

本科 2 期 10 月度

解答

Z会東大進学教室

東大物理



17章 電流の磁気作用

問題

■演習

【1】

《解答》

(a) $(a, -a)$ の位置では, 合成磁場の y 成分が 0 なので,

$$H_y(a, -a) + H_E = 0 \quad \therefore H_y(a, -a) = -H_E$$

(b) 電流がつくる磁場は x 軸に関して対称に生じているので,

$$\begin{aligned} H_y(a, a) &= -H_y(a, -a) \\ &= +H_E \end{aligned}$$

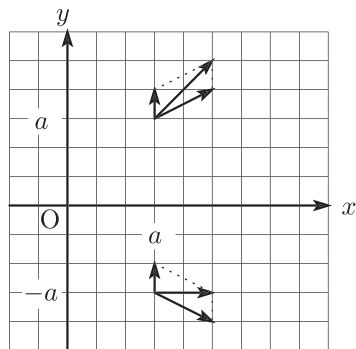
(c) 合成磁場の向きより, (a, a) の位置では合成磁場の x 成分と y 成分が等しく,

$$H_x(a, a) + 0 = H_y(a, a) + H_E \quad \therefore H_x(a, a) = 2H_E$$

(d) (b) のときと同様に考えると,

$$\begin{aligned} H_x(a, -a) &= +H_x(a, a) \\ &= 2H_E \end{aligned}$$

(e) (a)~(d) より, 電流がつくる磁場と合成磁場は下図のようになる.



(f) 電流がつくる磁場の向きより, 電流の向きは反時計回り.

[2]

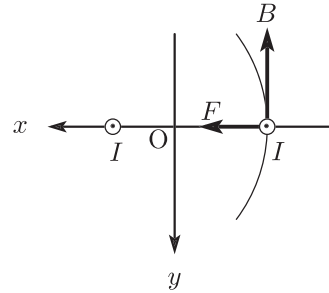
《解答》

(1) A に流れる電流が点 $(-a, 0, 0)$ に作る磁束密度は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{大きさ} \dots B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot 2a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\text{T}] \\ \text{方向} \dots -y \text{ 方向} \end{array} \right.$$

B の 1m 当たりに及ぼす力は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{大きさ} \dots F = IB = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a} [\text{N/m}] \\ \text{方向} \dots +x \text{ 方向} \end{array} \right.$$



(2) A, B に流れる電流それぞれが点 P に作る磁束密度の大きさは等しく $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{a^2 + y^2}} [\text{T}]$ なので, ベクトル和は,

$$B = B_0 \cos \theta \times 2 = \frac{\mu_0 I}{\pi \sqrt{a^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} [\text{T}]$$

これは $-x$ 方向を正として表したもののなので, 磁束密度の各成分は,

$$(B_x, B_y, B_z) = \left(-\frac{\mu_0 I y}{\pi(a^2 + y^2)} [\text{T}], 0 \text{ T}, 0 \text{ T} \right)$$

(3) L が磁場から受ける力の y 成分は,

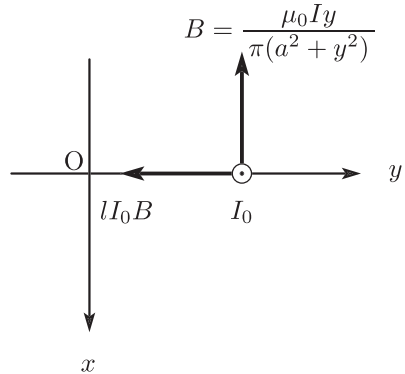
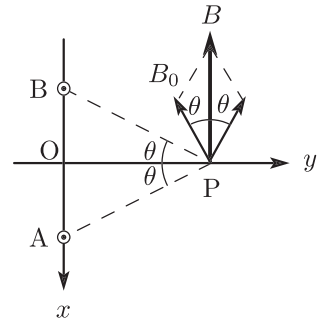
$$\begin{aligned} F_y &= -l I_0 B \\ &= -\frac{\mu_0 I I_0 l}{\pi} \cdot \frac{y}{a^2 + y^2} [\text{N}] \end{aligned}$$

ここで, $\frac{y}{a^2 + y^2}$ に注目すると,

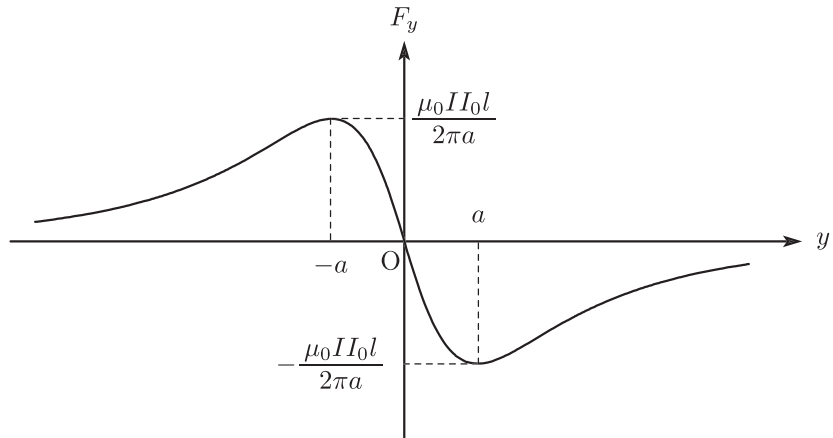
$$\left\{ \begin{array}{l} |y| \gg a \text{ のとき} \dots \frac{y}{a^2 + y^2} \approx \frac{1}{y} \\ |y| \ll a \text{ のとき} \dots \frac{y}{a^2 + y^2} \approx \frac{y}{a^2} \end{array} \right.$$

また, 相加相乗平均の関係を用いて $y \geq 0$ での最大値を求めることができ,

$$\frac{y}{a^2 + y^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{y} + y} \leq \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a^2}{y}\right) \cdot y}} \quad \therefore \left(\frac{y}{a^2 + y^2} \right)_{\max} = \frac{1}{2a}$$



以上より, F_y の概略は下図のようになる.



(4) (3) より, $|y| \ll a$ では,

$$F_y \approx -\frac{\mu_0 I I_0 l}{\pi} \cdot \frac{y}{a^2} [\text{N}]$$

よって, 運動方程式の y 成分は,

$$M\ddot{y} = -\frac{\mu_0 I I_0 l}{\pi} \cdot \frac{y}{a^2} \quad \therefore \quad \ddot{y} = -\frac{\mu_0 I I_0 l}{\pi M a^2} y$$

この単振動の周期は,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\pi M a^2}{\mu_0 I I_0 l}} [\text{s}]$$

【3】

《解答》

(1) 右ねじ

$$(2) H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$(3) H \cdot 2\pi r = I$$

$$(4) W = H \cdot \overline{AB} + 0 \cdot \overline{BC} + 0 \cdot \overline{CD} + 0 \cdot \overline{DA} \\ = H \cdot L$$

$$(5) nL \cdot I$$

(6) アンペールの法則より,

$$HL = nLI \quad \therefore H = nI$$

【4】

《解答》

(a) 右図で、

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{AC} = 2a \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) \\ &= 2a \sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

よって、

$$|\vec{H}_B| = |\vec{H}_C| = \frac{I}{2\pi \cdot \overline{AB}} = \frac{I}{4\pi a \sin(\theta/2)}$$

対称性も考えて、

$$H = |\vec{H}_B| \sin\frac{\theta}{2} + |\vec{H}_C| \sin\frac{\theta}{2} = \frac{I}{2\pi a}$$

(b) 右図の向きに大きさ F は、

$$F = I \cdot \mu_0 H \cdot l = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a}$$

(c) ① 円周を $2N + 1$ 等分して、

$$\Delta w = \frac{2\pi a}{2N + 1}$$

② パイプ状導体の断面が $2N + 1$ 等分されるから、

$$\Delta I = \frac{I}{2N + 1}$$

③ (b) の結果で $I \rightarrow \Delta I$ として、

$$\Delta F_n = \frac{\mu_0 (\Delta I)^2 l}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a (2N + 1)^2}$$

④ ③の結果より、

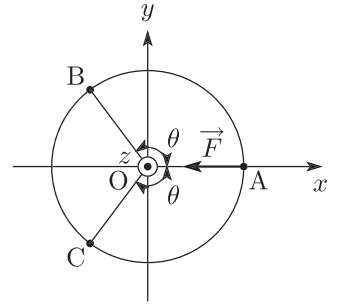
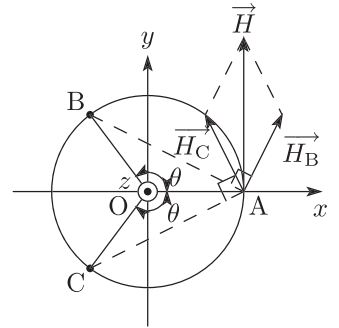
$$F_N = \sum_{n=1}^N \Delta F_n = N \cdot \Delta F_n = \frac{\mu_0 N I^2 l}{2\pi a (2N + 1)^2}$$

⑤ ①, ④の結果より、

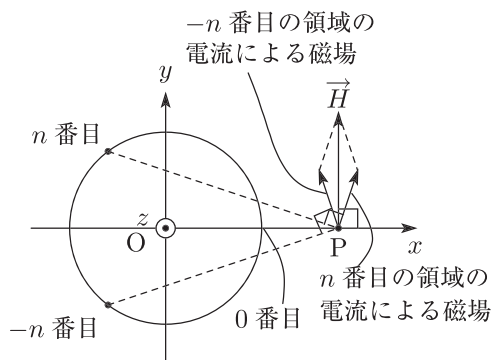
$$f_N = \frac{F_N}{l \Delta w} = \frac{\mu_0 N I^2}{4\pi^2 a^2 (2N + 1)}$$

⑥ ⑤の結果で $N \rightarrow \infty$ として、

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2}$$



- (d) 下図のように、 n 番目と $-n$ 番目の領域を流れる電流が点 P に作る磁場は、 n の値によらず xy 平面内であり x 成分が相殺されるので、 y 軸の正の向きとなる。また 0 番目の領域を流れる電流が点 P に作る磁場も y 軸の正の向きとなる。よって合成磁場 \vec{H} の向きは y 軸の正の向きとなり xy 平面内にあつて x 軸に垂直となる。



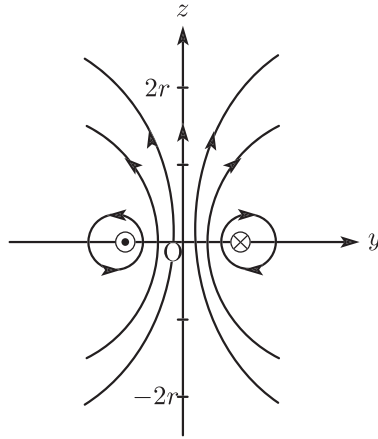
添削課題

《解答》

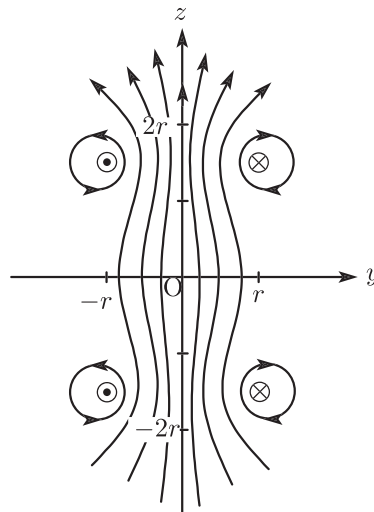
[A] (a) ビオ・サバールの法則より、透磁率を μ とすると

$$B_0 = \mu \cdot \frac{I}{2r} = k \cdot \frac{I}{r}$$

(b)



[B] (c) 電流の近傍では (b) と同じ磁場となり、 y 軸上では合成磁場が z 方向に生じていることに注意すると下図のようになる。



[C] (d) $z > 0$ の電流と $z < 0$ の電流それぞれが原点に B_2 をつくり、これら2つを合成したものが B_1 となるので、

$$B_2 + B_2 = B_1 \quad \therefore \quad B_2 = \frac{1}{2} B_1$$

配点

100点

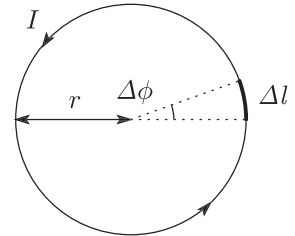
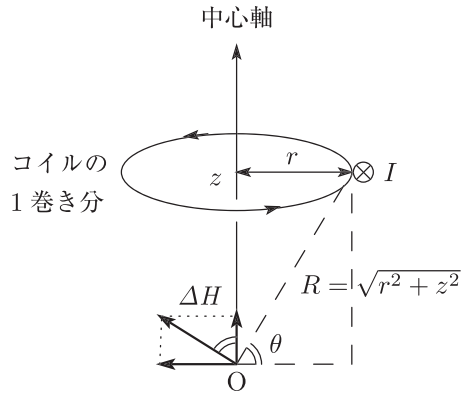
(a)→10点, (b)→30点, (c)→30点, (d)→30点(理由が20点)

《解説》

ソレノイド・コイル内部の磁場はアンペールの法則を適用して求めることができたが、この磁場は電流素片がつくる磁場を合成して求めることもできる。ここではコイルの中心軸上について考えてみよう。

z 軸に沿って巻いた半径 r のソレノイド・コイルに電流 I が流れているとき、右図の点 O に生じる合成磁場を求めるには次の手順をふめばよい。

- ① 微小長さ Δl の電流素片が点 O につくる磁場を表す。
- ② $\phi = 0$ から 2π にわたって、①の磁場を合成(積分)する。
- ③ 微小厚さ Δz の巻き数を②の磁場に乘じる。
- ④ $z = -\infty$ から ∞ にわたって、③の磁場を合成(積分)する。



位置 z にある 1 巻きのうち、中心角 $\Delta\phi$ の部分の長さは $\Delta l = r\Delta\phi$ と表せる。この電流素片が点 O につくる磁場のうち、 z 軸に平行な成分を ΔH とすると、

$$\begin{aligned} \Delta H &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \Delta l \sin \frac{\pi}{2}}{R^2} \times \cos \theta \\ &= \frac{Ir\Delta\phi}{4\pi R^2} \times \frac{r}{R} \\ &= \frac{Ir^2 \Delta\phi}{4\pi(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$\phi = 0$ から 2π にわたって ΔH を合計(積分)すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{Ir^2}{4\pi(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi &= \left[\frac{Ir^2}{4\pi(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \phi \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{Ir^2}{2(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

単位長さ 1m あたりの巻き数を n とすると、微小厚さ Δz の巻き数は $\Delta N = n\Delta z$ と表せる。よって、位置 z の付近の微小厚さ Δz の部分が点 O につくる磁場は、

$$\frac{Ir^2}{2(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \times \Delta N = \frac{Ir^2 n \Delta z}{2(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \dots (*)$$

これを合計 (積分) するために, 変数変換 $z = r \tan \theta$ を行うと,

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \theta} \\ \frac{dz}{d\theta} = \frac{r}{\cos^2 \theta} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos^3 \theta}{r^3} \\ dz = \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta \end{cases}$$

これをふまえて, $z = -\infty$ から ∞ にわたって (*) を合計 (積分) すると,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I r^2 n}{2(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I r^2 n}{2} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{r^3} \times \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I n}{2} \cos \theta d\theta \\ &= \left[\frac{I n}{2} \sin \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= nI \quad \therefore \quad H = nI \end{aligned}$$

こうして, アンペールの法則を適用して求めたのと同じ表式が得られた. また, $z < 0$ にあるコイルを取り除いて, 点 O がソレノイド・コイルの端となった場合には, 積分区間が $z = 0$ から ∞ すなわち $\theta = 0$ から $\frac{\pi}{2}$ となるので, 点 O に生じる磁場は $H = \frac{1}{2} nI$ となる.

18章 電磁誘導 (1)

問題

■演習

【1】

《解答》

(イ) 回路を貫く磁束を $\Phi \equiv B \cdot a^2$ とみなすと、上から見て時計回りを正とする誘導起電力は、

$$\begin{aligned} V &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -a^2 \frac{dB}{dt} \\ &= -a^2 \cdot \frac{B_0}{T} \quad \therefore |V| = \frac{a^2 B_0}{T} \end{aligned}$$

(ロ) 電流の大きさを I とすると、回路の方程式は、

$$RI = \frac{a^2 B_0}{T} \quad \therefore I = \frac{a^2 B_0}{RT}$$

(ハ) $V < 0$ なので、電流の向きは $P \rightarrow Q$ 。

(ニ) $B = \frac{B_0}{T}t$

(ホ) (ロ)、(ニ)より、磁場から受ける力の大きさは、

$$\begin{aligned} F &= IBa \\ &= \frac{a^2 B_0}{RT} \cdot \frac{B_0}{T}t \cdot a \\ &= \frac{a^3 B_0^2}{RT^2}t \end{aligned}$$

(ヘ) ばねの伸びを x とすると、導線 PQ がゆっくり移動するときの運動方程式は、

$$0 = \frac{a^3 B_0^2}{RT^2}t - kx \quad \therefore \dot{x} = \frac{a^3 B_0^2}{kRT^2}$$

(ト) (ヘ)をふまえると、

$$\frac{a^3 B_0^2}{kRT^2} \times T = \frac{a^3 B_0^2}{kRT}$$

【2】**《解答》**

(イ) おもりを持ち上げることができる限界のとき、棒 PQ に流れる電流を I_0 、ひもの張力を T_0 とすると、棒とおもりの運動方程式及び回路の方程式は、

$$\begin{cases} 0 = I_0 Bl - T_0 \\ 0 = T_0 - mg \\ RI_0 = E \end{cases}$$

以上より、 I_0 と T_0 を消去すると、

$$0 = \frac{E}{R} Bl - mg \quad \therefore R = \frac{EBl}{mg}$$

(ロ) vBl

(ハ) 回路の方程式は、

$$R_0 I = E - vBl \quad \therefore I = \frac{E - vBl}{R_0}$$

$$(ニ) Ma = \frac{E - vBl}{R_0} \cdot Bl - T \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(ホ) ma = T - mg \quad \dots \textcircled{2}$$

(ヘ) ①+②より、

$$(M + m)a = \frac{E - vBl}{R_0} \cdot Bl - mg \quad \therefore a = \frac{EBl - mgR_0 - vB^2l^2}{R_0(M + m)}$$

(ト) v が v_∞ に収束して、 $a = 0$ となるとき、

$$EBl - mgR_0 - v_\infty B^2l^2 = 0 \quad \therefore v_\infty = \frac{EBl - mgR_0}{(Bl)^2}$$

(チ) $v = v_\infty$ のときの電流は、

$$I_\infty = \frac{E - v_\infty Bl}{R_0} = \frac{mg}{Bl} \quad \therefore EI_\infty = \frac{mgE}{Bl}$$

$$(リ) R_0 I_\infty^2 = R_0 \left(\frac{mg}{Bl} \right)^2$$

$$(ヌ) mgv_\infty = \frac{mgE}{Bl} - R_0 \left(\frac{mg}{Bl} \right)^2$$

《解説》

棒 PQ の矢印向き速度を v ，P→Q の向きを正とする電流を I ，ひもの張力を T とすると，回路の方程式と運動方程式は，

$$\begin{cases} R_0 I = E - vBl \quad \dots \textcircled{1} \\ M \frac{dv}{dt} = IBl - T \quad \dots \textcircled{2} \\ m \frac{dv}{dt} = T - mg \quad \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

以上より， v ， I を t の関数として決定できる．①より，

$$I = -\frac{Bl}{R_0}v + \frac{E}{R_0} \quad \dots \textcircled{1}'$$

これを②+③に代入すると，

$$(M+m) \frac{dv}{dt} = Bl \left(-\frac{Bl}{R_0}v + \frac{E}{R_0} \right) - mg$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = -\frac{(Bl)^2}{(M+m)R_0} \left\{ v - \frac{BLE - mgR_0}{(Bl)^2} \right\}$$

ここで，表記を簡単にするため， $v_\infty = \frac{BLE - mgR_0}{(Bl)^2}$ ， $\tau = \frac{(M+m)R_0}{(Bl)^2}$ とおくと，

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau}(v - v_\infty) \quad \therefore \frac{d(v - v_\infty)}{dt} = -\frac{1}{\tau}(v - v_\infty)$$

初期条件 $v(0) = 0$ を満たす解は，

$$v(t) - v_\infty = -v_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \therefore v(t) = v_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

これを①'に代入して， $I_\infty = \frac{mg}{Bl}$ とおくと，

$$I(t) = \frac{E}{R_0}e^{-\frac{t}{\tau}} + I_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

次にエネルギーについては，①× I +②× v +③× v より，

$$R_0 I^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{M+m}{2} v^2 \right) = EI - mgv$$

おもりの上昇距離を y とおくと， $v = \dot{y}$ なので，

$$R_0 I^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{M+m}{2} v^2 + mgy \right) = EI$$

電池の仕事は，力学的エネルギー変化とジュール熱に分配されることがわかる． $t \rightarrow \infty$ では $v \rightarrow v_\infty$ ， $I \rightarrow I_\infty$ と収束するので，

$$R_0 I_\infty^2 + mgv_\infty = EI_\infty$$

(c) では，この式に含まれる各項を独立に計算することで，エネルギーの保存を確かめたことになっている。

【3】

《解答》

- (1) コイルが落下していくと、紙面裏から表の向きにコイルを貫く磁束が増加する。このときファラデーの法則により、磁束の増加を緩和する向きの誘導起電力を生じることで、時計回りの電流が流れる。
- (2) コイルの落下速度が増すと、それに比例して起電力が増し、電流も大きくなる。このときコイルが磁場から受ける力は上向きで増加し、最終的には、この力が重力とつり合うようになり、コイルの加速度が0となるから。
- (3) 辺 AB の x 座標が x のとき、磁場から受ける合力は

$$\begin{aligned} F_x &= IB(x)a - IB(x+b)a \\ &= -I\beta ba \end{aligned}$$

また、落下速度が一定なので、コイルの運動方程式の x 成分は、

$$m \cdot 0 = mg - I\beta ba \quad \therefore I = \frac{mg}{\beta ab}$$

- (4) コイルで発生するジュール熱に変換され、またコイルの抵抗は $R = r \cdot 2(a+b)$ なので、

$$P = RI^2 = 2r(a+b) \left(\frac{mg}{\beta ab} \right)^2$$

- (5) エネルギーの保存より、

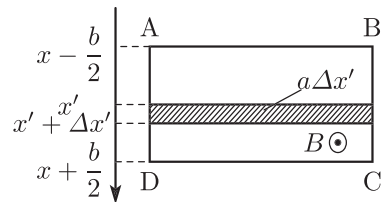
$$mgv = 2r(a+b) \left(\frac{mg}{\beta ab} \right)^2 \quad \therefore v = \frac{2mgr(a+b)}{(\beta ab)^2}$$

《解説》

コイルの重心の x 座標が x のときの落下速度を u 、電流の大きさを i とし、これらを時刻 t の関数として具体的に求めてみよう。

まず、裏から表の向きにコイルを貫く磁束 Φ は、

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{x-\frac{b}{2}}^{x+\frac{b}{2}} B(x')a dx' \\ &= a \int_{x-\frac{b}{2}}^{x+\frac{b}{2}} (B_0 + \beta x') dx' \\ &= B_0 ab + \beta abx \end{aligned}$$



反時計回りを正とした起電力は、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\beta abu$$

よって、起電力は時計回りの向きに大きさ βabu となる。また、コイルの抵抗は $R = r \cdot 2(a+b)$ であり、回路の方程式は、

$$Ri = \beta abu \quad \dots \textcircled{1}$$

さらに、コイルの運動方程式の x 成分は、

$$\begin{aligned} m \frac{du}{dt} &= mg + iB \left(x - \frac{b}{2} \right) \cdot a - iB \left(x + \frac{b}{2} \right) \cdot a \\ &= mg - \beta abi \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

表記を簡単にするため、 $k = \beta ab$ とおくと、

$$\begin{cases} Ri = ku & \dots \textcircled{1}' \\ m \frac{du}{dt} = mg - ki & \dots \textcircled{2}' \end{cases}$$

これらより、 u と i を t の関数として決定できる。①'、②' より、 i を消去すると、

$$m \frac{du}{dt} = mg - \frac{k^2}{R} u \quad \therefore \quad \frac{du}{dt} = -\frac{k^2}{mR} \left(u - \frac{mgR}{k^2} \right)$$

表記を簡単にするため、 $\tau = \frac{mR}{k^2}$ 、 $v = \frac{mgR}{k^2}$ とおくと、

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau} (u - v) \quad \therefore \quad \frac{d(u - v)}{dt} = -\frac{1}{\tau} (u - v)$$

初期条件 $u(0) = 0$ を満たす解は、

$$u(t) - v = -ve^{-\frac{t}{\tau}} \quad \therefore \quad u(t) = v(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

このとき ①' より、

$$i(t) = \frac{k}{R} u(t) = \frac{kv}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

また、エネルギー保存を表す式を導出するためには、①' $\times i$ + ②' $\times u$ をつくればよく、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} u^2 \right) + Ri^2 = mgu \quad \dots \textcircled{3}$$

重力の仕事は運動エネルギー変化とジュール熱に分配されることがわかる。 $t \rightarrow \infty$ では $u \rightarrow v$ 、 $i \rightarrow I$ と収束するので、

$$0 + RI^2 = mgv$$

すなわち、運動エネルギーは変化せず、重力の仕事がすべてジュール熱に転化する。

また、③で重力の仕事を左辺に移項して、位置エネルギー変化と読みかえることもでき、

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} u^2 + (-mgx) \right\} = -Ri^2$$

これは、系の力学的エネルギーの変化が負すなわち減少で、その減少分がジュール熱と一致することを表している。 $t \rightarrow \infty$ では、 $u \rightarrow v$ 、 $i \rightarrow I$ と収束するので、

$$-mgv = -RI^2 \quad \therefore \quad mgv = RI^2$$

すなわち、位置エネルギーの減少分がすべてジュール熱に転化する。

【4】

《解答》

- (1) $-z$ の向きに大きさ $H = \frac{I}{2\pi x}$
 (2) 磁束が減少するので、誘導電流の向きは正の向き。
 (3) $0 < t < T$ のとき、図 2 より、

$$I(t) = I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

電流 I がつくる磁界が I に比例しているのので、磁束 Φ も I に比例し、

$$\Phi(t) = \Phi_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

よって、この間の誘導起電力は、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi_0}{T}$$

回路の方程式より、K に流れる電流は

$$i = \frac{V}{R} = \frac{\Phi_0}{RT}$$

辺 AB, CD が受ける力はともに x 方向に作用し、これらの合力を F_x とすると、

$$\begin{aligned} F_x &= -i \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \cdot l + i \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)} \cdot l \\ &= -\frac{\mu_0 a l i I}{2\pi d(d+a)} \end{aligned}$$

また、辺 AD, BC が受ける力はともに y 方向に作用し、これらの合力は 0 となる。
 以上より、 $I(t)$ が K に及ぼす力は、 $-x$ の向きに大きさ

$$\frac{\mu_0 a l}{2\pi d(d+a)} \cdot \frac{\Phi_0}{RT} \cdot I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

- (4) $i \times T = \frac{\Phi_0}{R}$
 (5) $Ri^2 \times T = \frac{\Phi_0^2}{RT}$
 (6) $x = d$ での磁束密度を用いることにより、

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \cdot a l = \frac{\mu_0 a l}{2\pi d} I$$

- (7) (6) で $t = 0$ のとき、

$$\Phi(0) = \frac{\mu_0 a l}{2\pi d} I(0) \quad \therefore \Phi_0 = \frac{\mu_0 a l}{2\pi d} I_0$$

(8) 辺 CD の x 座標が x のとき, K を貫く磁束は,

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi d} \cdot l(x - d)$$

$\dot{x} = v$ であることをふまえると, A→D→C→B→A に生じる起電力は,

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 l v}{2\pi d}$$

これが (3) の途中で得た V と等しくなるとき,

$$\frac{1}{T} \times \frac{\mu_0 a l}{2\pi d} I_0 = -\frac{\mu_0 I_0 l v}{2\pi d} \quad \therefore \quad v = -\frac{a}{T}$$

添削課題

《解答》

- (a) レールの上端を原点とするレール方向下向き正の x 軸をとる。磁束密度のレール面に垂直な成分は $B_n = B \cos \theta$ なので、回路を貫く磁束は、

$$\begin{aligned}\Phi &= B_n \cdot Lx \\ &= B \cos \theta \cdot Lx\end{aligned}$$

上から見て反時計回りを正とする誘導起電力は、

$$\begin{aligned}V &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -BL \cos \theta \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= -BL \cos \theta \cdot u\end{aligned}$$

$V < 0$ なので、誘導起電力の向きは上から見て時計回りであり、大きさは $|V| = BLu \cos \theta$ となる。

- (b) $Q = C \cdot BLu \cos \theta$
(c) 電流は $Y \rightarrow X$ の向きに流れ、このとき磁場からの力は水平方向で作用する。この力のうち、レールと平行な x 軸方向の成分は、

$$F_x = -IBL \cos \theta \quad \therefore |F_x| = IBL \cos \theta$$

- (d) $ma = mg \sin \theta - IBL \cos \theta$
(e) (b) より、 $\Delta Q = CBL \cos \theta \cdot \Delta u$ と表せるので、

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = CBL \cos \theta \cdot \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad \therefore I = CBL \cos \theta \cdot a$$

- (f) (d), (e) より I を消去すると、

$$ma = mg \sin \theta - CBLa \cos \theta \cdot BL \cos \theta \quad \therefore a = \frac{mg \sin \theta}{m + C(BL \cos \theta)^2}$$

配点

100 点

- (a) 30 点, (b) 10 点, (c)~(f) 各 15 点

19章 電磁誘導 (2)

問題

■演習

【1】

《解答》

I 右図のように、直径部分の針金の磁界領域の上端からの回転角を、時計回りに θ とする。ループ ①、② を表から裏の向きに貫く磁束は、

$$\begin{cases} \Phi_1 = B \times \pi a^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} a^2 B \theta \\ \Phi_2 = B \times \pi a^2 \cdot \frac{\pi - \theta}{2\pi} = \frac{1}{2} \pi a^2 B - \frac{1}{2} a^2 B \theta \end{cases}$$

時計回りの向きを正とすると、各ループに誘導される起電力は、

$$\begin{cases} V_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{2} a^2 B \cdot \omega \\ V_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = +\frac{1}{2} a^2 B \cdot \omega \end{cases}$$

各ループについて、回路の方程式は、

$$\begin{cases} -RI = -\frac{1}{2} B\omega a^2 \\ +RI = +\frac{1}{2} B\omega a^2 \end{cases} \quad \therefore I = \frac{B\omega a^2}{2R}$$

II 直径部分の針金の中心から距離 r 、微小長さ Δr の部分に作用する磁界からの力は右図の向きで、大きさを f_r とすると、

$$f_r = IB\Delta r = \frac{B^2\omega a^2}{2R} \Delta r$$

III II の力 f_r のモーメントは、

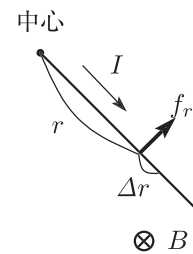
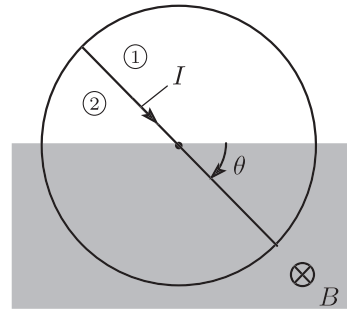
$$\Delta N = r \times f_r = \frac{B^2\omega a^2}{2R} r \Delta r$$

$r = 0$ から $r = a$ にわたって ΔN を合計すると、

$$N = \int_0^a \frac{B^2\omega a^2}{2R} r dr = \frac{B^2 a^4 \omega}{4R} \left(= \frac{1}{2} IBa^2 \right)$$

これとつりあう、外部からのトルクの大きさを M とすると、

$$0 = +N - M \quad \therefore M = \frac{B^2 a^4 \omega}{4R}$$



IV 回転を一定に保つために必要な、外部から与える単位時間あたりの仕事は、

$$P_1 = M\omega = \frac{B^2 a^4 \omega^2}{4R}$$

また、単位時間あたりに抵抗で消費されるエネルギーは、

$$P_2 = RI^2 = \frac{B^2 a^4 \omega^2}{4R} \dots P_1 \text{と等しい.}$$

【2】

《解答》

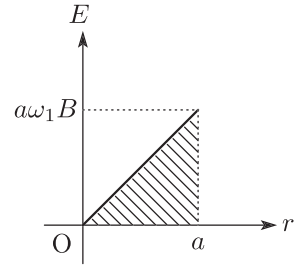
(イ) $er\omega_1 B$

(ロ) (イ) のローレンツ力を電場 $E(r)$ から受けた力におきかえると,

$$eE(r) = er\omega_1 B \quad \therefore \quad E(r) = r\omega_1 B$$

(ハ) 長さ Δr の微小部分の起電力 $E(r)\Delta r$ を, $r = 0$ から $r = a$ まで合計すると, 右図の三角形の面積となるので,

$$V = \int_0^a E(r)dr = \frac{1}{2}Ba^2\omega_1$$



(ニ) 回路の方程式は,

$$R_0 I = \frac{1}{2}Ba^2\omega_1 \quad \therefore \quad I = \frac{a^2\omega_1 B}{2R_0}$$

(ホ) $R_0 I^2 = \frac{(a^2\omega_1 B)^2}{4R_0}$

(ヘ) 誘導起電力の向きが電源の起電力の向きと反対であることに注意すると, 回路の方程式は,

$$R_0 I = V_0 - \frac{1}{2}Ba^2\omega_2 \quad \therefore \quad I = \frac{2V_0 - Ba^2\omega_2}{2R_0}$$

(ト) 定常状態に達したとき, 磁場から受ける力が0になり, このとき電流も0となるので,

$$2V_0 - Ba^2\omega_f = 0 \quad \therefore \quad \omega_f = \frac{2V_0}{a^2 B}$$

(あ) Q から O の向き

(い) 誘導起電力の大きさ

(う) 反時計

【3】**《解答》**

(1) 運動方程式の向心成分は,

$$m \frac{v^2}{R} = evB \quad \therefore v = \frac{eBR}{m}$$

このとき, 運動量の大きさは,

$$P = mv = eBR$$

(2) (a) 磁束の変化により円周上に誘導電場が生じるから.

(b) 円軌道の内部を貫く磁束は,

$$\Phi = \overline{B} \times \pi R^2$$

ファラデーの法則より, 電子の運動方向を正とする起電力は,

$$V = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\pi R^2 \frac{\Delta\overline{B}}{\Delta t}$$

$V < 0$ なので, 電子の運動と逆向きに電場が生じていて, 電場の大きさは,

$$E = \frac{|V|}{2\pi R} = \frac{R}{2} \cdot \frac{\Delta\overline{B}}{\Delta t}$$

よって, 電子が受ける力の大きさは,

$$F = |(-e) \cdot E| = \frac{eR\Delta\overline{B}}{2\Delta t}$$

なお, F の向きは E の向きと反対なので, 電子の運動と同じ向き.

(3) 運動量変化と力積の関係より,

$$\Delta P = F\Delta t = \frac{eR}{2} \Delta\overline{B}$$

(4) (1) より, B の変化が ΔB のとき $\Delta P = eR\Delta B$ と表すことができ, これが (3) と一致するためには,

$$eR\Delta B = \frac{eR}{2} \Delta\overline{B} \quad \therefore \Delta B = \frac{1}{2} \Delta\overline{B}$$

(5) (3) の式を用いて,

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{1}{m} \times \frac{eR}{2} \Delta\overline{B} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 0.40 \text{ m} \times 1.0 \times 10^{-3} \text{ T}}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}} \\ &= 3.5 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

【4】

《解答》

- (1) OP 上で O からの距離 r [m] の位置にある電子 (電気量 $-e$ [C]) には P→O の向きに $e \cdot r\omega_0 \cdot B$ [N] の力が働く。これを, O→P の向きの電場 (大きさを E [V/m] とする) から受ける力におきかえると,

$$eE = er\omega_0 B \quad \therefore E = B\omega_0 r \text{ [V/m]}$$

この電場による O から P までの電位差は,

$$V_0 = \int_0^a E dr = \frac{1}{2} B\omega_0 a^2 \text{ [V]}$$

- (2) O→P 向きの電流を I [A] とすると, 回路の方程式は,

$$RI = \frac{1}{2} B\omega_0 a^2 \quad \therefore I = \frac{B\omega_0 a^2}{2R} \text{ [A]}$$

よって, 単位時間あたりのジュール熱は,

$$RI^2 = \frac{(B\omega_0 a^2)^2}{4R} \text{ [W]}$$

- (3) おもりのもっていた運動エネルギーがすべてジュール熱となるので, 全ジュール熱 Q [J] は,

$$Q = \frac{m}{2} (a\omega_0)^2 \text{ [J]}$$

- (4) 一定の角速度 ω_0 [rad/s] で回転する状態で, コンデンサーの電位差は V_0 [V] なので, 電荷 q_0 [C] は,

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_0} V_0 = \frac{\varepsilon_0 A B \omega_0 a^2}{2d_0} \text{ [C]}$$

このときの静電エネルギーを U_0 [J], おもりの運動エネルギーを K_0 [J] とすると,

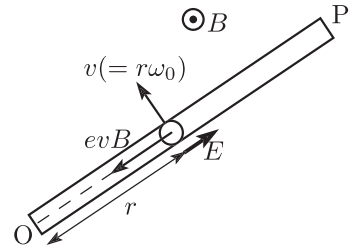
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} q_0 V_0 = \frac{\varepsilon_0 A (B\omega_0 a^2)^2}{8d_0} \text{ [J]} \\ K_0 = \frac{m}{2} (a\omega_0)^2 \text{ [J]} \end{cases}$$

- (5) 角速度 ω [rad/s] のとき, コンデンサーの極板間隔を d [m] として, 静電エネルギーとおもりの運動エネルギーの和 G [J] は,

$$\begin{aligned} G &= K + U \\ &= \frac{m}{2} (a\omega)^2 + \frac{\varepsilon_0 A (B\omega a^2)^2}{8d} \text{ [J]} \end{aligned}$$

G [J] の変化が求める仕事 (W [J] とする) と一致するので, 角速度 ω_i [rad/s] ($i = 0, 1$) のときの G [J] の値を G_i [J] とすると,

$$\begin{aligned} W &= G_1 - G_0 \\ &= \frac{ma^2}{2} (\omega_1^2 - \omega_0^2) + \frac{\varepsilon_0 A (Ba^2)^2}{8} \left(\frac{\omega_1^2}{d_1} - \frac{\omega_0^2}{d_0} \right) \text{ [J]} \end{aligned}$$



添削課題

《解答》

- I (1) Q→P の向きに大きさ Blv [V]
 (2) Q→P の向きに大きさ Blv [V]
 (3) 回路の方程式より, a→b の向きに $I_1 = \frac{Blv}{R_1}$ [A]
 (4) 回路の方程式より, c→d の向きに $I_2 = \frac{Blv}{R_2}$ [A]
 (5) Q→P の向きに $I_1 + I_2 = Blv \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ [A]

- II (1) 微小時間 Δt [s] の間に PQ が $\Delta\theta$ [rad] だけ回転するとき, 右図のループを表から裏の向きに貫く磁束の変化は,

$$\Delta\Phi = B \times \pi r^2 \cdot \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} Br^2 \Delta\theta [\text{Wb}]$$

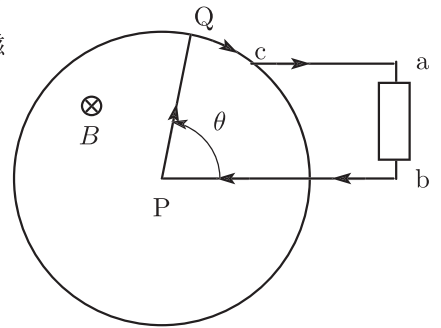
P→Q の向きを正とする起電力は,

$$V = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{1}{2} Br^2 \omega [\text{V}]$$

よって, Q→P の向きに大きさ $|V| = \frac{1}{2} Br^2 \omega$ [V]

- (2) 起電力の向きより, 電流の向きは b→a となる. 電流の大きさを I [A] とすると, 回路の方程式は,

$$RI = \frac{1}{2} Br^2 \omega \quad \therefore I = \frac{Br^2 \omega}{2R} [\text{A}]$$



配点

100 点

I (1)→20 点, (2)~(5)→各 12 点

II (1)→20 点, (2)→12 点

20章 自己誘導と相互誘導

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) ソレノイド・コイル内部に生じる磁場なので、磁場の強さと磁束密度は、

$$\begin{cases} H = n_1 I \\ B = \mu_0 H = \mu_0 n_1 I \end{cases}$$

よって、コイル1巻きを貫く磁束は、

$$\phi = BS = \mu_0 n_1 S I$$

(2) a から b に流す向きを正とすると、コイル1巻きに発生する起電力は、

$$v = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\mu_0 n_1 S \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

コイルの巻き数は $n_1 l_1$ なので、ソレノイド A に発生する起電力は、

$$V_A = v \times n_1 l_1 = -\mu_0 n_1^2 l_1 S \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

(3) $L_A = \mu_0 n_1^2 l_1 S$

(4) c から d に流す向きを正とすると、コイル1巻きに発生する起電力はソレノイド A のときと同じ v となる。また、コイルの巻き数は $n_2 l_2$ なので、ソレノイド B に発生する起電力は、

$$V_B = v \times n_2 l_2 = -\mu_0 n_1 n_2 l_2 S \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

(5) $M = \mu_0 n_1 n_2 l_2 S$

【2】**《解答》**

(1) (ア) 自己誘導

(イ) $-L \frac{\Delta i}{\Delta t}$

(ウ) 0

(エ) $t < t_1$ での回路の方程式は,

$$(R_1 + R_2)i_1 = E \quad \therefore i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

 $t = t_1$ の直後でコイルに生じる起電力を e_1 とすると, $t = t_1$ の直後における回路の方程式は,

$$R_2 i_1 = E + e_1 \quad \therefore e_1 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

(オ) $t = t_2$ の直前における回路の方程式は,

$$R_2 i_2 = E \quad \therefore i_2 = \frac{E}{R_2}$$

よって, $t = t_1$ の直後におけるコイルの起電力は,

$$-L \frac{i_2 - i_1}{\Delta t_1} = -\frac{LR_1 E}{(R_1 + R_2)R_2 \Delta t_1}$$

これと (エ) より,

$$\begin{aligned} -\frac{LR_1 E}{(R_1 + R_2)R_2 \Delta t_1} &= -\frac{R_1 E}{R_1 + R_2} \\ \therefore L &= R_2 \Delta t_1 = 4.0 \times 10^{-3} \text{ H} \end{aligned}$$

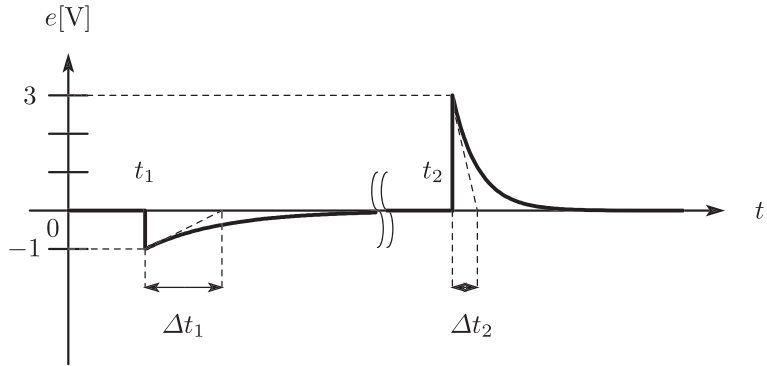
(2) $t = t_2$ の直後でコイルに生じる起電力を e_2 とすると, $t = t_2$ の直後における回路の方程式は,

$$(R_1 + R_2)i_2 = E + e_2 \quad \therefore e_2 = \frac{R_1}{R_2} E$$

(1) で与えられた E , R_1 , R_2 の値を用いると,

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} E = -1.0 \text{ V} \\ e_2 = \frac{R_1}{R_2} E = 3.0 \text{ V} \end{cases}$$

また, e の大きさが3倍のとき, $\frac{\Delta i}{\Delta t}$ の大きさも3倍なので, 図で $\Delta t_2 = \frac{1}{3} \Delta t_1$ となる.



(3) 同じ電流のときにコイルを貫く磁束が大きくなるため、 L が大きくなり、 Δt_1 は長くなる。

《解説》

Δt_1 と Δt_2 の関係を、回路の方程式にもとづいて求めてみよう。

$t_1 < t < t_2$ での回路の方程式は、

$$R_2 i = E - L \frac{di}{dt} \quad \therefore \quad \frac{di}{dt} = -\frac{R_2}{L} \left(i - \frac{E}{R_2} \right)$$

$t > t_2$ での回路の方程式は、

$$(R_1 + R_2) i = E - L \frac{di}{dt} \quad \therefore \quad \frac{di}{dt} = -\frac{R_1 + R_2}{L} \left(i - \frac{E}{R_1 + R_2} \right)$$

本問では、それぞれの変化の時定数が、 Δt_1 、 Δt_2 なので、

$$\begin{cases} t_1 < t < t_2 \text{ のとき} \cdots \Delta t_1 = \frac{L}{R_2} \\ t > t_2 \text{ のとき} \cdots \Delta t_2 = \frac{L}{R_1 + R_2} \end{cases} \quad \therefore \quad \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$R_1 = 4.0 \Omega$ 、 $R_2 = 2.0 \Omega$ なので、

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{2.0}{4.0 + 2.0} \quad \therefore \quad \Delta t_2 = \frac{1}{3} \Delta t_1$$

【3】

《解答》

- I (1) 回路の微小な抵抗を R とおく。上側極板の電荷が q で、 q に流入する電流が i のとき、回路の方程式と電流の定義より、

$$\begin{cases} Ri + \frac{q}{C} = V_0 \\ i = \frac{dq}{dt} \end{cases}$$

これらより、 i を消去すると、

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \quad \therefore \quad \frac{d(q - CV_0)}{dt} = -\frac{1}{RC}(q - CV_0)$$

$q(0) = 0$ を満たす解は、

$$q(t) - CV_0 = -CV_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \therefore \quad q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

RC と比べて十分長い時間が経つと、 R によらずに $q_\infty = CV_0$ となる。

- (2) コンデンサーの下側極板の電荷を Q 、時計回りを正とする電流を I をおく。回路の方程式と電流の定義より、

$$\begin{cases} \frac{Q}{C} = -L \frac{dI}{dt} \\ I = \frac{dQ}{dt} \end{cases}$$

これらより、 I を消去すると、

$$\frac{Q}{C} = -L\ddot{Q} \quad \therefore \quad \ddot{Q} = -\frac{1}{LC}Q$$

Q (及び I) の変動は単振動で、その角振動数を ω とすると、

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \therefore \quad (\text{周期}) = 2\pi\sqrt{LC}$$

初期条件 $Q(0) = -CV_0$ 、 $\dot{Q}(0) = 0$ を満たす解は、

$$Q(t) = -CV_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

このときの電流は、

$$I(t) = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

また、図の上側を基準として、下側の電位を求めると

$$\begin{cases} \text{コンデンサー} \dots V_C(t) = +\frac{Q}{C} = -V_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\ \text{コイル} \dots V_L(t) = -L \frac{dI}{dt} = -V_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{cases}$$

- II (1) $\frac{Q_0^2}{2C}$
(2) $\frac{1}{2}LI_0^2$
(3) 電気量 Q
(4) 電気容量の逆数 $\frac{1}{C}$
(5) コンデンサーの電圧 $\frac{Q}{C}$
(6) 自己インダクタンス L
(7) 電流 I
(8) 静電エネルギー $\frac{Q^2}{2C}$
(9) 磁気エネルギー $\frac{1}{2}LI^2$

【4】

《解答》

(1) (イ) $-N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (ロ) $\mu_0 HS$ (ハ) $\frac{\mu_0 N^2 S}{l}$ (ニ) $\frac{1}{2} LI^2$ (ホ) $\frac{1}{2} \mu_0 H^2$

(2) (a) 回路 Y : $H_A = \frac{2NE}{lR}$, $H_{AB} = \frac{NE}{lR}$

回路 Z : $H_A = 0$, $H_{AB} = \frac{NE}{lR}$

(b) X : $-\frac{(\alpha+1)\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$, Y : $-\frac{(\alpha+3)\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$, Z : $-\frac{(\alpha-1)\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$

(c) グラフ : (キ), a : Z, b : X, c : Y

(d) 解説参照

《解説》

(2)(a) 定常状態にあるとき,

$$Ri = E + 0 \quad \therefore i = \frac{E}{R}$$

$$\therefore H = ni = \frac{NE}{lR}$$

回路 Y において, A 内の磁場の向きは一致ゆえ,

$$H_A = H + H = 2H = \frac{2NE}{lR}$$

回路 Z において, A 内の磁場の向きは逆ゆえ,

$$H_A = H - H = 0$$

両回路とも, A と B に挟まれた部分は B による磁場のみだから,

$$H_{AB} = H = \frac{NE}{lR}$$

まとめると下表のようになる.

回路	H_A	H_{AB}
Y	$\frac{2NE}{lR}$	$\frac{NE}{lR}$
Z	0	$\frac{NE}{lR}$

(b)

$$V_A = -N \frac{\Delta\Phi_A}{\Delta t}, \quad V_B = -N \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

PQ 間起電力は,

$$V = V_A + V_B$$

回路 X : A と B は十分離れているから、それぞれのソレノイドが単独に存在した場合の誘導起電力に等しい。

$$\begin{aligned}\Phi_A &= \mu_0 H S = \frac{\mu_0 N S}{l} i \\ \Phi_B &= \mu_0 \cdot \alpha H S = \frac{\alpha \mu_0 N S}{l} i\end{aligned}$$

回路 Y : $H_A = 2H$, $H_{AB} = H$ より,

$$\begin{aligned}\Phi_A &= \mu_0 H_A S = \frac{2\mu_0 N S}{l} i \\ \Phi_B &= \mu_0 H_A S + \mu_0 H_{AB}(\alpha - 1)S = \frac{(\alpha + 1)\mu_0 N S}{l} i\end{aligned}$$

回路 Z : $H_A = 0$ より,

$$\begin{aligned}\Phi_A &= 0 \\ \Phi_B &= \mu_0 H_A S + \mu_0 H_{AB}(\alpha - 1)S = \frac{(\alpha - 1)\mu_0 N S}{l} i\end{aligned}$$

以上より起電力は下表のようになる。

回路	V
X	$-\frac{(\alpha + 1)\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$
Y	$-\frac{(\alpha + 3)\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$
Z	$-\frac{(\alpha - 1)\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$

(c) 各回路の合成コイルの自己インダクタンスを L として,

$$Ri = E - L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad \therefore \quad i = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau/R})$$

各グラフは終端値 $\frac{E}{R}$ におちつき、異なるのは時定数のみである。ここで、 $L_Y > L_X > L_Z$ より時定数の小さい順に a, b, c \rightarrow Z, X, Y となる。

(d)

$$\begin{aligned}U_Y &= \frac{1}{2} L_Y i^2, \quad U_Z = \frac{1}{2} L_Z i^2 \\ L_Y &= \frac{(\alpha + 3)\mu_0 N^2 S}{l}, \quad L_Z = \frac{(\alpha - 1)\mu_0 N^2 S}{l} \\ \therefore \quad \frac{U_Y}{U_Z} &= \frac{\alpha + 3}{\alpha - 1}\end{aligned}$$

添削課題

《解答》

- (1) 巻き数密度 $n = \frac{N}{l}$ [1/m] のソレノイド・コイル内部の磁界なので、

$$H = nI = \frac{N}{l}I$$

- (2) 磁束密度 B [Wb/m²] は $B = \mu_0 H$ と表せるので、コイル 1 巻きを貫く磁束は、

$$\phi = BS = \frac{\mu_0 NIS}{l}$$

- (3) 時間 Δt [s] の間に電流が ΔI [A] だけ変化するとき、コイル 1 巻きあたりに発生する起電力は、 I を流す向きを正として、

$$v = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 NS}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

コイル全体に発生する起電力 V [V] は、

$$V = Nv = -\frac{\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad \therefore L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

- (4) 電流 i [A] のとき、コイルの保有するエネルギーは $\frac{1}{2}Li^2$ [J] なので、

$$\frac{1}{2}L(3I)^2 - \frac{1}{2}LI^2 = 4I^2 \times L$$

- (5) C_1 に生じる起電力を、自己誘導起電力と相互誘導起電力に分けると、

$$\begin{cases} \text{自己誘導起電力} \cdots \text{右に流す向きを正として、} -L_1 \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{ [V]} \\ \text{相互誘導起電力} \cdots \text{左に流す向きを正として、} -M \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{ [V]} \end{cases}$$

右に流す向きを正として合計すると、 C_1 に生じる起電力は、

$$V_1 = \left(-L_1 \frac{\Delta I}{\Delta t}\right) - \left(-M \frac{\Delta I}{\Delta t}\right) = (M - L_1) \times \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

- (6) C_2 に生じる起電力を、(5) と同様に分けると、

$$\begin{cases} \text{自己誘導起電力} \cdots \text{左に流す向きを正として、} -L_2 \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{ [V]} \\ \text{相互誘導起電力} \cdots \text{右に流す向きを正として、} -M \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{ [V]} \end{cases}$$

左に流す向きを正として合計すると、 C_2 に生じる起電力は、

$$V_2 = \left(-L_2 \frac{\Delta I}{\Delta t}\right) - \left(-M \frac{\Delta I}{\Delta t}\right) = (M - L_2) \times \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

(7) C_1 , C_2 に電流 I を流す向きを正とすると, 合計の起電力は,

$$V_1 + V_2 = -(L_1 + L_2 - 2M) \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

\therefore 全体の自己インダクタンスは $L_1 + L_2 - 2M$

配点

100 点

(1)~(4)→ 各 10 点, (5)~(7)→ 各 20 点



会員番号	
------	--

氏名	
----	--