M2JS/M2J

本科 2 期 11 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 選抜東大数学

高 2 東大数学

問題

【1】初項 1，末項 6，項数 $n+2$ の等差数列の和が 42 であるから

$$\frac{1+6}{2}\times(n+2)=42$$
$$\therefore\quad 7(n+2)=84$$
$$\therefore\quad n=10 \qquad \text{(答)}$$

すると，第 12 項が 6 であるから，公差を d とおくと

$$1+(12-1)d=6$$
$$\therefore\quad d=\frac{5}{11} \qquad \text{(答)}$$

【2】数列 $\{a_{2n}\}$ は，初項 $\sqrt{2}$, 公比 $(\sqrt{2})^2$ の等比数列であるから

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sqrt{2}\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=1023\sqrt{2} \qquad \text{(答)}$$

そして，$a_k=(\sqrt{2})^{k-1}$ より

$$\frac{1}{a_k}=\frac{1}{(\sqrt{2})^{k-1}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}$$

であるから，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1}=1$, 公比 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列となり

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{31}{32}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{31(2+\sqrt{2})}{32} \qquad \text{(答)}$$

【3】16, a, b がこの順に等差数列をなすから

$$2a=b+16$$

a, b, 72 がこの順に等比数列をなすから

$$b^2=72a$$

以上から

$$b^2=36(b+16)$$
$$b^2-36b-12\cdot 48=0$$
$$(b+12)(b-48)=0$$
$$\therefore\quad b=-12,\ 48$$

よって

$$(a,\ b)=(2,\ -12),\ (32,\ 48) \qquad \text{(答)}$$

【4】$\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とする．

$d>0$ のとき，S_n はいくらでも大きくなるので題意をみたさない．

$d=0$ のとき，$a>0$ ならば S_n はいくらでも大きくなり，$a \leqq 0$ ならば任意の n について

$$S_n \leqq 0$$

となるので題意をみたさない．

$d<0$ のとき，$a \leqq 0$ ならば任意の n について

$$S_n \leqq 0$$

となるので題意をみたさない．

以上より，$d<0$, $a>0$ である．

さて，自然数 k について，$a_k>0$ となる最大の k を m とおく．$d<0$, $a>0$ より m はただ 1 つ存在し，題意より

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = S_m = 22$$

である．

ここで，題意をみたす $\{a_n\}$ の和 S_n について

$$S_{m-2} \leqq S_{m-1} \leqq S_m \geqq S_{m+1} \geqq S_{m+2}$$

であるから，次のいずれかが成立する．

(i) $S_{m-2}=20,\ S_{m-1}=21,\ S_m=22$

(ii) $S_m=22,\ S_{m+1}=21,\ S_{m+2}=20$

(iii) $S_{m-1}=20,\ S_m=22,\ S_{m+1}=21$

(iv) $S_{m-1}=21,\ S_m=22,\ S_{m+1}=20$

(i) から (iv) のそれぞれについて，

(i) のとき

$$a_m = S_m - S_{m-1} = 1$$
$$a_{m-1} = S_{m-1} - S_{m-2} = 1$$

であるがこのとき，$d=0$ となり不適．

(ii) のとき，(i) と同様に，$d=0$ となり不適．

(iii) のとき

$$a_{m+1} = S_{m+1} - S_m = -1$$
$$a_m = S_m - S_{m-1} = 2$$

より

$$d = a_{m+1} - a_m = -3$$

となる．このとき

$$a_m = a + (m-1)(-3) = 2 \iff a = 3m-1$$

であるから

$$S_m=\frac{a+a_m}{2}m=\frac{3m+1}{2}m=22 \qquad \therefore \quad (3m+1)m=44 \ \cdots ①$$

ここで，自然数 m に対して $(3m+1)m$ は単調増加であり

$$(3\cdot 3+1)3=30, \quad (3\cdot 4+1)4=52$$

であるから，① をみたす自然数 m は存在しない.

(iv) のとき

$$a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=-2$$
$$a_m=S_m-S_{m-1}=1$$

より

$$d=a_{m+1}-a_m=-3$$

となる．このとき

$$a_m=a+(m-1)(-3)=1 \quad \Longleftrightarrow \quad a=3m-2$$

であるから

$$S_m=\frac{a+a_m}{2}m=\frac{3m-1}{2}m=22 \qquad \therefore \quad (3m-1)m=44$$

ここで，自然数 m に対して $(3m-1)m$ は単調増加であり

$$(3\cdot 4-1)4=44$$

であるから，$m=4$, $a=10$.

以上から，求める $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=13-3n$.　　(答)

【5】n を 3 で割った余りで分けて求める．

$$\frac{23}{111}=0.207207207\cdots=0.\dot{2}0\dot{7}$$

であるから，小数第 n 位の数 a_n は自然数 m に対して

$$a_{3m-2}=2,\ a_{3m-1}=0,\ a_{3m}=7$$

となる．ここで

$$T_m=\frac{a_{3m-2}}{3^{3m-2}}+\frac{a_{3m-1}}{3^{3m-1}}+\frac{a_{3m}}{3^{3m}}$$

とおくと

$$T_m=\frac{2}{3^{3m-2}}+\frac{0}{3^{3m-1}}+\frac{7}{3^{3m}}=\frac{25}{3^{3m}}=\frac{25}{27}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{m-1}$$

このとき

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$$

とおけば，自然数 m に対して

$$\begin{aligned}S_{3m}&=\frac{a_1}{3^1}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots+\frac{a_{3m-2}}{3^{3m-2}}+\frac{a_{3m-1}}{3^{3m-1}}+\frac{a_{3m}}{3^{3m}}\\&=T_1+T_2+\cdots+T_m\\&=\frac{\frac{25}{27}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^m\right\}}{1-\frac{1}{27}}=\frac{25}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3m}}\right)\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}S_{3m-1}&=S_{3m}-\frac{a_{3m}}{3^{3m}}\\&=\frac{25}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3m}}\right)-\frac{7}{3^{3m}}\\&=\frac{1}{26}\left(25-\frac{25+182}{3^{3m}}\right)\\&=\frac{1}{26}\left(25-\frac{23}{3^{3m-2}}\right)\\S_{3m-2}&=S_{3m-1}-\frac{a_{3m-1}}{3^{3m-1}}\\&=\frac{1}{26}\left(25-\frac{23}{3^{3m-2}}\right)-\frac{0}{3^{3m-1}}\\&=\frac{1}{26}\left(25-\frac{23}{3^{3m-2}}\right)\end{aligned}$$

したがって，求める和は

$$\begin{cases}n\text{ が 3 で割ると 1 余る数のとき} & \dfrac{1}{26}\left(25-\dfrac{23}{3^n}\right)\\ n\text{ が 3 で割ると 2 余る数のとき} & \dfrac{1}{26}\left(25-\dfrac{23}{3^{n-1}}\right)\\ n\text{ が 3 の倍数のとき} & \dfrac{25}{26}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)\end{cases}\qquad\text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $1,\ r^2,\ r^3$ はこの順に等差数列であるから

$$\begin{aligned} & 1 + r^3 = 2r^2 \\ \therefore\quad & r^3 - 2r^2 + 1 = 0 \\ \therefore\quad & (r-1)(r^2 - r - 1) = 0 \end{aligned}$$

$r \neq 1$ より

$$r^2 - r - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

$r > 0$ より

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (答)$$

さて

$$2 < \sqrt{5} < 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$$

であるから

$$1 < r < 2$$

また，① より $r^2 = r + 1$ であるから

$$2 < r + 1 = r^2$$

以上より

$$r < 2 < r^2 \qquad (答)$$

(2) $1,\ r^m,\ r^{m+2}$ がこの順に等差数列であるとすると

$$\begin{aligned} & 1 + r^{m+2} = 2r^m \\ \Longleftrightarrow\quad & 1 = 2r^m - r^{m+2} \\ \Longleftrightarrow\quad & 1 = r^m(2 - r^2) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

ここで，(1) より $2 - r^2 < 0$ であるから，(②の右辺) < 0 となり，② の等式は成立しない.

よって，$1,\ r^m,\ r^{m+2}$ がこの順に等差数列であることはない. （証明終）

(3) $1,\ r^m,\ r^n$ がこの順に等差数列であるとすると，$r > 1$ より，$r^m > 1$ であるから公差は正．よって $r^m < r^n \ \Leftrightarrow\ m < n$ が必要.

また，(2) と同様にして

$$1 + r^n = 2r^m \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = r^m(2 - r^{n-m}) \quad \cdots ③$$

ここで，(1) より $n - m > 2$ のとき $r^{n-m} > 2$ であり，(③の右辺) < 0 であるから ③ は不成立．よって，$n - m = 1$ が必要.

このとき

$$1 + r^{m+1} = 2r^m \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = r^m(2 - r)$$

一方

$$1 + r^3 = 2r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = r^2(2 - r)$$

であるから

$$r^m(2 - r) = r^2(2 - r)$$

$r < 2$ より

$$r^m = r^2$$

$r \neq 1$ より

$$m = 2$$

以上から，$1,\ r^m,\ r^n$ がこの順に等差数列であるような自然数の組 $(m,\ n)$ は $(2,\ 3)$ に限る．

（証明終）

問題

【1】(1) S は

$$S = \sum_{k=1}^{n}(n-k)^2 = (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2 + 0^2$$

と表されるから，加える順序を逆にすると

$$\begin{aligned} S &= 1^2 + 2^2 + \cdots\cdots + (n-1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\} \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) 和の記号 $\sum$ を用いると，S は

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)(n-k)$$

と表せる，ここで，$(2k-1)(n-k)$ は $k=n$ のとき 0 だから，この項を加えても S の値は変わらないことに注意すると

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)(n-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left\{-2k^2 + (2n+1)k - n\right\} \\ &= -2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n\cdot n \\ &= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 6n\} \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) 和の記号 $\sum$ を用いて S を表すと

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1) \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

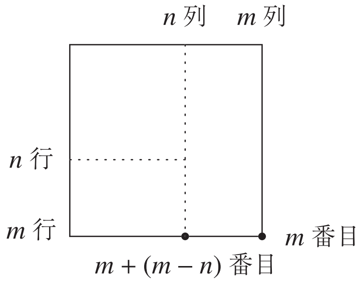
【2】(1) 自然数の列を

$$1 \mid 2,\ 3,\ 4 \mid 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \mid 10,\ 11,\ \ldots$$

と群分けすると，第 n 群には $2n-1$ 個 の項があるから，第 n 群の末項までの項数は

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

図 22.1



(i) $m \geqq n$ のとき

上から m 行目，左から n 列目の数は第 m 群の $m+(m-n)$ 番目の項であるから (図 22.1)

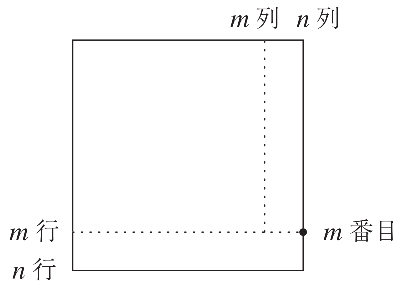
$$(m-1)^2+(m+m-n)=m^2-n+1$$

(ii) $m<n$ のとき

上から m 行目，左から n 列目の数は第 n 群の m 番目の項であるから (図 22.2)

$$(n-1)^2+m=n^2-2n+m+1$$

図 22.2



したがって，求める数は

$$\begin{cases} m \geqq n \text{ のとき } m^2-n+1 \\ m<n \text{ のとき } n^2-2n+m+1 \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) 200 が第 n 群にあるとすると

$$(n-1)^2<200 \leqq n^2$$

が成立する．

ここで，数列 $\{n^2\}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$ は増加列で

$$14^2 = 196,\ 15^2 = 225$$

であるから

$$n = 15$$

となり，200 は第 15 群の 4 番目の項である.

すなわち，200 は上から 4 行目，左から 15 列目の位置にある.　　(答)

(3) 対角線は第 n 行第 n 列と表されるから，その一般項は，(1) の結果において $m = n$ として

$$n^2 - n + 1 \qquad \text{(答)}$$

【3】題意の格子点が含まれる領域を

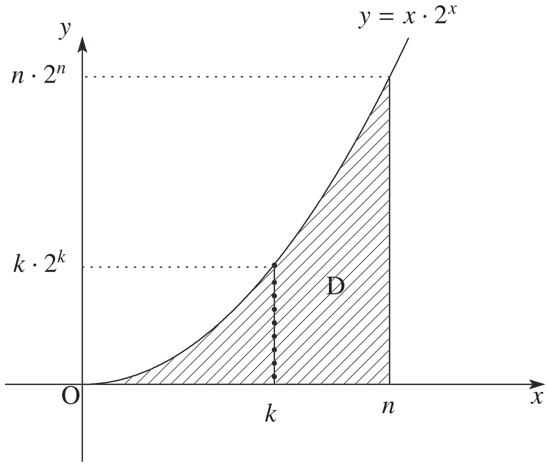
$$D = \left\{(x,\ y) \mid x > 0,\ y > 0,\ \log_2 \frac{y}{x} \leqq x \leqq n\right\}$$

とおく．$x > 0,\ y > 0$ のもとで

$$\log_2 \frac{y}{x} \leqq x \Longleftrightarrow \frac{y}{x} \leqq 2^x$$
$$\therefore \quad y \leqq x \cdot 2^x$$

であるから，領域 D は図 22.3 の斜線部分となる．ただし，境界は x 軸 (直線 $y = 0$) を除いてすべて含む.

図 22.3



そこで，直線 $x = k$ (k は $0 < k \leqq n$ をみたす整数) から領域 D によって切り取られる部分にある格子点の個数を a_k とおくと，いま

$$k \cdot 2^k \ :\ 整数$$

であるから，点 $(k,\ k \cdot 2^k)$ は格子点で

$$a_k = k \cdot 2^k$$

よって，求める格子点の個数 S は

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$$

と表せる．ここで，S と $2S$ を 2 の累乗の項をそろえて並べると

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + \qquad n \cdot 2^n \\ 2S &= \qquad\quad 1 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

となるから，2 式の辺々をひくと

$$\begin{aligned} -S &= 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+1} \\ &= (1 - n) \cdot 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

ゆえに，求める格子点の個数は

$$S = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 与式より

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j}\right)i\right\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}j(j+1)\right\}$$

ここで

$$j(j+1) = \frac{1}{3}\{j(j+1)(j+2)-(j-1)j(j+1)\}$$

だから

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{3}\{j(j+1)(j+2)-(j-1)j(j+1)\}\right] \\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

ここで，上と同様にして考えると

$$k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

だから

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\} \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2)

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{24}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

ここで

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

だから

$$\begin{aligned} b_n &= 8\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\} \\ &= 8\left\{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\} \\ &= \frac{4n(n^2+6n+11)}{3(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【5】(1) $a_k = m$ とすると

$$m - \frac{1}{2} < \sqrt{k} < m + \frac{1}{2}$$
$$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 < k < \left(m + \frac{1}{2}\right)^2$$
$$m^2 - m + \frac{1}{4} < k < m^2 + m + \frac{1}{4} \quad \cdots ①$$

なので，これをみたす自然数 k は

$$k = m^2 - m + 1,\ m^2 - m + 2,\ \cdots,\ m^2 + m$$

の $2m$ 個である．よって

$$\begin{cases} a_k = 1 \text{ となるのは，} k = 1,\ 2 \text{ の } 2 \text{ 個} \\ a_k = 2 \text{ となるのは，} k = 3,\ 4,\ 5,\ 6 \text{ の } 4 \text{ 個} \\ a_k = 3 \text{ となるのは，} k = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \text{ の } 6 \text{ 個} \end{cases}$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = 2 \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 3 = 28 \qquad \text{(答)}$$

(2) ① の不等式を用いて a_{1998} を求める．m が自然数であることに注意して

$$m^2 - m + \frac{1}{4} < 1998 < m^2 + m + \frac{1}{4}$$
$$\iff \quad m^2 - m < 1998 \leqq m^2 + m$$
$$\iff \quad m(m-1) < 1998 \leqq m(m+1) \quad \cdots ②$$

ここで，数列 $\{m(m+1)\}$ $(m = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$ は増加列で

$$44 \cdot 45 = 1980,\ 45 \cdot 46 = 2070$$

であるから，② をみたす自然数 m は $m = 45$ に限るので

$$a_{1998} = 45$$

である．また，$a_k = 45$ となる最初の k は

$$k = 45^2 - 45 + 1 = 1981$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{1998} a_k = \sum_{m=1}^{44} (2m \cdot m) + (1998 - 1981 + 1) \times 45 = 59550 \qquad \text{(答)}$$

添削課題

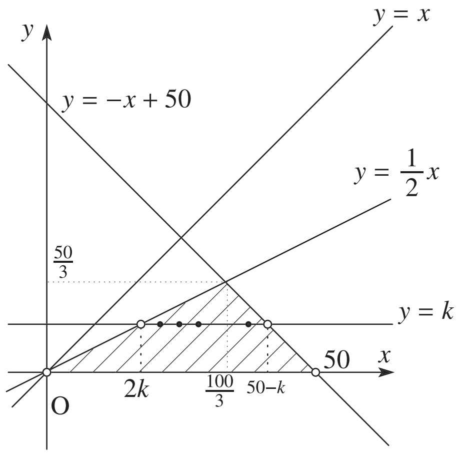
【1】x, y を整数として，3 辺の長さを $x-y$, x, $x+y$ ($x>y \geqq 0$ ⋯①) とおくと，3 辺の長さがいずれも 50 より小さいから，① の下で

$$0 < x-y \leqq x \leqq x+y < 50 \quad \cdots ②$$

また，3 角形の成立条件より

$$(x-y)+x > x+y \qquad \therefore \quad y < \frac{x}{2} \quad \cdots ③$$

図 1.1



① から③を同時にみたす領域は図 1.1 の斜線部分となる．ただし，境界は x 軸のみ含む (点 (0, 0), (50, 0) は除く)．この領域内の格子点の個数を求める．
直線 $y=k$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 16$) 上の格子点の個数 a_k は

$$a_k = 50-k-2k-1 = 49-3k$$

数列 $\{a_k\}$ は初項 49, 公差 -3 の等差数列なので, 格子点の個数は, $\dfrac{17(49+1)}{2} = 425$(個).
よって，求める 3 角形の個数は，425 個．　　(答)

問題

【1】(1) 漸化式の両辺に 2^n をかけると

$$2^n a_{n+1} = 2^{n-1} a_n + n$$

したがって，$2^{n-1} a_n = b_n$ $(n \geqq 1)$ とおくと

$$b_{n+1} = b_n + n \text{ かつ } b_1 = a_1$$

$$\therefore \quad b_1 = 2,\ b_{n+1} - b_n = n \quad (n \geqq 1)$$

よって $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 2 + \frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{n^2 - n + 4}{2} \end{aligned}$$

であり，この結果は $n = 1$ のときを含めて正しい．よって

$$a_n = \frac{b_n}{2^{n-1}} = \frac{n^2 - n + 4}{2^n} \quad (n \geqq 1) \qquad (\text{答})$$

(2) 漸化式の両辺を 3^n で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^{n-1}} + 1$$

よって，$\dfrac{a_n}{3^{n-1}} = b_n$ $(n \geqq 1)$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n + 1$$

これは

$$b_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(b_n - 3)$$

と変形できて，$\{b_n - 3\}$ は公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列より

$$b_n - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(b_1 - 3)$$

$b_1 = a_1 = 1$ だから

$$b_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって

$$a_n = 3^{n-1} b_n = 3^n - 2^n \qquad (\text{答})$$

(3) 漸化式は

$$a_{n+1} + 3(n+1) + 3 = 2(a_n + 3n + 3)$$

と変形できるから，$\{a_n + 3n + 3\}$ は公比 2 の等比数列である．よって

$$a_n + 3n + 3 = 2^{n-1}(a_1 + 6)$$

$a_1 = 2$ だから

$$\begin{aligned} a_n &= 8 \cdot 2^{n-1} - 3n - 3 \\ &= 2^{n+2} - 3n - 3 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【2】(1) 帰納的に $a_n \neq 0$ だから，与式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 1}{a_n} \qquad \therefore \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1} = 1$，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) = n \qquad \therefore \quad a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{(答)}$$

(2) 帰納的に $a_n > 0$ だから，与式の両辺について，2 を底とする対数をとると

$$\begin{aligned} \log_2 a_{n+1} = \log_2 8{a_n}^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad \log_2 a_{n+1} + 3 = 2(\log_2 a_n + 3) \end{aligned}$$

よって，数列 $\{\log_2 a_n + 3\}$ は初項 $\log_2 a_1 + 3 = 3$，公比 2 の等比数列であるから

$$\log_2 a_n + 3 = 3 \cdot 2^{n-1} \qquad \therefore \quad \log_2 a_n = 3(2^{n-1} - 1)$$

ゆえに

$$a_n = 2^{3(2^{n-1}-1)} = 8^{2^{n-1}-1} \qquad \text{(答)}$$

【3】$n+1$ 桁の自然数の各位の数の和が偶数になるのは

(I) 1 の位が 2 または 4 であり，上 n 桁の各位の数の和が偶数である．

(II) 1 の位が 1 または 3 または 5 であり，上 n 桁の各位の数の和が奇数である．

のいずれかであり，これらは排反であるから，$n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\begin{aligned} & p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1 - p_n) \\ \Longleftrightarrow \quad & p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ は

初項 $p_1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{10}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列

であるから，求める p_n は

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad p_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{2} \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

となる．　(答)

【4】まず，与えられた S_n の漸化式より，一般項 a_n の漸化式を作る．

$$S_{n+2}-8S_{n+1}+15S_n=n\ (n\geqq 1)\ \cdots①$$
$$S_{n+1}-8S_n+15S_{n-1}=n-1\ (n\geqq 2)\ \cdots②$$

$n\geqq 2$ のとき，① − ② より

$$(S_{n+2}-S_{n+1})-8(S_{n+1}-S_n)+15(S_n-S_{n-1})=1$$
$$\therefore\quad a_{n+2}-8a_{n+1}+15a_n=1\ (n\geqq 2)\ \cdots③$$

また，① で $n=1$ とおくと

$$(a_1+a_2+a_3)-8(a_1+a_2)+15a_1=1$$
$$\therefore\quad a_3=1\ (\because\quad a_1=a_2=0\ )$$

よって，③ は $n=1$ のときも成り立つ．したがって

$$a_{n+2}-8a_{n+1}+15a_n=1$$
$$\Longleftrightarrow a_{n+2}-(3+5)a_{n+1}+3\cdot 5a_n=1$$

であるから

$$\begin{cases} a_{n+2}-3a_{n+1}=5(a_{n+1}-3a_n)+1\ \cdots④ \\ a_{n+2}-5a_{n+1}=3(a_{n+1}-5a_n)+1\ \cdots⑤ \end{cases}$$

と変形できる．④ より，$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと

$$b_{n+1}=5b_n+1$$
$$b_{n+1}+\frac{1}{4}=5\left(b_n+\frac{1}{4}\right)$$
$$\therefore\quad b_n=5^{n-1}\left(b_1+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 5^{n-1}-\frac{1}{4}\ \cdots\cdots⑥\quad(\because\quad b_1=a_2-3a_1=0\ )$$

同様に，⑤ において，$c_n=a_{n+1}-5a_n$ とおくと

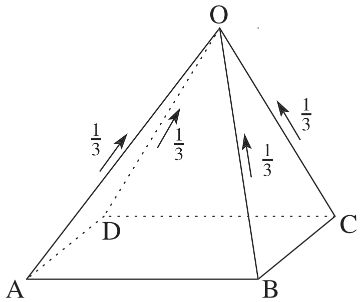
$$c_{n+1}=3c_n+1$$
$$c_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(c_n+\frac{1}{2}\right)$$
$$c_n=3^{n-1}\left(c_1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}\ \cdots\cdots⑦\quad(\because\quad c_1=a_2-5a_1=0\ )$$

⑥ − ⑦ より，$b_n=a_{n+1}-3a_n$，$c_n=a_{n+1}-5a_n$ に注意して

$$2a_n=\frac{1}{4}\cdot 5^{n-1}-\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}+\frac{1}{4}$$
$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{8}\cdot 5^{n-1}-\frac{1}{4}\cdot 3^{n-1}+\frac{1}{8}\qquad(答)$$

【5】題意の規則より，ある時点でPがOにあるとき，その1秒後に，PはA，B，C，Dの各頂点に確率 $\dfrac{1}{4}$ で移動する．また，ある時点でPがA，B，C，Dにあるとき，その1秒後に，どの頂点からも，確率 $\dfrac{1}{3}$ でOに移動する．

図 23.1



いま，n 秒後にPがOにある確率を p_n とおく．すると，$n+1$ 秒後にPがOにあるためには，n 秒後にPはA，B，C，Dのいずれかの頂点にある必要があり，その確率は

$$1-p_n$$

このもとで，各頂点から確率 $\dfrac{1}{3}$ でOに移動する．したがって

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$$
$$\therefore\quad p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{4}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列である．また，$p_1=0$ より

$$p_1-\frac{1}{4}=0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\qquad\therefore\quad p_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

したがって，求める確率は

$$p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\qquad(答)$$

添削課題

【1】(1) 与式より

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3} &= (2+\sqrt{3})^{n+1} \\ &= (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n \\ &= (2+\sqrt{3})(a_n+b_n\sqrt{3}) \\ &= (2a_n+3b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから，有理数部分と無理数部分で係数を比較して

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+3b_n & \cdots ① \\ b_{n+1}=a_n+2b_n & \cdots ② \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$a_n+b_n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n \cdots ③$$

また，① − ② × $\sqrt{3}$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1}-b_{n+1}\sqrt{3} &= (2-\sqrt{3})a_n+(3-2\sqrt{3})b_n \\ &= (2-\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3}) \end{aligned}$$

よって，数列 $\{a_n-b_n\sqrt{3}\}$ は初項 $a_1-b_1\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$，公比 $2-\sqrt{3}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_n-b_n\sqrt{3} &= (2-\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})^{n-1} \\ &= (2-\sqrt{3})^n \cdots ④ \end{aligned}$$

(③ + ④) ÷ 2 より

$$a_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2} \qquad \text{(答)}$$

また，③ − ④ より

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}b_n &= (2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n \\ \therefore \quad b_n &= \frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

M2JS/M2J

高２選抜東大数学

高２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	