3MJS/3MJ

本科２期９月度

解答

Ｚ会東大進学教室

中３数学

中３東大数学

１４章　場合の数（１）－順列（１）－

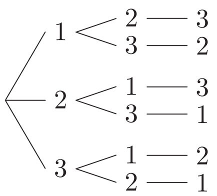
問題

【1】辞書式配列と樹形図で表した場合をそれぞれを示す.

(1) 〔辞書式配列〕

123, 132, 213, 231, 312, 321

〔樹形図〕

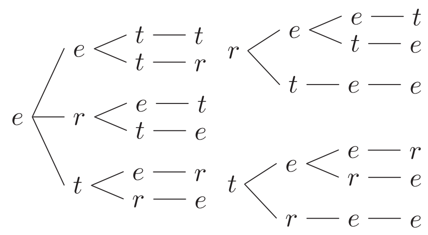


よって, **6 通り**

(2) 〔辞書式配列〕

$eert$, $eetr$, $eret$, $erte$, $eter$, $etre$,
$reet$, $rete$, $rtee$, $teer$, $tere$, $tree$

〔樹形図〕

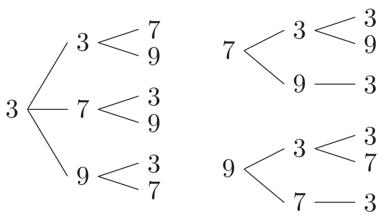


よって, **12 通り**

(3) 〔辞書式配列〕

337, 339, 373, 379, 393, 397,
733, 739, 793, 933, 937, 973

〔樹形図〕

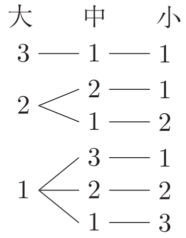


よって, **12 通り**

(4) 〔辞書式配列〕

(大, 中, 小) =(1, 1, 3), (1, 2, 2),
(1, 3, 1), (2, 1, 2),
(2, 2, 1), (3, 1, 1)

〔樹形図〕



よって, **6 通り**

【2】(1) 右表より

出た目の和が 6 のときは

$(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3), (4,\ 2),\ (5,\ 1)$

の 5 通り

出た目の和が 7 のときは

$(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),$

$(4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$

の 6 通り

よって，和の法則より

$5 + 6 = \mathbf{11}$ **(通り)**

〔出た目の和〕

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(2) 右上表より，出た目の和が 5 の倍数になるのは

出た目の和が 5 $\cdots(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$
出た目の和が 10 $\cdots(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)$

よって，和の法則より

$4 + 3 = \mathbf{7}$ **(通り)**

(3) 右上表より，出た目の和が 7 以上の奇数になるときは

出た目の和が 7 $\cdots(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$
出た目の和が 9 $\cdots(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)$
出た目の和が 11 $\cdots(5,\ 6),\ (6,\ 5)$

よって，和の法則より

$6 + 4 + 2 = \mathbf{12}$ **(通り)**

(4) 右上表より，出た目の和が 10 以下になるときは

$(1,\ 1), (1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (1,\ 5), (1,\ 6)$

$(2,\ 1), (2,\ 2), (2,\ 3), (2,\ 4), (2,\ 5), (2,\ 6)$

$(3,\ 1), (3,\ 2), (3,\ 3), (3,\ 4), (3,\ 5), (3,\ 6)$

$(4,\ 1), (4,\ 2), (4,\ 3), (4,\ 4), (4,\ 5), (4,\ 6)$

$(5,\ 1), (5,\ 2), (5,\ 3), (5,\ 4), (5,\ 5)$

$(6,\ 1), (6,\ 2), (6,\ 3), (6,\ 4)$

よって，**33 (通り)**

＜別解＞

出た目の和が 11 以上になる場合の数より，出た目の和が 10 以下になる場合の数の方が多いので，出た目の和が 11 以上になる場合

$(5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$

の 3 通りを考えて，

$36-3=\mathbf{33}$**(通り)**

としてもよい.

(5) 右表より，出た目の積が素数になるのは

$(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),$

$(2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (5,\ 1)$

よって，**6**（**通り**）

〔出た目の積〕

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

【3】(1) A 地点から B 地点までの行き方は，4 通り
B 地点から C 地点までの行き方は，6 通り
よって，積の法則より

$4\times 6=\mathbf{24}$（**通り**）

(2) 1 回目に偶数が出るのは，3 通り
2 回目に 3 の倍数が出るのは，2 通り
よって，積の法則より

$3\times 2=\mathbf{6}$（**通り**）

(3) 男子の選び方は，18 通り
女子の選び方は，25 通り
よって，積の法則より

$18\times 25=\mathbf{450}$（**通り**）

(4) $(a+b)$ の ( ) からの文字の選び方は，2 通り
$(x+y+z)$ の ( ) からの文字の選び方は，3 通り
よって，積の法則より

$3\times 2=\mathbf{6}$（**個**）

【4】(1) $${}_6\mathrm{P}_2 = 6\cdot 5 = \mathbf{30}$$

(2) $${}_8\mathrm{P}_3 = 8\cdot 7\cdot 6 = \mathbf{336}$$

(3) $$\begin{aligned} 8! &= 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= \mathbf{40320} \end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned} 7! \times {}_3\mathrm{P}_2 &= 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2 \\ &= \mathbf{30240} \end{aligned}$$

【5】(1) $$\begin{aligned} {}_{40}\mathrm{P}_3 &= 40\cdot 39\cdot 38 \\ &= \mathbf{59280}\ (\text{通り}) \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} 5! &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= \mathbf{120}\ (\text{通り}) \end{aligned}$$

(3) $${}_8\mathrm{P}_3 = 8\cdot 7\cdot 6 = \mathbf{336}\ (\text{通り})$$

【6】(1) 3 桁の整数を作るためには，まず百の位の数に 0 以外の 6 個の数字のいずれかを選び，次に十の位以下に 0 を含めた残りの 6 個の数字から 2 個を選び出して並べればよい．

よって

$$6 \times {}_6\mathrm{P}_2 = 6\cdot 6\cdot 5 = \mathbf{180}\ (\text{個})$$

(2) 3 桁の数が奇数ということは，一の位の数字が奇数であればよい．

奇数は 1，3，5 の 3 個である．

(i) 一の位の数字が 1 のとき，$5\times 5 = 25$ (個)

(ii) 一の位の数字が 3 のとき，(i) と同様に，$5\times 5 = 25$ (個)

(iii) 一の位の数字が 5 のとき，(i) と同様に，$5\times 5 = 25$ (個)

よって

$$25 + 25 + 25 = \mathbf{75}\ (\text{個})$$

(3) 3 桁の整数が 5 の倍数ということは，一の位が 0，5 であればよい．

(i) 一の位が 0 のとき，$6\times 5 = 30$ (個)

(ii) 一の位が 5 のとき，$5\times 5 = 25$ (個)

よって

$$30 + 25 = \mathbf{55}\ (\text{個})$$

(4) 7 個の数字を 3 で割ったときの余りを分類すると 3 桁の整数が 3 の倍数ということは各位の和が 3 の倍数であるということである.
よって，3 個の数字の和が 3 の倍数となる組は,

余り	数字
0	0，3，6
1	1，4
2	2，5

(0，1，2)，(0，1，5)，(0，2，4)，(0，3，6)，(0，4，5)
(1，2，3)，(1，2，6)，(1，3，5)，(1，5，6)，(2，3，4)
(2，4，6)，(3，4，5)，(4，5，6)
の 13 組である.

(i) 0 を含む組

$$\begin{aligned} 2 \times {}_2\mathrm{P}_2 &= 2 \times 2! \\ &= 4 \end{aligned}$$

(ii) 0 を含まない組

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{P}_3 &= 3! \\ &= 6 \end{aligned}$$

よって

$$4 \times 5 + 6 \times 8 = \mathbf{68}\ (\text{個})$$

【7】(1) 3つの自然数を x, y, z とし，$z \leqq y \leqq x$ とすると

$$1 \leqq z \leqq y \leqq x \leqq 7$$

① x の最大は $y = z = 1$ のときで

$$x = 7 - (1+1) = 5$$

② x の最小は $x = y = z$ と考えて

$$x + y + z = 7$$
$$x + x + x = 7$$
$$x = \frac{7}{3} = 2.333\cdots$$

よって，$x = 3$

①, ② より，$3 \leqq x \leqq 5$
すなわち，$x = 3,\ 4,\ 5$
表に整理すると，右表のようになる.

x	5	4	3	3
y	1	2	2	3
z	1	1	2	1

よって，**4 通り**

(2) $5x + 3y + z = 17$ より，$5x = 17 - (3y + z)$ $\cdots(*)$
$y \geqq 1$，$z \geqq 1$ より，$3y + z \geqq 4$ であるので，$5x \leqq 13$
また，x は正の整数だから，$x = 1,\ 2$

(i) $x = 1$ のとき，$(*)$ をみたす $(y,\ z)$ の組は，

$$(y,\ z) = (1,\ 9),\ (2,\ 6),\ (3,\ 3)$$

(ii) $x = 2$ のとき，$(*)$ をみたす $(y,\ z)$ の組は，

$$(y,\ z) = (1,\ 4),\ (2,\ 1)$$

表に整理すると，右表のようになる.

x	2	2	1	1	1
y	2	1	3	2	1
z	1	4	3	6	9

よって，**5 組**

(3) 5g の分銅を x 個，10g の分銅を y 個，20g の分銅を z 個使うとする.

$$5x + 10y + 20z = 60$$

を満たし，x, y, z は正の整数であればよいので，
右表より，**4 通り**

x	2	2	4	6
y	1	3	2	1
z	2	1	1	1

(4) 10 円 2 枚で払える金額は

0 円, 10 円, 20 円

50 円 3 枚で払える金額は

0 円, 50 円, 100 円, 150 円

100 円 4 枚で払える金額は

0 円, 100 円, 200 円, 300 円, 400 円

よって，全部使って払える金額を考えると，
10 円，20 円，50 円，60 円，70 円，100 円
110 円，120 円，150 円，160 円，170 円，200 円
210 円，220 円，250 円，260 円，270 円，300 円
310 円，320 円，350 円，360 円，370 円，400 円
410 円，420 円，450 円，460 円，470 円，500 円
510 円，520 円，550 円，560 円，570 円
したがって，**35 通り**
◆ ここに注意 ◆
0 円は含めない！

(5) 2 つのサイコロを A と B とし，表に整理すると

A	1	2	3
B	5	4	3

よって，**3 通り**

(6) 3 つのサイコロを A，B，C とし，表に整理すると

A	6	6	6	5	5	4
B	5	4	3	5	4	4
C	1	2	3	2	3	4

よって，**6 通り**

【8】(1) 素因数分解すると

$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

よって，約数の個数は

$$(4+1)(1+1)(2+1) = 5 \times 2 \times 3 = \mathbf{30}\ (\text{個})$$

総和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)(1+5+5^2) = 31 \times 4 \times 31 = \mathbf{3844}$$

(2) 素因数分解すると

$$3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7$$
$$7056 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2$$

よって，最大公約数は

$$2^4 \times 3^2 \times 7 = 1008$$

したがって，1008 の約数の個数は

$$(4+1)(2+1)(1+1) = 5 \times 3 \times 2 = \mathbf{30}\ (\text{個})$$

【9】 (i) A → B → D のとき

$$3 \times 2 = 6\ (\text{通り})$$

(ii) A → B → C → D のとき

$$3 \times 1 \times 2 = 6\ (\text{通り})$$

(iii) A → C → D のとき

$$2 \times 2 = 4\ (\text{通り})$$

(iv) A → C → B → D のとき

$$2 \times 1 \times 2 = 4\ (\text{通り})$$

よって

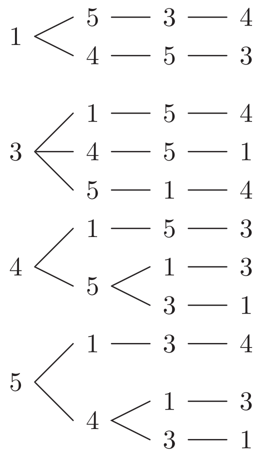
$$6+6+4+4 = \mathbf{20}\ (\text{通り})$$

添削課題

【1】(1) $(x,\ y,\ z,\ w) = (1,\ 1,\ 3,\ 3),\ (1,\ 2,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 3,\ 2),$
$(1,\ 3,\ 1,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2,\ 2),\ (1,\ 3,\ 3,\ 1),$
$(2,\ 1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1,\ 3),$
$(2,\ 2,\ 2,\ 2),\ (2,\ 2,\ 3,\ 1),\ (2,\ 3,\ 1,\ 2),$
$(2,\ 3,\ 2,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1,\ 3),\ (3,\ 1,\ 2,\ 2),$
$(3,\ 1,\ 3,\ 1),\ (3,\ 2,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 2,\ 1),$
$(3,\ 3,\ 1,\ 1)$

これより，**19 組**

(2) 1 番目の数が 2 のとき



これより，11 個.

1 番目の数が 3，4，5 のときも 11 個ずつあるから

$11 \times 4 = \mathbf{44}$**(個)**

【2】(1) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$= \mathbf{720}$

(2) ${}_7\mathrm{P}_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5$
$= \mathbf{210}$

(3) ${}_9\mathrm{P}_4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$
$= \mathbf{3024}$

【3】(1) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$= \mathbf{40320}$**(通り)**

(2) ${}_8\mathrm{P}_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6$
$= \mathbf{336}$**(通り)**

【4】 A → B → D の経路は，$2 \cdot 2 = 4$(通り)

A → B → C → D の経路は，$2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$(通り)

A → B → C → B → D の経路は，$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8$(通り)

A → C → B → D の経路は，$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$(通り)

A → C → B → C → D の経路は，$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$(通り)

A → C → D の経路は，$3 \cdot 1 = 3$(通り)

よって，

$4 + 4 + 8 + 12 + 6 + 3 =$ **37(通り)**

【5】 (i) 5 色使う場合

$5! = 120$(通り)

(ii) 4 色使う場合

(B と D)，(C と E) のいずれか一方の組だけ同色になる．

B と D が同色のとき

${}_5P_4 = 120$(通り)

C と E が同色のときも 120 通りあるから

$120 \times 2 = 240$(通り)

(iii) 3 色使う場合

(B と D)，(C と E) それぞれ同色になるから

${}_5P_3 = 60$(通り)

2 色以下での塗り分けは不可能だから

$120 + 240 + 60 =$ **420(通り)**

【6】 $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$

(1) $(4+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 5 \cdot 3 \cdot 2$

$= \mathbf{30}$**(個)**

(2) $(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \cdot (1 + 3 + 3^2) \cdot (1 + 7) = 31 \cdot 13 \cdot 8$

$= \mathbf{3224}$

(3) 6 の倍数は，素因数分解したとき，素因数 2 と 3 を少なくとも 1 つずつもつから，

約数の個数は

$4 \cdot 2 \cdot (1+1) =$ **16(個)**

それらの総和は

$(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \cdot (3 + 3^2) \cdot (1 + 7) = 30 \cdot 12 \cdot 8$

$= \mathbf{2880}$

１５章　場合の数（２）ー順列（２）ー

問題

【1】(1) 8 文字を並べるので

$$\begin{aligned} 8! &= 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 \\ &= \mathbf{40320}(\textbf{通り}) \end{aligned}$$

(2) 母音が 4 文字，子音が 4 文字ある．

(i) 母音からはじまるとき

まず，母音 4 文字を並べる．

$$\begin{aligned} 4! &= 4\cdot3\cdot2\cdot1 \\ &= 24(\text{通り}) \end{aligned}$$

次に，図の○に 4 つの子音を並べる．

$$\begin{aligned} 4! &= 4\cdot3\cdot2\cdot1 \\ &= 24(\text{通り}) \end{aligned}$$

よって，

$$24\times24=576(\text{通り})$$

(ii) 子音からはじまるとき，(i) と同じなので 576(通り)

したがって，

$$576+576=\mathbf{1152}(\textbf{通り})$$

(3) まず，両端に子音 4 文字から 2 文字選んで並べると，その並べ方は

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{P}_2 &= 4\cdot3 \\ &= 12(\text{通り}) \end{aligned}$$

間に入る 6 文字の並べ方は

$$\begin{aligned} 6! &= 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 \\ &= 720(\text{通り}) \end{aligned}$$

よって

$$12\times720=\mathbf{8640}(\textbf{通り})$$

(4) 「両端の少なくとも一方が母音である」の余事象は「両端が子音である」なので，(1)，(3) より

$$40320-8640=\mathbf{31680}(\textbf{通り})$$

【2】(1) 6冊を並べるので

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= \mathbf{720}\text{(通り)}$$

(2) まず，問題集4冊を並べる．

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 24\text{(通り)}$$

次に，図の5箇所の○から2箇所を選んで教科書を並べる．

$${}_5\mathrm{P}_2 = 5 \cdot 4$$
$$= 20\text{(通り)}$$

よって

$$24 \times 20 = \mathbf{480}\text{(通り)}$$

(3) 教科書2冊，問題集4冊をそれぞれ‘ひとかたまり’とみて，教科書と問題集の並べ方は

$$2! = 2 \cdot 1$$
$$= 2\text{(通り)}$$

教科書の‘ひとかたまり’の中の並べ方は

$$2! = 2 \cdot 1$$
$$= 2\text{(通り)}$$

問題集の‘ひとかたまり’の中の並べ方は

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 24\text{(通り)}$$

よって

$$2 \times 2 \times 24 = \mathbf{96}\text{(通り)}$$

【3】(1) 先頭に置ける数字は，0以外の5通り．
一万の位以下は先頭に置いた数字以外の5つの数字を並び替えればよいので，

$$5 \times 5! = \mathbf{600}\text{(個)}$$

(2) 先頭の数字が1である整数は

$$5! = 120\text{（個）}$$

また，上3桁が201で始まる整数は

$$3! = 6\text{（個）}$$

あるので，203000未満の整数は，$120 + 6 = 126$（個）
203で始まる整数を小さい順に並べると，

$$203146,\ 203164,\ \cdots$$

となるので，203164は

$$126 + 2 = \mathbf{128}\ \text{(番目)}$$

の整数である．

(3) 上 2 桁が 10，12，13，14 で始まる整数は，それぞれ，

$$4! = 24\ (\text{通り})$$

あるので，160000 未満の整数は全部で $24 \times 4 = 96$（個）．16 で始まる整数を小さい順に並べると，

160234，160243，160324，160342，$\cdots$

となるので，はじめから 100 番目の整数は，**160342**

(4) 1 で始まる偶数は，末尾が 0，2，4，6 のいずれかであることから

$$4 \times 4! = 96\ (\text{個})$$

あるので，40 番目の偶数の先頭の数字は 1 である．上 2 桁が 10，12 で始まる偶数はそれぞれ

$$3 \times 3! = 18\ (\text{個})$$

あるので，40 番目の偶数は上 2 桁が 13 で始まる偶数の小さいほうから 4 番目である．

13 で始まる偶数を小さい順に並べると，

130246，130264，130426，130462，$\cdots$

となるので，40 番目の偶数は，**130462**

【4】(1) 7 色の玉を円形に並べるので

$$\begin{aligned}(7-1)! &= 6! \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= \mathbf{720(\text{通り})}\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\frac{(7-1)!}{2} = \frac{6!}{2} = \mathbf{360(\text{通り})}$$

【5】(1) 1 問に対して，それぞれ ◯，× の 2 通りの解答があるので

$$2^5 = \mathbf{32(\text{通り})}$$

(2) A，B，C，D それぞれ 3 通りの手の出し方があるので

$$3^4 = \mathbf{81(\text{通り})}$$

(3) それぞれ 4 チームの選び方があるので

$$4^2 = \mathbf{16(\text{通り})}$$

(4) カードそれぞれに対して 6 通りの入れ方があるので

$$6^4 = \mathbf{1296(\text{通り})}$$

【6】(1) 千の位には 0 以外の 4 種類の数字が入れて，百の位，十の位，一の位には 0 も含めた 5 種類が入るので

$$4 \times 5 \times 5 \times 5 = \mathbf{500(\text{通り})}$$

(2) 一の位は 0, 2, 4 の 3 通り，千の位は 1, 2, 3, 4 の 4 通り，百，十の位が 0, 1, 2, 3, 4 の 5 通りなので

$$3 \times 4 \times 5 \times 5 = \mathbf{300(\text{通り})}$$

(3) 3000 以上の整数になるためには，千の位が 3，4 であればよいので

$$2 \times 5 \times 5 \times 5 = \mathbf{250(\text{通り})}$$

【7】(1) 5 個のうち，1 が 3 個，2 が 2 個あるので

$$\frac{5!}{3!2!} = \mathbf{10(通り)}$$

(2) 6 個のうち，a が 2 個，b が 4 個あるので

$$\frac{6!}{2!4!} = \mathbf{15(通り)}$$

(3) 12 個のうち，M が 2 個，A が 3 個，T が 2 個あるので

$$\frac{12!}{2!3!2!} = \mathbf{19958400(通り)}$$

【8】(1) 奇数となるのは，一の位の数が 1 と 3 のときである．

よって，一の位の数が 1 のとき

$$\begin{aligned}\frac{6!}{2! \times 2!} &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} \\ &= 180\end{aligned}$$

一の位の数が 3 のとき

$$\begin{aligned}\frac{6!}{3! \times 2!} &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} \\ &= 60\end{aligned}$$

和の法則より

$$180 + 60 = \mathbf{240(通り)}$$

(2) 7 桁の整数にするには

(7 個の数字を並べる方法) − (先頭が 0 になる方法)

である．

まず 7 個の数字を並べる方法は

$$\frac{7!}{2!3!} = 420$$

また，先頭が 0 になる並べ方は

$$1 \times \frac{6!}{2!3!} = 60$$

よって

$$420 - 60 = \mathbf{360(通り)}$$

(3) 2 つの K を 1 文字として考える．A が 3 つ含まれている 7 文字を 1 列に並べるので

$$\frac{7!}{3!} = \mathbf{840(通り)}$$

(4) 黒球 1 個を固定して考えると白球 4 個，赤球 2 個を 1 列に並べればよいので

$$\frac{6!}{4!2!} = \mathbf{15(通り)}$$

【9】(1) 末尾が 0 か 2 であればよい.

(i) 末尾が 0 のとき,

最高位が 1 のとき，できる偶数は, $\dfrac{5!}{2!2!} = 30$（個）

最高位が 2 のとき，できる偶数は, $\dfrac{5!}{3!} = 20$（個）

よって，末尾が 0 の偶数は，全部で $30 + 20 = 50$（個）できる.

(ii) 末尾が 2 のとき,

最高位が 1 のとき，できる偶数は, $\dfrac{5!}{2!2!} = 30$（個）

最高位が 2 のとき，できる偶数は, $\dfrac{5!}{2!3!} = 10$（個）

よって，末尾が 2 の偶数は，全部で $30 + 10 = 40$（個）できる.

(i)(ii) より，偶数は全部で $50 + 40 =$ **90（個）**　できる.

(2) (1) より，最高位が 1 である偶数は，全部で $30 + 30 = 60$（個）できることから，求める偶数の最高位の数字は 1 である.

(i) 上 2 桁が 10 のとき,

末尾が 0 である偶数は, $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$（個）

末尾が 2 である偶数は, $\dfrac{4!}{2!} = 12$（個）

できる.

(ii) 上 3 桁が 110 のとき,

末尾が 0 である偶数は, $\dfrac{3!}{2!} = 3$（個）

末尾が 2 である偶数は, $3! = 6$（個）

できる.

(iii) 上 3 桁が 111 のとき，残った数字は 0，0，2，2 なので，これらを並び替えればよいので，偶数は全部で

$$\frac{4!}{2!2!} = 6\ (\text{個})$$

(i)(ii)(iii) より，10 または 110 または 111 で始まる偶数は，$6+12+3+6+6 = 33$（個）ある.

よって，求める偶数は，112 で始まる偶数のうち，小さい方から数えて 2 番目の偶数である.

112 で始まる偶数を小さい順に並べると,

1120012，1120102，$\cdots$

となるので，求める偶数は，**1120102**

【10】(1) (左辺) $= n(n-1)$ より，

$$\begin{aligned} n(n-1) &= 72 \\ n^2 - n - 72 &= 0 \\ (n-9)(n+8) &= 0 \\ \therefore\ n &= 9,\ -8 \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ より，$\boldsymbol{n = 9}$

(2) (左辺) $= n(n-1)(n-2)$ より，

$$n(n-1)(n-2) = 20n$$

$n \fallingdotseq 0$ より，両辺を n で割って，

$$\begin{aligned} (n-1)(n-2) &= 20 \\ n^2 - 3n - 18 &= 0 \\ (n-6)(n+3) &= 0 \\ \therefore\ n &= 6,\ -3 \end{aligned}$$

$n \geqq 3$ より，$\boldsymbol{n = 6}$

(3)

$$\begin{aligned} &(\text{左辺}) = 2n(2n-1)(2n-2) \\ &(\text{右辺}) = 36n(n-1) \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} 2n(2n-1)(2n-2) &= 36n(n-1) \\ 4n(2n-1)(n-1) &= 36n(n-1) \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ より，$n \fallingdotseq 0$，$n \fallingdotseq 1$ だから，両辺を $4n(n-1)$ で割って，

$$2n - 1 = 9$$

よって，$\boldsymbol{n = 5}$

【11】(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= n\,{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1} \\
&= n \times (n-1)(n-2)\cdots\{(n-1)-(r-2)\} \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\
&= {}_n\mathrm{P}_r = (\text{左辺})
\end{aligned}
$$

（証明終）

＜別解＞

順列の意味を考えて示す.

異なる n 個から r 個をとってつくる順列を以下のように考える.

n 個のものをそれぞれ a_1，a_2，$\cdots$，a_n とする．順列の最初に a_1 を入れるとすると，2 番目以降の入れ方は，${}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$ 通り.

また，順列の最初に a_2，a_3，$\cdots$，a_n を入れたときも 2 番目以降の入れ方はそれぞれ ${}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$ 通りある.

よって，異なる n 個から r 個とってつくった順列に関して，

$$
{}_n\mathrm{P}_r = n \times {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}
$$

が成り立つ.　（証明終）

(2)

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= (n-2)(n-3)\cdots\{(n-2)-(r-1)\} \\
&\quad + 2r \times (n-2)(n-3)\cdots\{(n-2)-(r-2)\} \\
&\quad + \left(r^2-r\right) \times (n-2)(n-3)\cdots\{(n-2)-(r-3)\} \\
&= (n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1) \\
&\quad + 2r(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)(n-r) \\
&\quad + \left(r^2-r\right)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+2)(n-r+1) \\
&= (n-2)(n-3)\cdots(n-r+1) \\
&\qquad \times \left\{(n-r)(n-r-1) + 2r(n-r) + \left(r^2-r\right)\right\} \\
&= (n-2)(n-3)\cdots(n-r+1) \\
&\qquad \times \left(n^2-2nr+r^2-n+r+2nr-2r^2+r^2-r\right) \\
&= (n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)\left(n^2-n\right) \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1) \\
&= {}_n\mathrm{P}_r = (\text{左辺})
\end{aligned}
$$

（証明終）

添削課題

【1】(1) 女子 3 人を 1 人とみて，6 人の並べ方を考えて

$6!$(通り)

また，女子 3 人の並べ方は

$3!$(通り)

積の法則より

$6! \times 3! = \mathbf{4320}$**(通り)**

(2) 両端の男子の並び方は

${}_5\mathrm{P}_2$(通り)

残りの 6 人の並べ方は

$6!$(通り)

積の法則より

${}_5\mathrm{P}_2 \times 6! = \mathbf{14400}$**(通り)**

(3) すべての並び方から，(2) の場合をひけばよい．

$8! - 14400 = \mathbf{25920}$**(通り)**

(4) まず，男子を並べ，次に女子の入り方を考える．

① 男 ② 男 ③ 男 ④ 男 ⑤ 男 ⑥

男子の並べ方は

$5!$(通り)

女子の並べ方は，上の図の ①〜⑥ のうち 3 つを選んで女子を入れればよいから

${}_6\mathrm{P}_3$(通り)

よって，積の法則より

$5! \times {}_6\mathrm{P}_3 = \mathbf{14400}$**(通り)**

【2】(1) 残りの 5 つの数字を並べればよく，このとき 0 が 2 個あることに注意すると

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \mathbf{60}\textbf{(通り)}$$

(2) 残りの 5 つの数字を並べればよく，このとき 0，1 がそれぞれ 2 個あることに注意すると

$$\frac{5!}{2!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} = \mathbf{30}\textbf{(通り)}$$

(3) 3 が先頭にくるものは，(2) 同様に考えられるので，30 通り．先頭に 0 がくることはないので，和の法則より，全部の並べ方は

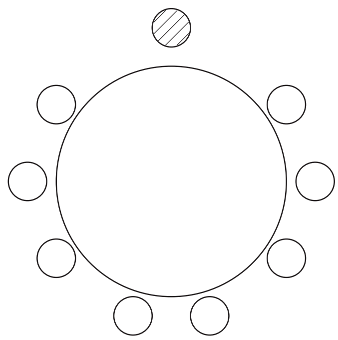
$60 + 30 + 30 = \mathbf{120}$**(通り)**

【3】(1) 千の位の数字は，0 以外の 1，2，3 なので，3 通り．
一の位の数字は，0 と 2 の 2 通り．
百の位と十の位の数字は，0，1，2，3 なので，4 通り．
よって，
$2 \times 3 \times 4^2 = \mathbf{96}$ **(通り)**

(2) 4 桁の整数が 3 の倍数ということは，各位の数字の和が 3 の倍数であるということである．
よって，4 つの数字の和が 3 の倍数となる組は，
(0, 0, 0, 3), (0, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 3, 3), (0, 1, 2, 3), (0, 2, 2, 2),
(1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2), (0, 3, 3, 3), (1, 2, 3, 3), (2, 2, 2, 3), (3, 3, 3, 3)
の 12 組ある．
(0, 0, 0, 3) のとき，3000 の 1 通り．
(3, 3, 3, 3) のとき，3333 の 1 通り．
(0, 1, 1, 1)，(0, 2, 2, 2)，(0, 3, 3, 3)，(0, 0, 3, 3) のとき，$1 \times \dfrac{3!}{2!} = 3$ より，
$3 \times 4 = 12$（通り）．
(0, 0, 1, 2) のとき，$2 \times \dfrac{3!}{2!} = 6$（通り）．
(0, 1, 2, 3) のとき，$3 \times 3! = 18$（通り）．
(1, 1, 1, 3)，(2, 2, 2, 3) のとき，$\dfrac{4!}{3!} = 4$ より，$4 \times 2 = 8$（通り）．
(1, 1, 2, 2) のとき，$\dfrac{4!}{2!2!} = 6$（通り）．
(1, 2, 3, 3) のとき，$\dfrac{4!}{2!} = 12$（通り）．
よって，
$1 + 1 + 12 + 6 + 18 + 8 + 6 + 12 = \mathbf{64}$ **（通り）**

【4】(1)
$$\begin{aligned}(6-1)! &= 5!\\ &= \mathbf{120}\text{(通り)}\end{aligned}$$

(2) 右の図のように，赤球を置く位置を決めて，他の 8 つの〇に白球 2 個，黒球 6 個を一列に並べればよいから
$\dfrac{8!}{2!6!} = \mathbf{28}$ **(通り)**



１６章　場合の数（３）ー組合せー

問題

【1】(1)

$$\begin{aligned}{}_7C_3 &= \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\\ &= \mathbf{35}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}{}_{12}C_9 &= {}_{12}C_3\\ &= \frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}\\ &= \mathbf{220}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}{}_5C_2\times{}_4C_1 &= \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times4\\ &= \mathbf{40}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}{}_6C_6\times{}_9C_7 &= {}_6C_0\times{}_9C_2\\ &= 1\times\frac{9\cdot8}{2\cdot1}\\ &= \mathbf{36}\end{aligned}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned}{}_{40}C_3 &= \frac{40\cdot39\cdot38}{3\cdot2\cdot1}\\ &= \mathbf{9880(通り)}\end{aligned}$$

(2) 16 チームが総あたりの試合をするということは，16 チームから 2 チーム選ぶ方法と等しいので

$$\begin{aligned}{}_{16}C_2 &= \frac{16\cdot15}{2\cdot1}\\ &= \mathbf{120(試合)}\end{aligned}$$

(3) 「6 回投げて表が 4 回出る」ということは,「6 回のうち表を 4 回選ぶ」ということなので

$$\begin{aligned}{}_6C_4 &= {}_6C_2\\ &= \frac{6\cdot5}{2\cdot1}\\ &= \mathbf{15(通り)}\end{aligned}$$

(4) 2 枚の積が奇数になるには，2 枚とも奇数でなければいけないので，1，3，5，7，9 の 5 枚から 2 枚選べればよい．よって

$$\begin{aligned}{}_5C_2 &= \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\\ &= \mathbf{10(通り)}\end{aligned}$$

【3】(1) 男女 10 人から 4 人選べばよいので

$$\begin{aligned}{}_{10}C_4 &= \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\\ &= \mathbf{210(通り)}\end{aligned}$$

(2) 男子 5 人から 2 人，女子 5 人から 2 人選べばよいので

$$\begin{aligned}{}_5C_2\times{}_5C_2 &= \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\\ &= \mathbf{100(通り)}\end{aligned}$$

(3) 特定の 2 人を A，B とすると，残りの 8 人から 2 人選べばよいので

$$\begin{aligned}{}_8C_2 &= \frac{8\cdot7}{2\cdot1}\\ &= \mathbf{28(通り)}\end{aligned}$$

【4】(1) 5 人の選び方は

$$
\begin{aligned}
{}_8\mathrm{C}_5 &= {}_8\mathrm{C}_3 \\
&= 56(\text{通り})
\end{aligned}
$$

よって，**56(通り)**

(2) A に入る 4 人の選び方は

$${}_8\mathrm{C}_4 = 70(\text{通り})$$

よって，**70(通り)**

(3) 4 人ずつ 2 組に分ける方法を x 通りとする．
この各組の分け方に対して，2 つのグループ A，B に分ける方法は

$$2! = 2(\text{通り})$$

(2) より

$$
\begin{aligned}
x \times 2! &= {}_8\mathrm{C}_4 \\
x &= \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{2!} \\
&= \frac{70}{2} \\
&= \mathbf{35(\text{通り})}
\end{aligned}
$$

(4) 2 人ずつ 4 組に分ける方法を x 通りとする．
まず，A，B，C，D の 4 組に 2 人ずつ分ける．
A に入る 2 人の選び方は

$${}_8\mathrm{C}_2 = 28(\text{通り})$$

B に入る 2 人の選び方は，残りの 6 人から 2 人選んで

$${}_6\mathrm{C}_2 = 15(\text{通り})$$

C に入る 2 人の選び方は，残りの 4 人から 2 人選んで

$${}_4\mathrm{C}_2 = 6(\text{通り})$$

よって，積の法則より

$$28 \times 15 \times 6 = 2520(\text{通り})$$

この各組の分け方に対して，4 組 A，B，C，D に分ける方法は

$$4! = 24(\text{通り})$$

よって

$$
\begin{aligned}
x \times 4! &= {}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \\
x &= \frac{{}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2}{4!} \\
&= \frac{2520}{24} \\
&= \mathbf{105(\text{通り})}
\end{aligned}
$$

(5) グループ A に 3 人，グループ B に 3 人，グループ C に 2 人と分ける方法を考える．

A に入る 3 人の選び方は

$$ {}_8\mathrm{C}_3 = 56(\text{通り}) $$

B に入る 3 人の選び方は，残りの 5 人から 3 人選んで

$$ \begin{aligned} {}_5\mathrm{C}_3 &= {}_5\mathrm{C}_2 \\ &= 10(\text{通り}) \end{aligned} $$

よって，積の法則より

$$ 56 \times 10 = 560(\text{通り}) $$

グループを区別しないで，3 人，3 人，2 人に分ける方法を x 通りとする．

x に対して，3 つのグループ A，B，C に分ける方法は

$$ 2! = 2(\text{通り}) $$

よって

$$ \begin{aligned} x \times 2! &= {}_8\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_3 \\ x &= \frac{{}_8\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_3}{2!} \\ &= \frac{560}{2} \\ &= \mathbf{280(\text{通り})} \end{aligned} $$

【5】(1) A に入る 2 人の選び方は

$${}_6C_2 = 15(\text{通り})$$

B に入る 2 人の選び方は，残りの 4 人から 2 人選んで

$${}_4C_2 = 6(\text{通り})$$

よって，積の法則より

$$15 \times 6 = \mathbf{90(通り)}$$

(2) 2 人ずつ 3 組に分ける方法を x 通りとする．
この各組の分け方に対して，3 組 A, B，C に分ける方法は

$$3! = 6(\text{通り})$$

(1) より

$$\begin{aligned} x \times 3! &= {}_6C_2 \times {}_4C_2 \\ x &= \frac{90}{6} \\ &= \mathbf{15(通り)} \end{aligned}$$

(3) 1 人の選び方は

$${}_6C_1 = 6(\text{通り})$$

その各々に対して，残りの 5 人から 2 人選ぶ選び方は

$${}_5C_2 = 10(\text{通り})$$

よって，積の法則より

$$6 \times 10 = \mathbf{60(通り)}$$

(4) 3 組に分けるには

$$(4,\ 1,\ 1),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2)$$

のどれかである．

(i) 4 人，1 人，1 人のとき
まず A に 4 人，B に 1 人，C に 1 人にするには

$${}_6C_4 \times {}_2C_1 = 30(\text{通り})$$

B，C の区別をつけなければよいので

$$\frac{30}{2!} = 15(\text{通り})$$

(ii) 3 人，2 人，1 人のとき

(3) より, 60(通り)

(iii) 2 人，2 人，2 人のとき

(2) より, 15(通り)

よって，(i)，(ii)，(iii) より

$$15 + 60 + 15 = \mathbf{90(通り)}$$

(5) (i) 4 人，1 人，1 人のとき

ある 2 人が同じ組に入るということは 4 人の組の中に 2 人が入っているということである．

よって，残りの 4 人の分け方は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1}{2!} = 6(\text{通り})$$

(ii) 3 人，2 人，1 人のとき

ある 2 人が同じ組に入るということは，3 人の組に 2 人が入る．もしくは，2 人の組に 2 人が入るのどちらかである．

① 3 人の中に特定の 2 人が入るとき，残りの 4 人の分け方は

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 &= 4 \times 3 \\ &= 12(\text{通り}) \end{aligned}$$

② 2 人の中に特定の 2 人が入るとき

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{C}_3 &= {}_4\mathrm{C}_1 \\ &= 4(\text{通り}) \end{aligned}$$

よって，①，②より

$$12 + 4 = 16(\text{通り})$$

(iii) 2 人，2 人，2 人のとき

ある 2 人が同じ組に入るということは残りの 4 人を 2 人，2 人に分ければよいので

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 3(\text{通り})$$

(i)，(ii)，(iii) より

$$6 + 16 + 3 = \mathbf{25(\text{通り})}$$

【6】 (1) A から B への最短の道すじは，4 個の $\boxed{右}$ と 5 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{9!}{4!5!} = \mathbf{126}(\textbf{通り})$$

(2) A から C への最短の道すじは，2 個の $\boxed{右}$ と 3 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{2!3!} = 10(\text{通り})$$

C から B への最短の道すじは，2 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{4!}{2!2!} = 6(\text{通り})$$

よって，A → C → B の最短の道すじの総数は，積の法則より

$$10 \times 6 = \mathbf{60}(\textbf{通り})$$

(3) 「CD 間が通れない」最短の道すじの数は直接は求めにくい．
よって，補集合を使って

「最短の道すじの総数」−「CD 間を通る最短の道すじの数」

を求める．
A から C への最短の道すじは，2 個の $\boxed{右}$ と 3 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{2!3!} = 10(\text{通り})$$

C から D への最短の道すじは

1(通り)

D から B への最短の道すじは，1 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{3!}{1!2!} = 3(\text{通り})$$

したがって，A → C → D → B の最短の道すじは，積の法則より

$$10 \times 1 \times 3 = 30(\text{通り})$$

ゆえに，CD 間を通らない最短の道すじの総数は

$$126 - 30 = \mathbf{96}(\textbf{通り})$$

【7】(1) A から P への最短経路は，3 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{3!2!}=10(\text{通り})$$

P から B への最短経路は，2 個の $\boxed{右}$ と 3 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{2!3!}=10(\text{通り})$$

よって，A → P → B の最短経路の総数は，積の法則より

$10\times10=$ **100(通り)**

(2) A から P への最短経路は，3 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{3!2!}=10(\text{通り})$$

P から Q への最短経路は

1(通り)

Q から B への最短経路は，1 個の $\boxed{右}$ と 3 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{4!}{1!3!}=4(\text{通り})$$

よって，A → P → Q → B の最短経路の総数は，積の法則より

$10\times1\times4=$ **40(通り)**

(3) A から P への最短経路は，3 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{3!2!}=10(\text{通り})$$

P から Q への最短経路は

1(通り)

Q から R への最短経路は

1(通り)

R から B への最短経路は，1 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{3!}{1!2!}=3(\text{通り})$$

よって，A → P → Q → R → B の最短経路の総数は，積の法則より

$10\times1\times1\times3=$ **30(通り)**

【8】(1)

$$\begin{aligned} {}_8\mathrm{H}_2 &= {}_{8+2-1}\mathrm{C}_2 \\ &= {}_9\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{36} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} {}_2\mathrm{H}_8 &= {}_{2+8-1}\mathrm{C}_8 \\ &= {}_9\mathrm{C}_8 \\ &= {}_9\mathrm{C}_1 \\ &= \mathbf{9} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{H}_2 &= {}_{4+2-1}\mathrm{C}_2 \\ &= {}_5\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{10} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_3 &= {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 \\ &= {}_5\mathrm{C}_3 \\ &= {}_5\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{10} \end{aligned}$$

【9】(1) 求める整数解の組の個数は，3 種類の文字 x，y，z から重複を許して 10 個取る組合せの数に等しいから

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_{10} &= {}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10} \\ &= {}_{12}\mathrm{C}_{10} \\ &= {}_{12}\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{66}\textbf{(組)} \end{aligned}$$

(2) 求める場合の数は，3 種類の果物から重複を許して 5 個取る組合せの数に等しいから

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_5 &= {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 \\ &= {}_7\mathrm{C}_5 \\ &= {}_7\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{21}\textbf{(通り)} \end{aligned}$$

(3) 求める場合の数は，3 人の候補者を重複を許して 15 人が選ぶ組合せの数に等しいから

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_{15} &= {}_{3+15-1}\mathrm{C}_{15} \\ &= {}_{17}\mathrm{C}_{15} \\ &= {}_{17}\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{136}\textbf{(通り)} \end{aligned}$$

(4) $(a+b+c+d)^6$ の展開式の同類項は，a，b，c，d の 4 文字から，重複を許して 6 個取る組合せの数と等しいから

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{H}_6 &= {}_{4+6-1}\mathrm{C}_6 \\ &= {}_9\mathrm{C}_6 \\ &= {}_9\mathrm{C}_3 \\ &= \mathbf{84}\textbf{(種類)} \end{aligned}$$

【10】(1) $a+b+c+d=10$ を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1,\ d \geqq 1$$

であるから

$$a-1=A,\ b-1=B,\ c-1=C,\ d-1=D$$

とおくと，$A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0,\ D \geqq 0$ となる．
$a+b+c+d=10$ より

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 10 \\ (A+1)+(B+1)+(C+1)+(D+1) &= 10 \\ A+B+C+D &= 6 \end{aligned}$$

となる．この方程式の $A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0,\ D \geqq 0$ の解の総数を考えればよい．

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{H}_6 &= {}_{4+6-1}\mathrm{C}_6 \\ &= {}_9\mathrm{C}_6 \\ &= {}_9\mathrm{C}_3 \\ &= \textbf{84(組)} \end{aligned}$$

(2) はじめに各クラスから 1 人ずつ選ぶ．すると残り 3 人を 4 つのクラスから選べばよいので，

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{H}_3 &= {}_{4+3-1}\mathrm{C}_3 \\ &= {}_6\mathrm{C}_3 \\ &= \textbf{20(通り)} \end{aligned}$$

(3) どの果物も少なくとも 5 個ずつ選ぶので，はじめに 5 個ずつ選び，残り 5 個をかき，なし，りんごから選べばよいので，

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_5 &= {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 \\ &= {}_7\mathrm{C}_5 \\ &= {}_7\mathrm{C}_2 \\ &= \textbf{21(通り)} \end{aligned}$$

添削課題

【1】(1) 合計 8 人の中から 4 人を選ぶ方法だから

$$ {}_8C_4 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{70}\textbf{(通り)} $$

(2) 男子 5 人の中から 2 人，女子 3 人から 2 人を選ぶ方法だから

$$ {}_5C_2 \times {}_3C_2 = {}_5C_2 \times {}_3C_1 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times 3 = \mathbf{30}\textbf{(通り)} $$

(3) (女子が少なくとも 1 人) = (全体) − (4 人とも男子)

だから，4 人とも男子である選び方は

$$ {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5(\text{通り}) $$

より

$$ 70 - 5 = \mathbf{65}\textbf{(通り)} $$

(4) A，B 以外の 2 人の委員を，A，B を除く残りの 6 人から選べばよいので

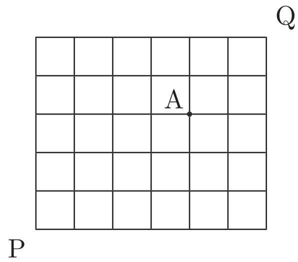
$$ {}_6C_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = \mathbf{15}\textbf{(通り)} $$

(5) A 以外の 3 人の委員を，A，B を除く 6 人から選べばよいので

$$ {}_6C_3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{20}\textbf{(通り)} $$

【2】(1) 右の図において，P から Q まで行く最短経路のうち，A を通らないものと考えると，

$$ {}_{11}C_5 - {}_7C_3 \times {}_4C_2 = \mathbf{252}\textbf{(通り)} $$



(2) ① ${}_9C_3 \times {}_6C_3 = 84 \times 20 = \mathbf{1680}\textbf{(通り)}$

② ①で A，B，C の区別がなくなるから

$$ \frac{1680}{3!} = \mathbf{280}\textbf{(通り)} $$

③ 1 人ずつ A 組か B 組に入れていけばよいので

$$ 2^9 = 512(\text{通り}) $$

ただし，1 組に全員入る 2 通りを除くので

$$ 512 - 2 = \mathbf{510}\textbf{(通り)} $$

【3】(1) A〜E から 2 点，F〜I から 1 点選ぶか，または，

A〜E から 1 点，F〜I から 2 点選べばよいので

$_5C_2 \times {}_4C_1 + {}_5C_1 \times {}_4C_2 = \mathbf{70(個)}$

＜別解＞

A〜I の中から 3 点選ぶ方法は

$_9C_3 = 84$(通り)

そのうち，三角形ができないのは，同じ直線上から 3 点とも選ぶ場合だから

$$\begin{aligned}{}_5C_3 + {}_4C_3 &= {}_5C_2 + {}_4C_1 \\ &= 14(\text{通り})\end{aligned}$$

よって

$84 - 14 = \mathbf{70(個)}$

(2) A〜E から 2 点，F〜I から 2 点選べばよいので

$_5C_2 \times {}_4C_2 = \mathbf{60(個)}$

(3) 上底，下底が 1cm のとき，$4 \times 3 = 12$(個)

上底，下底が 2cm のとき，$3 \times 2 = 6$(個)

上底，下底が 3cm のとき，$2 \times 1 = 2$(個)

したがって

$12 + 6 + 2 = \mathbf{20(個)}$

【4】(1) ○を 8 個，| を 2 個のあわせて 10 個のものを並べる方法と同じだから

$\dfrac{10!}{8!2!} = \mathbf{45(通り)}$

＜別解＞

$$\begin{aligned}{}_3H_8 &= {}_{3+8-1}C_8 \\ &= {}_{10}C_2 \\ &= \mathbf{45(通り)}\end{aligned}$$

(2) 4 ○ | ○○○○ | ○ | ○○ 1 なら，

$a = 4,\ b = c = d = e = 3,\ f = 2,\ g = h = 1$

また，4 ○○ || ○○○ | ○○○ 1 なら，

$a = b = 4,\ c = d = e = 2,\ f = g = h = 1$

のように，○を 8 個，| を 3 個のあわせて 11 個を並べる

ことによって，$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h)$ の組が決まるから

$\dfrac{11!}{8!3!} = \mathbf{165(通り)}$

＜別解＞

$$\begin{aligned}{}_4H_8 &= {}_{4+8-1}C_8 \\ &= {}_{11}C_3 \\ &= \mathbf{165(通り)}\end{aligned}$$

3MJS/3MJ
中３数学
中３東大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	