k t\right]_x^{x+2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left\{(x+2)^3 - x^3\right\} + \frac{a_k}{4}\left\{(x+2)^2 - x^2\right\} \\ &\qquad + \frac{b_k}{2}(x+2-x) \end{aligned}$$

$$= x^2 + (a_k + 2)x + a_k + b_k + \frac{4}{3}$$

であり

$$a_{k+1} = a_k + 2,\ b_{k+1} = a_k + b_k + \frac{4}{3}$$

をみたす $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して

$$f_{k+1}(x) = x^2 + a_{k+1}x + b_{k+1}$$

と表される．

したがって，すべての自然数 n について

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n$$

と表される．（証終）

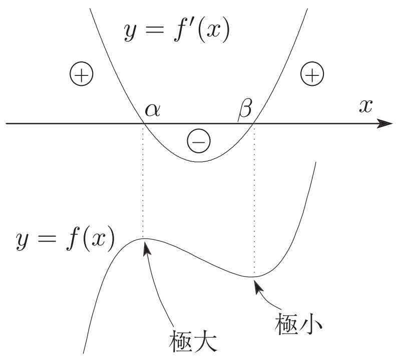
【4】(1) 3 次関数 $f(x)$ が極大値と極小値をもつためには

$f'(x)$ の符号が正から負，負から正に変化すること

が必要十分条件であり

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

より，$y = f'(x)$ のグラフが右図のようになればよい．



よって，$f'(x) = 0$ の判別式を D として

$$\frac{D}{4} = \boldsymbol{a^2 - 3b > 0} \qquad \text{(答)}$$

(2) α，β は $f'(x) = 0$ の 2 解なので，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{3}a,\ \alpha\beta = \frac{b}{3}$$

をみたす．

ここで

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \alpha^3 - \beta^3 + a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) \\ &= \alpha^3 - \beta^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2) + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^3 \end{aligned}$$

また

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{4}{9}(a^2 - 3b)$$

であり，$x = \alpha$ で極大値，$x = \beta$ で極小値をとるので，$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta < 0$.

よって

$$\alpha - \beta = -\frac{2}{3}(a^2 - 3b)^{\frac{1}{2}}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f(\alpha) - f(\beta) = \frac{4}{27}(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $a^2 \geqq 0$，$-3b \geqq 3$ より

$$a^2 - 3b \geqq 3$$

なので

$$f(\alpha) - f(\beta) \geqq \frac{4}{27} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$$

等号は $a = 0$，$b = -1$ のとき成立するので，求める最小値は

$$\boldsymbol{\frac{4}{9}\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

M3MB

難関大数学Ⅰ A Ⅱ B

難関大文系数学 M

Z-KAI

会員番号		氏　名	