【体験授業用教材】 M2JK

本科２期９月度１回目

Ｚ会東大進学教室【体験授業用教材（抜粋版）】

高２東大数学Ｋ

Contents

Lecture 0　Introduction

0.1　この講座について

2 学期 M2JK は数学 IAIIB 総合演習をテーマ別に扱い，冬期 M2J，そして受験生本科 0 期に継続します．

テキストの演習問題は，基礎知識を確認し，効率よく応用につなげるためのものです．問題のレベルはやや高いですが，授業での解説や配布解答を参考に，すべてマスターしてください．

0.2　授業について

0.2.1　予習

- **2 学期はすべての問題を予習してきてください．**
- まず問題を解いてみて，解けない場合は自分の持っている教科書や参考書などで調べ，類題の解法を真似てみてください．それでも解けない場合は「なぜ解けないのか」を考えてみるといいでしょう．
- 解けたときには別解を考えてみてください．
- ただ漫然と問題を解くのではなく，問題点を明確にすること，授業で何を聞くべきかをはっきりさせることが予習です．

0.2.2　授業

- 授業ではテキストをめいっぱい使います．配布解答やテキストに書き込んでもらうことが多いので，忘れないようにしてください．
- 「なぜそう解くのか」ということを意識して話を聞いてください．

0.2.3　復習

- 自分が何を学んだか，を確認して定着させるのが復習です．
- 授業は超スピードで進むので，復習をサボると大変なことになります．その日の復習はその日のうちに，が基本です．
- 定期テストの勉強をするために授業を休む人がいますが，本末転倒です．今のうちに学校の勉強と塾での受験勉強を両立する訓練をしないと，受験生になってから困ります．
- 受けっぱなしで数学が身につくことは，100 %絶対にあり得ません．自分の頭で理解し，自分の手で問題を解くしかありません．頑張りましょう．

Lecture 14　整数 (1)

例題 14 − 1

$\boxed{1}$　次の問いに答えよ．

(1)　216 の正の約数の総和を求めよ．

(2)　216 の正の約数をすべて掛け合わせたものを N とするとき，$\log_6 N$ を求めよ．

$\boxed{2}$　$n^2 - 20n + 91$ の値が素数となるとき，整数 n の値をすべて求めよ．

解答

$\boxed{1}$

(1)　216 を素因数分解すると

$$216 = 2^3 \cdot 3^3$$

であるから，216 の正の約数は

$$2^p \cdot 3^q \quad (p,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \quad \cdots (*)$$

と表される．ここで

$$\left(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3\right) \cdot \left(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3\right)$$

を展開すれば，$(*)$ で得られる約数が 1 回ずつすべて現れるから，求める総和を M とすると，

$$\begin{aligned} M &= \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3\right) \cdot \left(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3\right) \\ &= (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9 + 27) \\ &= 600. \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2)　216 の正の約数は $4 \cdot 4 = 16$ 個あり，それらを小さい順に

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{16}$$

とおく．このとき

$$a_1 \cdot a_{16} = 216, \quad a_2 \cdot a_{15} = 216, \quad \cdots, \quad a_{16} \cdot a_1 = 216$$

であるから，これら 16 個の組をすべて掛け合わせると

$$(a_1 \cdot a_{16}) \times (a_2 \cdot a_{15}) \times \cdots \times (a_{16} \cdot a_1) = N^2 = 216^{16}.$$

ゆえに $N = 216^8$ であるから，

$$\log_6 N = \log_6 (6^3)^8 = 24. \qquad \textbf{(答)}$$

$\boxed{2}$ 与式を N とおく．N を因数分解すると

$$N = n^2 - 20n + 91 = (n-13)(n-7)$$

である．これが素数 p となるとき，

$$\begin{pmatrix} n-13 \\ n-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -p \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ -p \end{pmatrix}$$

である．

(I) $(n-13,\ n-7) = (p,\ 1)$ のとき．
$n-7=1$ より $n=8$ であり，このとき $p=-5$ となり不適．

(II) $(n-13,\ n-7) = (1,\ p)$ のとき．
$n-13=1$ より $n=14$ であり，このとき $p=7$ となり適する．

(III) $(n-13,\ n-7) = (-p,\ -1)$ のとき．
$n-7=-1$ より $n=6$．このとき $p=7$ となり適する．

(IV) $(n-13,\ n-7) = (-1,\ -p)$ のとき．
$n-13=-1$ より $n=12$．このとき $p=-5$ となり不適．

以上より，求める n の値は

$n=6$ または 14.　　**(答)**

例題 14 − 2

1　等式

$$xy - 2x - y = 1$$

をみたす正整数 x，y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

2　等式

$$x^2 - y^2 = 24$$

をみたす正整数 x，y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

解答

1　与式を変形すると

$$\begin{gathered} xy - 2x - y = 1 \\ x(y-2) - (y-2) - 2 = 1 \\ \therefore \quad (x-1)(y-2) = 3. \end{gathered}$$

ここで x，y は正整数であるから $x - 1 \geqq 0$ かつ $y - 2 \geqq -1$．ゆえに

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad (x,\ y) = (2,\ 5)\,,\ (4,\ 3)\,.$$

よって求める正整数の組 $(x,\ y)$ は

$$(x,\ y) = (2,\ 5),\ (4,\ 3). \qquad \textbf{(答)}$$

2　$x^2 - y^2 > 0$ であるから $x - y > 0$ である．与式を因数分解すると

$$(x+y)(x-y) = 24$$

であり，$x + y$ と $x - y$ は偶奇が一致し，x，y はともに正整数であることから $x + y > x - y$ に注意して，

$$(x+y,\ x-y) = (12,\ 2)\,,\ (6,\ 4)\,.$$

これらを解いて，求める正整数の組 $(x,\ y)$ は

$$(x,\ y) = (7,\ 5),\ (5,\ 1). \qquad \textbf{(答)}$$

例題 14 − 3

次の問いに答えよ.

(1) n を正整数とするとき，n^2 を 4 で割った余りを求めよ.

(2) a，b，c を正整数とするとき，

$$a^2+b^2=c^2$$

ならば，a，b の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ.

解答

(1) n の偶奇で場合を分ける．以下，k を非負整数とする.

(i) $n=2k$ のとき

$$n^2=(2k)^2=4k^2.$$

であるから，このとき n^2 を 4 で割った余りは 0 である.

(ii) $n=2k+1$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4\left(k^2+k\right)+1. \end{aligned}$$

であるから，このとき n^2 を 4 で割った余りは 1 である.

以上より，任意の正整数 n に対し，n^2 を 4 で割った余りは

n が偶数のとき 0，n が奇数のとき 1.　　(**答**)

(2) 背理法により示す.

与式をみたす a，b，c が存在し，そのとき a と b がともに奇数であると仮定する．すなわち

$$a=2k+1,\quad b=2l+1 \quad (k,\ l \text{ は非負整数})$$

とおいて，

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots(*)$$

の左辺に代入すると，

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (2k+1)^2+(2l+1)^2 \\ &= 4\left(k^2+k+l^2+l\right)+2=c^2. \end{aligned}$$

ところが (1) の結果より，4 で割って 2 余る平方数は存在しないから，この等式をみたす整数 c は存在しない．これは矛盾である.

よって，$(*)$ をみたす正整数 a，b のうち，少なくとも一方は偶数である.　**〔証明終〕**

演習問題 14 − 1

$\boxed{1}$ $\sqrt{6} \times \sqrt[3]{75} \times \sqrt[6]{n}$ が自然数となるような，最小の自然数 n を求めよ．

$\boxed{2}$ $30!$，$1000!$ はそれぞれ 10 で何回割り切れるか．

$\boxed{3}$ $10!$ の正の約数のうち，奇数であるものの個数と，それらの総和を求めよ．

演習問題 14 − 2

m を正の整数，n を素数とする．x の 2 次方程式

$$x^2 - mx + n = 0 \quad \cdots (*)$$

が整数の解をもつとする．このとき，2 次方程式 $(*)$ は $x = 1$ を解に持つことを示せ．

演習問題 14 − 3

1　n を奇数とする.

$$S = n + (n+1)^2 + (n+2)^3$$

は 16 の倍数であることを示せ.

2　次の問いに答えよ.

(1) 自然数 m, n について, m 以上 $m+n$ 以下の自然数の和を m, n で表せ.
(2) 88 を連続する 2 つ以上の自然数の和として表すとき, 表し方をすべて求めよ.

演習問題 14 − 4

ある店で販売しているある商品は，3 個入りの小，8 個入りの大と 2 種類あり，バラ売りはしていないという．次の問いに答えよ．

(1) 20 個以下で注文に応じられない個数をすべて挙げよ．

(2) 店主は，ある個数以上の注文であればつねに注文に応じられると言っているが，それは本当か．正しいかどうかを理由とともに述べ，正しい場合はその個数を求めよ．