P2J

本科 2 期 10 月度

解答

Z会東大進学教室

高 2 東大物理

１７章　万有引力（2）

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 円軌道の半径は $R+h$ なので，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{R+h}=\frac{GMm}{(R+h)^2} \qquad \therefore \quad v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

この速さで 1 周 $2\pi(R+h)$ を運動する時間が T なので，

$$T=\frac{2\pi(R+h)}{v}=2\pi(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}}$$

(2) 爆発直後の A の速さが v_{A} のとき，無限遠方で A の速さが 0 となることをふまえ，無限遠方を万有引力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot{v_{\mathrm{A}}}^2+\frac{-GM\cdot\frac{m}{2}}{R+h}=0+0 \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{A}}=\sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$$

(3) 爆発の前後における運動量の保存より，

$$mv=\frac{m}{2}v_{\mathrm{A}}+\frac{m}{2}v_{\mathrm{B}} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{B}}=2v-v_{\mathrm{A}}$$

これと (1)，(2) より，

$$v_{\mathrm{B}}=2\sqrt{\frac{GM}{R+h}}-\sqrt{\frac{2GM}{R+h}}=(2-\sqrt{2})\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

地表に達するときの B の速さを u_{B} とし，無限遠方を万有引力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot{v_{\mathrm{B}}}^2+\frac{-GM\cdot\frac{m}{2}}{R+h}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot{u_{\mathrm{B}}}^2+\frac{-GM\cdot\frac{m}{2}}{R}$$

これを解いて v_{B} を代入すると，

$$u_{\mathrm{B}}=\sqrt{\frac{2GM\{(3-2\sqrt{2})R+h\}}{R(R+h)}}$$

【2】

《解答》

(ア) 人工衛星の質量を m とすると，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

(イ) 第 2 宇宙速度を v' とすると，初速 v' で打ち上げた場合に無限遠方で速さが 0 となる．この場合について，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GMm}{R} = 0 + 0 \qquad \therefore \quad v' = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \cdots v \text{ の} \sqrt{2}\text{倍}$$

(ウ) $\dfrac{1}{2}m(av)^2 + 0 = \dfrac{1}{2}ma^2v^2$

(エ) $\dfrac{1}{2} \cdot av \cdot bR = \dfrac{1}{2}abRv$

(オ) $\dfrac{1}{2}XV$

(カ) $\dfrac{1}{2}mV^2 + \dfrac{-GMm}{X}$

(キ) (オ) で $X = R$，$V = V_0$ として，ケプラーの第 2 法則より，

$$\frac{1}{2}abRv = \frac{1}{2}RV_0 \qquad \therefore \quad V_0 = abv$$

(ク) (カ) で $X = R$，$V = V_0$ として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mV_0{}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}ma^2v^2$$

(ア)，(キ) をふまえると，

$$\frac{ma^2b^2}{2} \cdot \frac{GM}{R} - \frac{GMm}{R} = \frac{ma^2}{2} \cdot \frac{GM}{R} \qquad \therefore \quad b = \frac{\sqrt{a^2+2}}{a}$$

(ケ) 分裂して A の速さが v となる場合の B の速さを v_{B} として，B を打ち出す前後における運動量の保存より，

$$mV_0 = \frac{m}{2}v + \frac{m}{2}v_{\mathrm{B}} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{B}} = 2V_0 - v$$

よって，A から見て B を打ち出した速さは，

$$(2V_0 - v) - v = 2(V_0 - v)$$

【3】

《解答》

(ア) $m\dfrac{v^2}{r}$

(イ) 向心方向の運動方程式は,

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}\qquad\therefore\quad v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

(ウ) $T=\dfrac{2\pi r}{v}=2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}$

(エ) (ウ) を 2 乗すると,

$$T^2=4\pi^2r^2\frac{r}{GM}\qquad\therefore\quad \frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

(オ) (イ) より，惑星の運動エネルギーは,

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{m}{2}\cdot\frac{GM}{r}$$

また，万有引力による位置エネルギーは $U=-\dfrac{GMm}{r}$ なので,

$$K:U=\frac{GMm}{2r}:\frac{-GMm}{r}=1:-2$$

(カ) $\overline{\mathrm{FA}}=a-a\varepsilon$ なので,

$$\mathit{\Delta} S=\frac{1}{2}(a-a\varepsilon)\cdot v_{\mathrm{A}}\mathit{\Delta} t\qquad\therefore\quad I_{\mathrm{A}}=\frac{\mathit{\Delta} S}{\mathit{\Delta} t}=\frac{1-\varepsilon}{2}av_{\mathrm{A}}$$

(キ) $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{a^2-(a\varepsilon)^2}$ なので,

$$\mathit{\Delta} S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-(a\varepsilon)^2}\cdot v_{\mathrm{B}}\mathit{\Delta} t\quad\therefore\quad I_{\mathrm{B}}=\frac{\mathit{\Delta} S}{\mathit{\Delta} t}=\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}av_{\mathrm{B}}$$

(ク) $I_{\mathrm{A}}=I_{\mathrm{B}}$ より,

$$\frac{1-\varepsilon}{2}av_{\mathrm{A}}=\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}av_{\mathrm{B}}\qquad\therefore\quad v_{\mathrm{A}}=\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\times v_{\mathrm{B}}$$

(ケ) 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2+\frac{-GMm}{a-a\varepsilon}=\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}^2+\frac{-GMm}{a}$$

これと (ク) より,

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}{v_{\mathrm{B}}}^2-\frac{GMm}{a(1-\varepsilon)}=\frac{m}{2}\cdot{v_{\mathrm{B}}}^2-\frac{GMm}{a}\qquad\therefore\quad v_{\mathrm{B}}=\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

(コ) (キ)，(ケ) をふまえると,

$$T=\frac{\pi a\sqrt{a^2-(a\varepsilon)^2}}{\dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}a\cdot\sqrt{\dfrac{GM}{a}}}=2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}$$

【4】

《解答》

(イ) $K=\dfrac{1}{2}mv^2$

(ロ) $U=-\dfrac{GMm}{r}$

(ハ) 向心方向の運動方程式は,

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2} \qquad \therefore \quad r=\frac{GM}{v^2}$$

(ニ) (ロ), (ハ) より,

$$U=-\frac{GMm}{GM/v^2}=-mv^2 \qquad \therefore \quad \frac{K}{U}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{-mv^2}=-\frac{1}{2}$$

(ホ) (ニ) より $K=-\dfrac{1}{2}U$ と表せるので,

$$E=\left(-\frac{1}{2}U\right)+U=-\frac{GMm}{2r}$$

(ヘ) (ハ) より $v=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$ と表せるので,

$$T=\frac{2\pi r}{v}=2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$$

(ト) (ホ) の r を $\overline{\mathrm{AX}}=\dfrac{R+r}{2}$ で置き換えることにより,

$$E=-\frac{GMm}{2\cdot\overline{\mathrm{AX}}}=-\frac{GMm}{R+r}$$

(チ) 遠地点 A における力学的エネルギーが (ト) の E なので,

$$\frac{1}{2}mv'^2+\frac{-GMm}{R}=-\frac{GMm}{R+r} \qquad \therefore \quad v'=\sqrt{\frac{2GMr}{R(R+r)}}$$

また, (ハ) と同様に半径 R の円運動について立式すると,

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{GMm}{R^2} \qquad \therefore \quad v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

これらより,

$$\frac{v}{v'}=\frac{\sqrt{\dfrac{GM}{R}}}{\sqrt{\dfrac{2GMr}{R(R+r)}}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}+1\right)}$$

ここで (ヘ) をふまえると,

$$\begin{cases} T=2\pi R\sqrt{\dfrac{R}{GM}} \\ t=2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}} \end{cases} \qquad \therefore \quad \left(\frac{T}{t}\right)^2=\left(\frac{R}{r}\right)^3$$

以上より，$\dfrac{R}{r}$ を消去すると，

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{2}{3}} + 1\right\}}$$

(リ) (チ) をふまえると，

$$\frac{K}{K'} = \left(\frac{v}{v'}\right)^2 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{2}{3}} + 1\right\}$$

与えられた数値を代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{K}{K'} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{24 \times 60}{90}\right)^{\frac{2}{3}} + 1\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(4 \cdot 2^{\frac{2}{3}} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{4 \times (1.26)^2 + 1\right\} \fallingdotseq 3.7\end{aligned}$$

１８章　電場と電位（１）

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) 静電気力は大きさ qE で右向きに作用しているので，これとつりあう外力は大きさ qE で左向き．

(2) $\begin{cases} \mathrm{P} \to \mathrm{Q} \text{ の区間} & \cdots \quad W_{\mathrm{PQ}} = qEs_1 \\ \mathrm{Q} \to \mathrm{R} \text{ の区間} & \cdots \quad W_{\mathrm{QR}} = 0 \\ \mathrm{R} \to \mathrm{P} \text{ の区間} & \cdots \quad W_{\mathrm{RP}} = -qEs_1 \end{cases}$

(3) 右向きの一様な電場であることをふまえると，

$$\begin{cases} V_{\mathrm{P}} = Es_0 \\ V_{\mathrm{Q}} = E(s_0 + s_1) \\ V_{\mathrm{R}} = E(s_0 + s_1) \end{cases}$$

(4) 外力のした仕事は静電気力による位置エネルギー qV の変化分と一致するので，それぞれの区間について次式が成立している．

$$\begin{cases} \mathrm{P} \to \mathrm{Q} \text{ の区間} & \cdots \quad qV_{\mathrm{Q}} - qV_{\mathrm{P}} = W_{\mathrm{PQ}} \\ \mathrm{Q} \to \mathrm{R} \text{ の区間} & \cdots \quad qV_{\mathrm{R}} - qV_{\mathrm{Q}} = W_{\mathrm{QR}} \\ \mathrm{R} \to \mathrm{P} \text{ の区間} & \cdots \quad qV_{\mathrm{P}} - qV_{\mathrm{R}} = W_{\mathrm{RP}} \end{cases}$$

【2】

《解答》

(1) 極板間の電界の大きさを E とすると,

$$V = Ed \qquad \therefore \quad E = \frac{V}{d}$$

(2) 電界の向きが上向きであることをふまえると，油滴の運動方程式は,

$$ma = q \cdot \frac{V}{d} - mg - krv$$

(3) 油滴の上昇速度が一定の v_f となったとき，$a = 0$ なので,

$$0 = q \cdot \frac{V}{d} - mg - krv_f \qquad \therefore \quad v_f = \frac{1}{kr}\left(\frac{qV}{d} - mg\right)$$

(4) 油滴の密度が ρ なので,

$$\frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \rho \qquad \therefore \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \cdots ①$$

下向きを正とすると，油滴が一定の速度 v_g で下降するときの運動方程式は,

$$m \cdot 0 = mg - krv_g \quad \cdots ②$$

①，②より,

$$0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot g - krv_g \qquad \therefore \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3kv_g}{\pi \rho g}}$$

これを②に代入すると

$$0 = mg - kv_g \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3kv_g}{\pi \rho g}} \qquad \therefore \quad m = \frac{kv_g}{2g}\sqrt{\frac{3kv_g}{\pi \rho g}}$$

(5) 油滴が静止している場合，$v_f = 0$ なので,

$$\frac{qV}{d} - mg = 0 \qquad \therefore \quad \frac{md}{V} = \frac{q}{g}$$

$\frac{md}{V}$ の値に $g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$ を乗じることで，油滴の電荷 q を求めると,

$$\begin{cases} \dfrac{md}{V} = 1.6 \times 10^{-20}[\mathrm{kg \cdot m/V}] \text{ の油滴} & \cdots \quad q_1 = 1.57 \times 10^{-19}[\mathrm{C}] \\ \dfrac{md}{V} = 3.3 \times 10^{-20}[\mathrm{kg \cdot m/V}] \text{ の油滴} & \cdots \quad q_2 = 3.23 \times 10^{-19}[\mathrm{C}] \\ \dfrac{md}{V} = 4.9 \times 10^{-20}[\mathrm{kg \cdot m/V}] \text{ の油滴} & \cdots \quad q_3 = 4.80 \times 10^{-19}[\mathrm{C}] \end{cases}$$

電荷の最小単位を e とおくと，$q_1 \fallingdotseq e$，$q_2 \fallingdotseq 2e$，$q_3 \fallingdotseq 3e$ とみなしてよいであろうから，

$$\begin{aligned} e &= \frac{q_1 + q_2 + q_3}{1+2+3} \\ &= \frac{(1.57+3.23+4.80)\times 10^{-19}}{6} \fallingdotseq 1.6\times 10^{-19}[\mathrm{C}] \end{aligned}$$

油滴の電荷は最小単位 e の整数倍となっており，最小単位は $e = 1.6 \times 10^{-19}[\mathrm{C}]$ であることが分かる．

【3】

《解答》

(1) (ア) 電場の強さを E とすると，

$$V = Ed \qquad \therefore \quad E = \frac{V}{d}$$

(イ) $Ne \cdot E = \dfrac{NeV}{d}$

(ウ) $\dfrac{NeV}{d} \cdot d = NeV$

(エ) 加速後の速さを v として，運動エネルギーと仕事の関係より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = NeV \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{2NeV}{m}}$$

(オ) 等速直線

(カ) (エ)，(オ) をふまえると，

$$\sqrt{\frac{2NeV}{m}} \cdot T = L \qquad \therefore \quad T = L\sqrt{\frac{m}{2NeV}}$$

(キ) $\dfrac{L}{\sqrt{2eV}}$

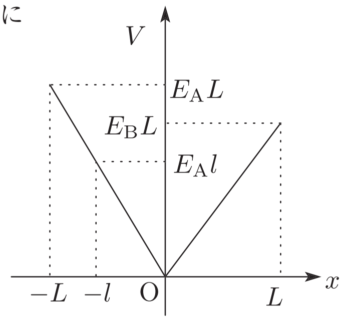
(ク) $\sqrt{\dfrac{m}{N}}$

(2) 分子の質量 m が同じでも，イオン化されたときの価数 N が異なっていると，飛行時間 T は異なるから．

【4】

《解答》

(1) 電極 Q を電位の基準とすると，各領域の電位分布は右図のようになっている．



原点 O での速さを v_0 として，力学的エネルギーの保存より，

$$0 + q \cdot E_\mathrm{A} l = \frac{1}{2} m {v_0}^2 + 0 \qquad \therefore \quad v_0 = \sqrt{\frac{2qE_\mathrm{A} l}{m}}$$

(2) 電極 R の電位が点 S の電位よりも高ければよいので，

$$E_\mathrm{B} L > E_\mathrm{A} l \qquad \therefore \quad E_\mathrm{B} > \frac{l}{L} E_\mathrm{A}$$

(3) 右端の x 座標を x_0 として，力学的エネルギーの保存より，

$$0 + q \cdot E_\mathrm{A} l = 0 + q \cdot E_\mathrm{B} x_0 \qquad \therefore \quad x_0 = \frac{E_\mathrm{A}}{E_\mathrm{B}} l$$

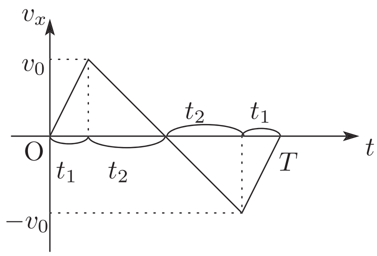
よって，領域 II の往復では，

$$(\text{移動距離}) = 2 \times \frac{E_\mathrm{A}}{E_\mathrm{B}} l$$

(4) 領域 I，II における粒子の加速度をそれぞれ α_1，α_2 とすると，各領域における運動方程式は，

$$\begin{cases} m\alpha_1 = qE_\mathrm{A} \\ m\alpha_2 = -qE_\mathrm{B} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{qE_\mathrm{A}}{m} \\ \alpha_2 = -\dfrac{qE_\mathrm{B}}{m} \end{cases}$$

また，初速度は 0 なので，x 方向の速度 v_x は右図のように変化することが分かる．左端の点 S から原点 O に到達するまでの時間を t_1，原点 O から右端に到達するまでの時間を t_2 とすると，



$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{qE_\mathrm{A}}{m} t_1 \\ 0 = v_0 - \dfrac{qE_\mathrm{B}}{m} t_2 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{mv_0}{qE_\mathrm{A}} \\ t_2 = \dfrac{mv_0}{qE_\mathrm{B}} \end{cases}$$

これらと (1) をふまえると，振動の周期は，

$$\begin{aligned} T &= 2t_1 + 2t_2 \\ &= \frac{2mv_0}{q} \left(\frac{1}{E_\mathrm{A}} + \frac{1}{E_\mathrm{B}} \right) = 2\sqrt{\frac{2mE_\mathrm{A} l}{q}} \left(\frac{1}{E_\mathrm{A}} + \frac{1}{E_\mathrm{B}} \right) \end{aligned}$$

１９章　電場と電位（2）

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 電界の大きさは電位の傾きの大きさと等しく，電界の向きは電位の下がる向きと一致しているので，

$$\begin{cases} \text{OA 間の電界} & \cdots \quad E_1 = \dfrac{a}{d} \\ \text{AB 間の電界} & \cdots \quad E_2 = 0 \\ \text{BC 間の電界} & \cdots \quad E_3 = -\dfrac{a}{d} \end{cases}$$

(2) (a) B 点における速さを v_{B} として，力学的エネルギーの保存より，

$$0 + Q \cdot 3a = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}^2 + Q \cdot a \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{B}} = 2\sqrt{\frac{aQ}{m}}$$

(b) BC 間を運動しているときの加速度を α とすると，運動方程式は，

$$m\alpha = -Q \cdot \frac{a}{d} \qquad \therefore \quad \alpha = -\frac{Qa}{md}$$

(c) (a)，(b) より，時刻 t での速度は，

$$v(t) = 2\sqrt{\frac{aQ}{m}} - \frac{aQ}{md}t$$

(d) C 点における速度を v_{C} として，力学的エネルギーの保存より，

$$0 + Q \cdot 3a = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{C}}}^2 + Q \cdot 2a \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{C}} = \sqrt{\frac{2aQ}{m}}$$

【2】

《解答》

(a) A が B から受ける静電気力の大きさは $\dfrac{kQq}{r^2}$ と表せるので,

$$qE = \frac{kQq}{r^2} \qquad \therefore \quad E = \frac{kQ}{r^2}$$

(b) $\dfrac{kQq}{{r_i}^2} \cdot (r_{i+1} - r_i)$

(c) 与えられた近似式を用いて,(b) の結果を書き換えると,

$$\begin{aligned} kQq\frac{r_{i+1} - r_i}{{r_i}^2} &\fallingdotseq kQq\left\{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + (r_{i+1} - r_i)}\right\} \\ &= \frac{kQq}{r_i} - \frac{kQq}{r_{i+1}} \end{aligned}$$

これを点 P から無限遠まで合計した仕事が,P において A のもつ位置エネルギー U と等しいので,

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{kQq}{r} - \frac{kQq}{r_1}\right) + \left(\frac{kQq}{r_1} - \frac{kQq}{r_2}\right) + \cdots \\ &= \frac{kQq}{r} \end{aligned}$$

(d) $V = \dfrac{kQ}{r}$

(e) 向心方向の運動方程式は,

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{kQq}{r^2} \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{kQq}{mr}}$$

(f) (e) より,C の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{kQq}{2r}$ と表せるので,力学的エネルギーは,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{kQ\cdot(-q)}{r} = -\frac{kQq}{2r}$$

(g) (f) の力学的エネルギーが減少すると,r が小さくなる.よって,C が徐々にエネルギーを放出すると,円運動の半径が小さくなるとともに,速さは大きくなると考えられる.

【3】

《解答》

(ア) $\dfrac{kQ}{\sqrt{L^2+x^2}}$

(イ) $\dfrac{kQ}{L^2+x^2}$

(ウ) $V=\dfrac{2kQ}{\sqrt{L^2+x^2}}$

(エ) $\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{BPO}$ なので，この角度をθ とすると，

$$\begin{aligned}E_x&=|\overrightarrow{E_{\mathrm{A}}}|\cos\theta+|\overrightarrow{E_{\mathrm{B}}}|\cos\theta\\&=\frac{kQ}{L^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}\times 2\\&=\frac{2kQx}{(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(オ) $E_y=0$

(カ) 静電気力による位置エネルギーを U とすると，

$$U=(-q)\cdot V=-\frac{2kQq}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

(キ) $\dfrac{1}{2}m{v_0}^2-\dfrac{2kQq}{\sqrt{L^2+3L^2}}=\dfrac{1}{2}m{v_0}^2-\dfrac{kQq}{L}$

(ク) (カ)，(キ) をふまえると，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{kQq}{L}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{2kQq}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

(ケ) 無限遠方での速度を v_∞ とすると，(ク) より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{kQq}{L}=\frac{1}{2}m{v_\infty}^2-0 \qquad \therefore\quad \frac{1}{2}m{v_\infty}^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{kQq}{L}$$

$\dfrac{1}{2}m{v_\infty}^2\geqq 0$ より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{kQq}{L}\geqq 0 \qquad \therefore\quad v_0\geqq\sqrt{\frac{2kQq}{mL}}$$

(コ) 与えられた近似式を用いると $E_x\fallingdotseq\dfrac{2kQx}{L^3}$ とみなせるので，

$$\begin{aligned}ma&=(-q)\cdot E_x\\&=-q\cdot\frac{2kQx}{L^3} \qquad \therefore\quad a=-\frac{2kQq}{mL^3}x \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

(サ) $(*)$ より，運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数}\,\omega=\sqrt{\frac{2kQq}{mL^3}} \qquad \therefore\quad \text{周期}\ T=2\pi\sqrt{\frac{mL^3}{2kQq}}$$

【4】

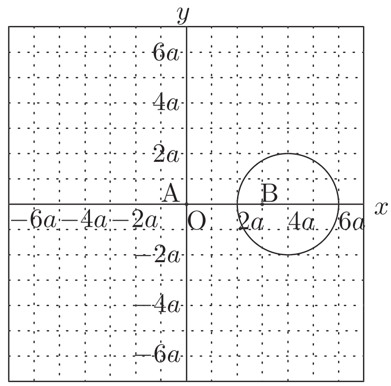
《解答》

(a) $\begin{cases} R_1 = \sqrt{X^2+Y^2} \\ R_2 = \sqrt{(X-3a)^2+Y^2} \end{cases}$

(b) $V = \dfrac{k\cdot(-2Q)}{R_1} + \dfrac{kQ}{R_2}$

$= kQ\left\{\dfrac{1}{\sqrt{(X-3a)^2+Y^2}} - \dfrac{2}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right\}$

(c) $V=0$ となる位置では，



$$\frac{1}{\sqrt{(X-3a)^2+Y^2}} = \frac{2}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

2 乗して整理すると，

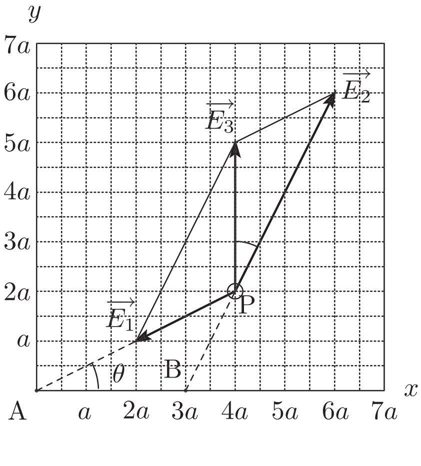
$$(X-4a)^2+Y^2=(2a)^2$$

これは，中心が $(4a,\ 0)$ で半径が $2a$ の円を表している．

(d) $\overline{\mathrm{AP}} = 2\sqrt{5}a$，$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{5}a$ なので，

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{k\cdot 2Q}{(2\sqrt{5}a)^2} = \dfrac{kQ}{10a^2} \\ E_2 = \dfrac{kQ}{(\sqrt{5}a)^2} = \dfrac{kQ}{5a^2} \end{cases}$$

(e) $\angle\mathrm{PAB} = \theta$ とおき，$\overrightarrow{E_3} = (E_x, E_y)$ とすると，



$$\begin{aligned} E_x &= E_2\sin\theta - E_1\cos\theta \\ &= \frac{kQ}{5a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{kQ}{10a^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \\ E_y &= E_2\cos\theta - E_1\sin\theta \\ &= \frac{kQ}{5a^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{kQ}{10a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3kQ}{10\sqrt{5}a^2} \end{aligned}$$

(f) C の電気量を $q\,(>0)$ として，力のつり合いより，

$$0 = q\cdot\frac{3kQ}{10\sqrt{5}a^2} - mg \qquad \therefore\quad q = \frac{10\sqrt{5}mga^2}{3kQ}$$

添削課題

《解答》

(1) $ma = qE$

(2) 運動エネルギーと仕事の関係より，

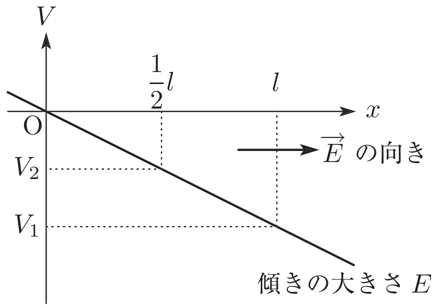
$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 - 0 = qE \cdot l \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{\frac{2qEl}{m}}$$

(3) 運動エネルギーと仕事の関係より，

$$0 - \frac{1}{2}m{v_2}^2 = -qE \cdot \frac{1}{2}l \qquad \therefore \quad v_2 = \sqrt{\frac{qEl}{m}}$$

(4) 物体 P の初期位置を原点として，右向きを正とする x 軸を設定すると，電位 V と位置 x の関係を表すグラフは右図のようになるので，

$$\begin{cases} V_1 = -El \\ V_2 = -E \cdot \dfrac{l}{2} \end{cases}$$



配点

(1)10 点

(2)〜(4) 各 30 点

《解説》

(2)，(3) では運動エネルギーと仕事の関係に注目したが，仕事の代わりに位置エネルギー $U = qV$ を用いて立式することもできる．

(4) と同じく，初期位置を $V = 0$ とすると，力学的エネルギー保存の式は次のようになる．

$$\text{衝突前} \quad \cdots \quad 0 + q \cdot 0 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + qV_1$$

$$\text{衝突後} \quad \cdots \quad \frac{1}{2}m{v_2}^2 + qV_1 = 0 + qV_2$$

また，$v - t$ グラフを描いて求めていくこともできるので，各自で試みて欲しい．

２０章　電気力線

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) 合成電場の向きは，直線を中心軸とした円筒面に垂直で直線から離れる向きなので，電気力線の様子は図 1(a)，(b) のようになる．

(2) 合成電場の向きは，直線を中心軸とした円筒面に垂直で直線に近づく向きなので，電気力線の様子は図 2(a)，(b) のようになる．

(3) 合成電場の向きは，平面に垂直で平面から離れる向きなので，電気力線の様子は図 3 のようになる．

(4) 合成電場の向きは，平面に垂直で平面に近づく向きなので，電気力線の様子は図 4 のようになる．

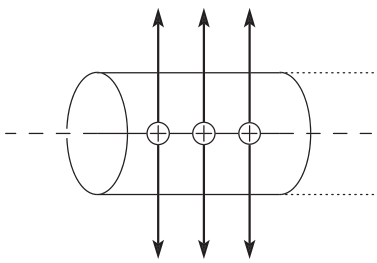


図 1(a)

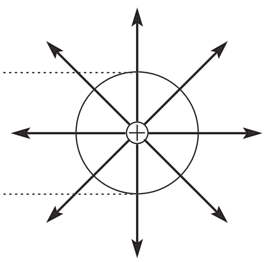


図 1(b)

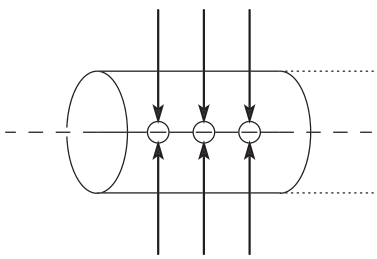


図 2(a)

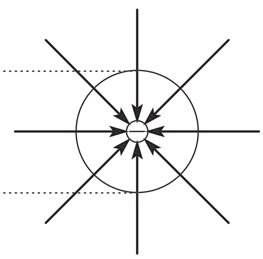


図 2(b)

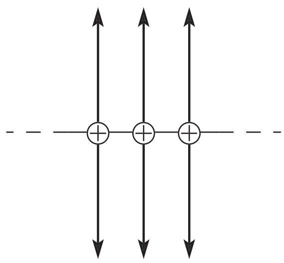


図 3

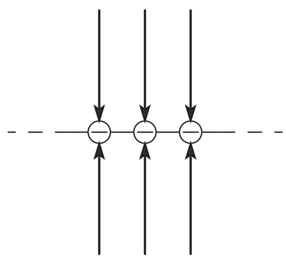


図 4

【2】

《解答》

(1) (ア) $4\pi kQ$

(イ) $\dfrac{4\pi kQ}{4\pi r^2}=\dfrac{kQ}{r^2}$

(ウ) $\dfrac{kQ}{r^2}$

(2) (エ) $r<a$ のとき，球面 S の内部にある電荷は 0 なので，電気力線の密度は，

$$\frac{4\pi k\cdot 0}{4\pi r^2}=0 \quad \cdots \quad \text{電界が存在しない.}$$

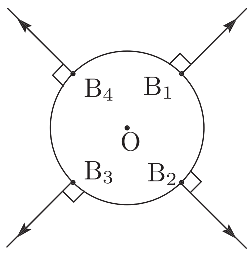
(オ) $r<a$ のとき，球面 S の内部にある電荷を Q' とすると，

$$Q'=Q\times\frac{\dfrac{4}{3}\pi r^3}{\dfrac{4}{3}\pi a^3}=\frac{r^3}{a^3}Q$$

この電荷から $4\pi kQ'$ 本の電気力線が湧き出すので，電気力線の密度は，

$$\frac{4\pi k\cdot\dfrac{r^3}{a^3}Q}{4\pi r^2}=\frac{kQ}{a^3}r$$

(3) 球 A の内側には電気力線が存在せず，球 A の外側には (a) の場合と同じ電界が生じているので，電気力線の様子は右図のようになる．

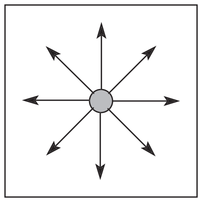


(4) 導体球に電荷を与えると，電荷が反発しあうことで球の内部で電荷が移動し，球の表面が一様に帯電するので，(b) の電荷分布となる．

【3】

《解答》

(a) 右図

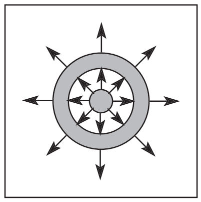


(b) 糸に垂直な方向の力のつりあいより,

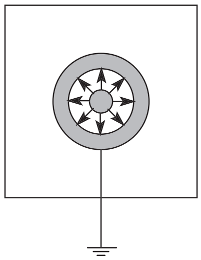
$$0 = \frac{kQ_{\mathrm{A}}Q_{\mathrm{B}}}{d^2}\cos\theta - mg\sin\theta$$

$$\therefore \quad Q_{\mathrm{B}} = \frac{mgd^2\tan\theta}{kQ_{\mathrm{A}}}$$

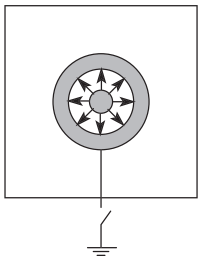
(c) 静電誘導により,C の内面には $-Q_{\mathrm{B}}$ の負電荷が現れる.このとき,C の外面には Q_{B} の正電荷が現れ,C の外部には (a) と同じ電界を生じているので,A には (b) のときと同じ電気力が作用する.よって,糸の角度は θ のままとなる.



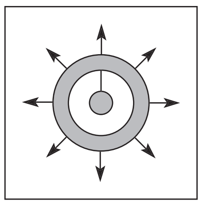
(d) 導線を通って電子が流入し C の外面の電荷が 0 となる.このとき,C の外部では電界が 0 となるので,A には電気力が作用しない.よって,糸の角度は 0 となる.



(e) 導線を切り離しても電気量の分布は変わらない.このため,C の外部の電界は 0 のままで,A には電気力が作用しない.よって,糸の角度は 0 のままとなる.



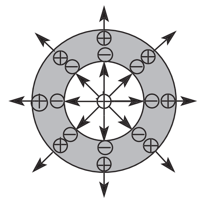
(f) C と B をつなぐと,B の電荷はすべて C の外面に移動する.このとき,C の外部には (a) と同じ電界 (c) を生じているので,A には (b) のときと同じ電気力が作用する.よって,糸の角度は θ にもどる.



【4】

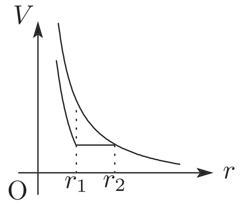
《解答》

(1) 中心の電荷 Q により導体球の内面には電荷 $-Q$ が誘導されるので，導体球の外面には電荷 Q が現れる．よって，電荷の分布は右図のようになる．

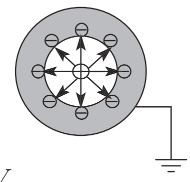


(2) 導体の内部では電場が 0 なので，そこには電気力線が存在しない．よって，電気力線の分布は右図のようになる．

(3) $r = r_1$ から $r = r_2$ までの電位差が消失するので，$r < r_1$ での電位もその分だけ下がる．よって，$V - r$ グラフは右図のようになる．

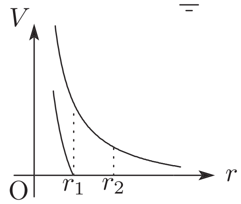


(4) 電子が流入して導体球外面の電荷が 0 となるので，電荷の分布は右図のようになる．



(5) 導体球の外面では電場が 0 なので，そこには電気力線が存在しない．よって，電気力線の分布は右図のようになる．

(6) $r = r_1$ より外側の電位差が消失するので，$r < r_1$ での電位もその分だけ下がる．よって，$V - r$ グラフは右図のようになる．



P2J
高２東大物理

Z-KAI

会員番号		氏　名	