【体験授業用教材】 M2JD

本科２期９月度１回目

Ｚ会東大進学教室【体験授業用教材（抜粋版）】

高２東大理系数学Ⅲ

M2JD Term 2 Contents

Introduction

本講座では，数学 III の極限，微分法，積分法，2 次曲線を基礎から学びます．（極限，微分法は本科 1 期で扱いました．複素数平面は冬期講習で扱います．）基本的な[*1]内容，用語の理解，微分，積分の計算力をつけることを目標としています．

予習

- 本講座は，原則として予習は不要です．復習をしっかり行いましょう．
- やむを得ず欠席した場合は，要点などを自分で読み，担当の先生に相談すること．
- 演習問題は授業で扱います．特に指示がなければ予習はしないこと．

授業

- 演習用と，板書用の 2 種類のノートを用意するとよいと思います（強制はしません）．
- 数学 III は，他の単元と比べて前後の相関が強いです．1 回分の内容を理解していないと，次の内容に進めません．原則として，遅刻，欠席はしないようにしましょう．

復習

- 授業で学んだことを確認し，定着させましょう．
- 授業で学んだことの復習は，その週のうちに終わらせましょう．
- 毎週の添削課題を必ず提出してください．[*2]
- 授業に出席すれば数学が身につくわけではありません．自分の手で証明をし，自分の手で計算をすること．[*3]

[*1] 「簡単」という意味ではありません．基本とは，応用のための基礎，土台です．

[*2] 学習のペースメーカーとして，また次回の授業までに身につけなければならないことの復習として実施するものです．提出の遅れは原則として認めません．

[*3] 理系は，「極限，微積分の計算が淀みなくできること」が必要条件です（十分性はない）．復習するときは，当面の目標として重要な計算例全てをスムーズに計算しきること，を目指すとよいでしょう．

表記法について

- 実数の区間.
  - † 開区間 $a < x < b$ を $(a,\ b)$ と表す.
  - † 閉区間 $a \leqq x \leqq b$ を $[a,\ b]$ と表す.
  - † 半開区間 $a \leqq x < b$，$a < c \leqq b$ をそれぞれ $[a,\ b)$，$(a,\ b]$ と表す.

- 集合の記号.
  - † 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表す.
  - † 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と表す.
  - † 正整数全体の集合を $\mathbb{N}$，または $\mathbb{Z}^+$ と表す.

- このテキストでの約束.
  - **例** ごく基本的な計算例です．講義を欠席するなどして自習する際には，読み飛ばさず，しっかりと手で書きながら確認しましょう.
  - **例題** その講の内容を理解するための，具体的な問題．多少難しいものも含まれますが，内容理解のため必要な問題です.
  - **演習問題** その講で絶対に身につけなければいけない，基本的な問題例です.
  - **添削課題** その講の内容を定着させるための課題です．次週までに所定の用紙に解答を作成，提出しましょう.

Lecture 1　2次曲線(1)　放物線，楕円

1.1　放物線

1.1.1　標準形

ある条件を満たしながら動く点の描く図形を，軌跡と呼ぶ．ここでは，特定の条件についての軌跡がどのような図形を描くか考える．

定義

平面上の定直線 L と，L 上にない定点 A からの距離が等しい点の集合を，放物線という．

放物線の方程式 (1)

焦点を $(p,\,0)$，準線を $x=-p$ とする放物線の方程式は

$$y^2 = 4px$$

放物線の方程式 (2)

焦点を $(0,\,p)$，準線を $y=-p$ とする放物線の方程式は

$$x^2 = 4py$$

例 1.1

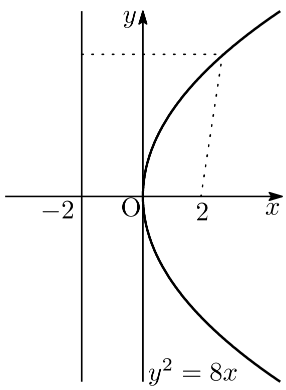
$$y^2 = 8x$$

で表される放物線は

$$y^2 = 4\cdot 2x$$

より，焦点が F$(2,\,0)$，準線の方程式が $x=-2$ である．

図示すると，右図の通り．



1.2 楕円

1.2.1 標準形

定義

平面上の異なる 2 点 F, F′ からの距離の和が一定である点の軌跡を，**楕円**という．

楕円の方程式 (1)

$a > b > 0$ とする．

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は，焦点が 2 点 $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$（これらを F, F′ とする）である楕円の方程式であり，楕円上の任意の点 P について

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF'} = 2a$$

が成り立つ．

楕円の方程式 (2)

$b > a > 0$ とする．

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は，焦点が 2 点 $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$（これらを F, F′ とする）である楕円の方程式であり，楕円上の任意の点 P について

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF'} = 2b$$

が成り立つ．

例 1.2

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で表される楕円は

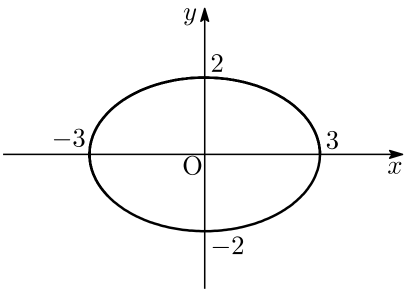
$$a = 3,\ b = 2$$

より，焦点の座標を $(\pm c, 0)$ とすると

$$c^2 = a^2 - b^2 = 5$$

より，焦点は $(\pm\sqrt{5}, 0)$ である．

図示すると，右図の通り．



1.2.2 接線

楕円の接線

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\,b>0)$ 上の点 $(x_0,\,y_0)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

陰関数の微分，また，円との相似拡大，縮小の関係から導かれる．

例 1.3

楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\,\dfrac{4}{3}\right)$ における接線の方程式は

$$\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\cdot\frac{y}{2}=1 \qquad \therefore\quad x+2y=3$$

例 1.4

楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $\left(-2\sqrt{2},\,0\right)$ における接線の方程式は

$$\frac{-2\sqrt{2}x}{8}x+\frac{0\cdot y}{4}=1 \qquad \therefore\quad x=-2\sqrt{2}$$

1.2.3 パラメータ表示

楕円のパラメータ表示

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\,b>0)$ のパラメータ表示は

$$(x,\,y)=(a\cos\theta,\,b\sin\theta)$$

例 1.5

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ のパラメータ表示は

$$x=3\cos\theta,\,y=\sqrt{5}\sin\theta$$

1.3 曲線の平行移動

2 次曲線の平行移動

曲線 $f(x,\,y)=0$ を x 軸方向に $+a$，y 軸方向に $+b$ 平行移動した曲線の方程式は

$$f(x-a,\,y-b)=0$$

例 **1.6**

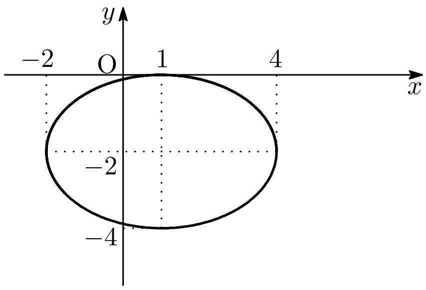
楕円 C : $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$ は,

楕円 C' : $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 平行移動した曲線である.

C' の焦点の座標は $(\pm\sqrt{5},\,0)$ なので，C の焦点の座標は

$$(\pm\sqrt{5}+1,\,-2)$$

右図の通り.



1.4 演習問題

演習問題 1 − 1

$\boxed{1}$ 次の放物線の焦点の座標，準線の方程式を求め，曲線の概形を図示せよ．

(1) $y^2 = 12x$　(2) $x = -\dfrac{1}{2}y^2$　(3) $y = \dfrac{1}{4}x^2$

$\boxed{2}$ 次の放物線の焦点の座標，準線の方程式を求め，曲線の概形を図示せよ．

(1) $x = -6(y-3)^2 + 1$　(2) $y^2 - 4x - 2y + 13 = 0$

$\boxed{3}$ 焦点，準線，頂点が次のよう与えられる放物線の方程式を求めよ．

(1) 焦点 $(5,\ 0)$，準線 $x = -5$　(2) 焦点 $\left(0,\ -\dfrac{1}{3}\right)$，準線 $y = \dfrac{1}{3}$

(3) 焦点 $(3,\ 1)$，頂点 $(3,\ 0)$　(4) 焦点 $(-3,\ 2)$，準線 $x = 1$

演習問題 1 − 2

1　次の楕円の焦点の座標を求めよ．また，曲線の概形を図示せよ．

(1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$　(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$　(3) $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{2}=1$

(4) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{8}=1$　(5) $4x^2+9y^2=36$

2　次の楕円の焦点の座標を求めよ．また，曲線の概形を図示せよ．

(1) $\dfrac{(x-1)^2}{12}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$　(2) $\dfrac{(x+1)^2}{3}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

演習問題 $1-3$

次の条件を満たす楕円の方程式を求め，図示せよ．

(1) 焦点が $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，焦点からの距離の和が 8

(2) 焦点が $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$，焦点からの距離の和が 14

(3) 焦点が $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ であり，点 $\left(-4,\ \dfrac{12}{5}\right)$ を通る

演習問題 1 − 4

次の問いにそれぞれ答えよ．

(A) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ における接線の方程式を求めよ．

(B) 楕円 $E:\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ について，点 $(1,\ 3)$ から E に引いた 2 本の接線の方程式を求めよ．

演習問題 1 − 5

放物線 $y = x^2$ の焦点を $\mathrm{F}(0,\ p)$，放物線上の点を P，線分 PF と円 $x^2 + y^2 - 2py = 0$ との交点の座標を A，P から x 軸に下ろした垂線の足を H とする．

(1) p の値を求めよ．

(2) $\triangle$PAH が正三角形であるとき，その面積を求めよ．ただし，P は第 1 象限にあるものとする．

演習問題 1 − 6

点 $(2,\ 0)$ と楕円 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ の周上の点 P を結ぶ直線が再びこの楕円と交わる点を Q とする．P がこの楕円の周上を動くとき，線分 PQ の中点の軌跡を求め，図示せよ．

演習問題 1 − 7

放物線 $y = x^2$ $\cdots$ ① の焦点を F，① 上の点 P を通る ① の接線を ℓ，ℓ と y 軸との交点を T，点 P から出て準線に垂直な直線と x 軸との交点を Q とする．

(1) 焦点 F の座標，準線の方程式，ℓ の方程式を求めよ．ただし，点 P の x 座標は a である．

(2) $\triangle$PFT はどのような三角形か答えよ．

(3) $\angle$FPT と $\angle$QPT はどのような関係にあるか答えよ．

1.5 添削課題

添削課題 1 − 1

$\boxed{1}$ 次の放物線の焦点の座標，準線の方程式を求め，曲線の概形を図示せよ．

(1) $y^2 = 6x$　(2) $-2y^2 = x$　(3) $8x^2 = y$

$\boxed{2}$ 焦点，準線が次のよう与えられる放物線の方程式を求めよ．

(1) 焦点 $(2,\ 0)$，準線 $x = -2$　(2) 焦点 $(0,\ -1)$，準線 $y = 1$

(3) 焦点 $(5,\ 0)$，準線 $x = 1$　(4) 焦点 $(-4,\ 3)$，準線 $x = 0$

添削課題 1 − 2

$\boxed{1}$ 次の楕円の焦点の座標を求め，曲線の概形を図示せよ．

(1) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$　(2) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$　(3) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

(4) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{5} = 1$　(5) $x^2 + 4y^2 = 4$

$\boxed{2}$ 次の条件を満たす楕円の方程式を求めよ．

(1) 焦点が $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$，焦点からの距離の和が 10

(2) 焦点が $(0,\ 7)$, $(0,\ -7)$，焦点からの距離の和が 18