本科 2 期 11 月度

解答

Z会東大進学教室

中２選抜東大・医学部数学

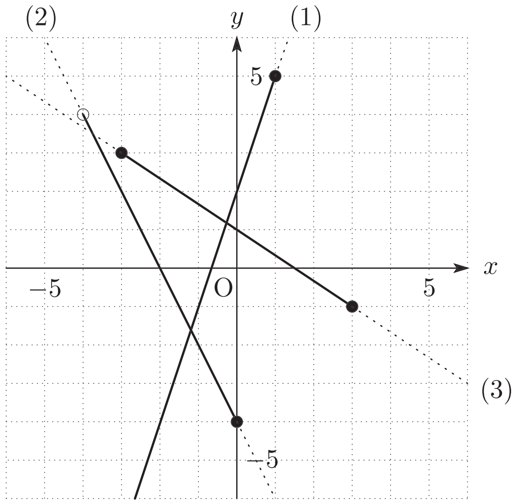
中２数学

中２東大数学

２１章　２乗に比例する関数（１）

問題

【1】



また，グラフより，値域，最大値，最小値は次の通り．

(1) 値域は $\boldsymbol{y \leqq 5}$

最大値は $\boldsymbol{5\ (x = 1}$ **のとき)**，最小値はなし

(2) 値域は $\boldsymbol{-4 \leqq y < 4}$

最大値はなし，最小値は $\boldsymbol{-4\ (x = 0}$ **のとき)**

(3) 値域は $\boldsymbol{-1 \leqq y \leqq 3}$

最大値は $\boldsymbol{3\ (x = -3}$ **のとき)**

最小値は $\boldsymbol{-1\ (x = 3}$ **のとき)**

【2】(1) もう一方の直角をはさむ辺の長さは $\dfrac{3}{2}x\mathrm{cm}$ と表せるので，

$$y = \frac{1}{2} \times x \times \frac{3}{2}x = \boldsymbol{\frac{3}{4}x^2}$$

(2)

$x(\mathrm{cm})$	1	2	3	4	5	6
$y(\mathrm{cm}^2)$	$\boldsymbol{\frac{3}{4}}$	**3**	$\boldsymbol{\frac{27}{4}}$	**12**	$\boldsymbol{\frac{75}{4}}$	**27**

(3) x の値が 3 倍になるとき，y の値は **9** 倍

y の値が 100 分の 1 になるときとは，x の値が $\boldsymbol{\dfrac{1}{10}}$ になったときである．

(4) $\boldsymbol{y}$ **は** $\boldsymbol{x^2}$ **に比例する**．比例定数は $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

【3】(1) $y = \dfrac{1}{2} \times x \times 6$ より，$y = 3x$

よって，$\boldsymbol{y}$ **は** $\boldsymbol{x}$ **に比例する．**

(2) 1 辺が $x$cm の正方形の面積は $x^2\text{cm}^2$ より，

$$y = x^2$$

よって，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x^2}$ に比例する．

(3) 上底が $\dfrac{1}{2}x$cm，下底が $2x$cm より，

$$y = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}x + 2x\right) \times x \quad \text{より，} y = \frac{5}{4}x^2$$

よって，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x^2}$ に比例する．

(4) 高さは $2x$cm より，

$$y = \frac{1}{3} \times \pi x^2 \times 2x \quad \text{より，} y = \frac{2}{3}\pi x^3$$

よって，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x^3}$ に比例する．

(5) $y = \pi x^2 \times 4$ 　より，$y = 4\pi x^2$

よって，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x^2}$ に比例する．

以上より，y が x^2 に比例するものは，**(2), (3), (5)**

【4】まず，x と y の対応表を作り，グラフ上の点をとる．

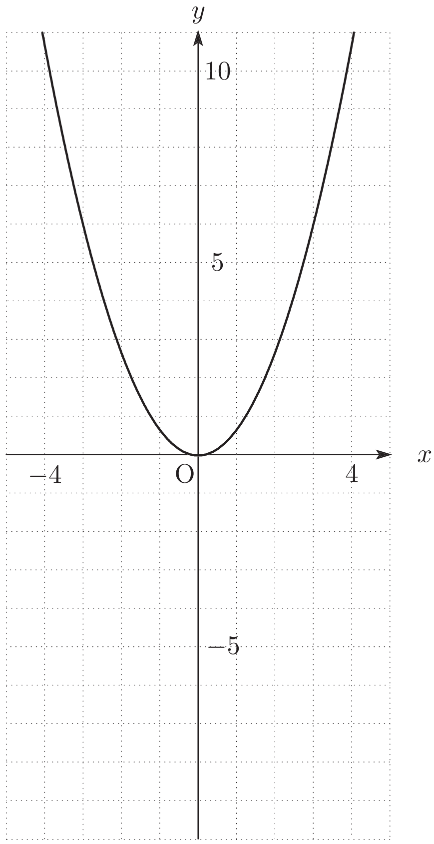
(1) $y = \dfrac{2}{3}x^2$

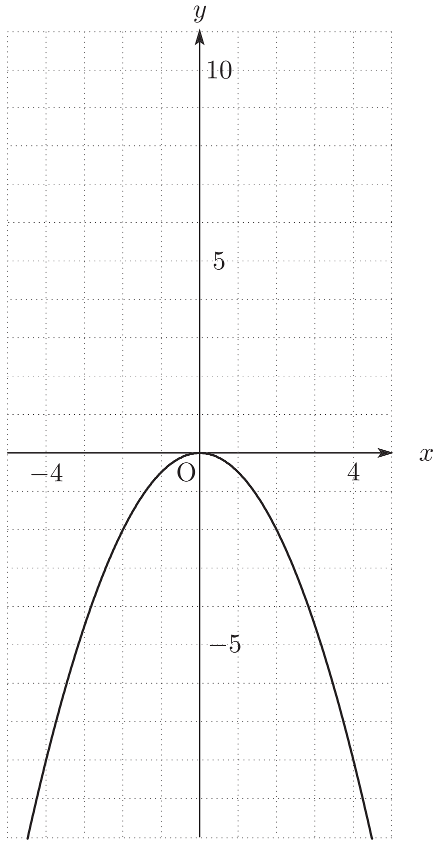
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	6

(2) $y = -\dfrac{1}{2}x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$

以上より，それぞれグラフは次の通り．





【5】(1) ① $y = ax^2$ に，$x = 2$, $y = 16$ を代入すると，

$$16 = a \times 2^2$$

よって，$a = 4$ より，$\boldsymbol{y = 4x^2}$

② $y = 4x^2$ に，$x = -1$ を代入して，

$$y = 4 \times (-1)^2 = \mathbf{4}$$

(2) $y = ax^2$ に，$x = 6$, $y = -12$ を代入すると，

$-12 = a \times 6^2$ より，$a = -\dfrac{1}{3}$

$y = -\dfrac{1}{3}x^2$ に，$x = -2$ を代入して，

$$y = -\frac{1}{3} \times (-2)^2 = \boldsymbol{-\frac{4}{3}}$$

(3) $y = ax^2$ に，$x = -2\sqrt{2}$, $y = -1$ を代入すると，

$-1 = a \times (-2\sqrt{2})^2$ より，$a = -\dfrac{1}{8}$

$y = -\dfrac{1}{8}x^2$ に，$x = 2\sqrt{5}$ を代入して，

$$y = -\frac{4 \times 5}{8} = \boldsymbol{-\frac{5}{2}}$$

(4) $y=ax^2$ とおくと，$x=-3$ のとき，$y=4$ より，$4=9a$．$a=\dfrac{4}{9}$．よって $y=\dfrac{4}{9}x^2$

$y=16$ のとき，$16=\dfrac{4}{9}x^2$．$x^2=36$．よって，$\boldsymbol{x=\pm 6}$

(5) $y=ax^2$ とおくと，$x=2$ のとき，$y=-3$ より，$-3=4a$．$a=-\dfrac{3}{4}$．よって

$y=-\dfrac{3}{4}x^2$

$y=-6$ のとき，$-6=-\dfrac{3}{4}x^2$．$x^2=8$．よって，$\boldsymbol{x=\pm 2\sqrt{2}}$

(6) $y=ax^2$ とおくと，$x=3$ のとき，$y=11$ より，$11=9a$．$a=\dfrac{11}{9}$

よって，$y=\dfrac{11}{9}x^2$．このグラフと x 軸について対称なグラフは $y=-\dfrac{11}{9}x^2$

$x=-3$ のとき，$y=-\dfrac{11}{9}\times(-3)^2=\boldsymbol{-11}$

＜別解＞

$y=ax^2$ のグラフは y 軸について対称なので，$x=-3$ のときの y と $x=3$ のときの y とは一致する．よって，もとのグラフ上の点と x 軸に対称な点をさらに y 軸について対称な点（すなわち原点対称である点）に移せばよい．よってそのときの y の値は $y=\boldsymbol{-11}$

【6】(1) $\boldsymbol{y \geqq 0}$　最小値　**0** ($\boldsymbol{x=0}$ **のとき**)，　最大値　**なし**

(2) $\boldsymbol{y \leqq 0}$　最小値　**なし**，　最大値　**0** ($\boldsymbol{x=0}$ **のとき**)

(3) $\boldsymbol{10 \leqq y \leqq 40}$　最小値　**10** ($\boldsymbol{x=2}$ **のとき**)，　最大値　**40** ($\boldsymbol{x=4}$ **のとき**)

(4) $\boldsymbol{-27 \leqq y \leqq -3}$　最小値　$\boldsymbol{-27}$ ($\boldsymbol{x=-3}$ **のとき**)，　最大値　$\boldsymbol{-3}$ ($\boldsymbol{x=-1}$ **のとき**)

(5) $\boldsymbol{0 \leqq y \leqq 4}$　最小値　**0** ($\boldsymbol{x=0}$ **のとき**)，　最大値　**4** ($\boldsymbol{x=-2}$ **のとき**)

(6) $\boldsymbol{-18 \leqq y \leqq 0}$　最小値　$\boldsymbol{-18}$ ($\boldsymbol{x=6}$ **のとき**)，　最大値　**0** ($\boldsymbol{x=0}$ **のとき**)

(7) $\boldsymbol{y \geqq 0}$　最小値　**0** ($\boldsymbol{x=0}$ **のとき**)，　最大値　**なし**

(8) $\boldsymbol{y \leqq 0}$　最小値　**なし**，　最大値　**0** ($\boldsymbol{x=0}$ **のとき**)

(9) $\boldsymbol{0 \leqq y < 24}$　最小値　**0** ($\boldsymbol{x=0}$ **のとき**)，　最大値　**なし**

(10) $\boldsymbol{-\dfrac{16}{3} < y < -\dfrac{1}{3}}$　最小値　**なし**，　最大値　**なし**

【7】(1) $x=-6$ のとき，$y=-\dfrac{1}{2}\times(-6)^2=-18$

$x=2$ のとき，$y=-\dfrac{1}{2}\times 2^2=-2$

したがって，求める変化の割合は，

$$\frac{-2-(-18)}{2-(-6)}=\frac{16}{8}=\boldsymbol{2}$$

(2) $x=0$ のとき，$y=0$

$x=4$ のとき，$y=-\dfrac{1}{2}\times 4^2=-8$

したがって，求める変化の割合は，

$$\frac{-8-0}{4-0}=\boldsymbol{-2}$$

(3) $x=-3$ のとき，$y=-\dfrac{1}{2}\times(-3)^2=-\dfrac{9}{2}$

$x=3$ のとき，$y=-\dfrac{1}{2}\times 3^2=-\dfrac{9}{2}$

したがって，求める変化の割合は，

$$\frac{-\dfrac{9}{2}-\left(-\dfrac{9}{2}\right)}{3-(-3)}=\mathbf{0}$$

【8】(1) $y=ax^2$ に，$x=2$, $y=-12$ を代入すると，

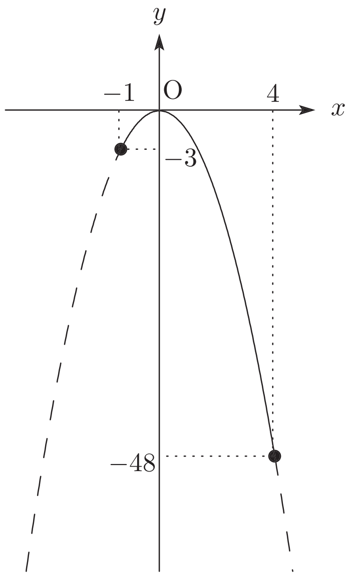
$-12=a\times 2^2$ より，$\boldsymbol{a=-3}$

(2) $x=4$ のとき，$y=-3\times 4^2=-48$

$x=-1$ のとき，$y=-3\times(-1)^2=-3$

グラフは右の図のようになるから，

値域は $\boldsymbol{-48\leqq y\leqq 0}$



(3) (2) より，変化の割合は，

$$\frac{-48-(-3)}{4-(-1)}=\frac{-45}{5}=\mathbf{-9}$$

【9】(1) $y=ax^2$ において，

$x=2$ のとき，$y=a\times 2^2=4a$

$x=3$ のとき，$y=a\times 3^2=9a$

よって，y の増加量に着目して，

$9a-4a=20$ より，$\boldsymbol{a=4}$

(2) $y=ax^2$ において，

$x=-4$ のとき，$y=a\times(-4)^2=16a$

$x=1$ のとき，$y=a\times 1^2=a$

よって，変化の割合に着目して，

$$\frac{a-16a}{1-(-4)}=6$$

ゆえに，$-3a=6$ より，$\boldsymbol{a=-2}$

(3) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ において，

$x=a$ のとき，$y=\dfrac{1}{2}a^2$

$x=a+2$ のとき，$y=\dfrac{1}{2}(a+2)^2$

よって，変化の割合に着目して，

$$\frac{\dfrac{1}{2}(a+2)^2-\dfrac{1}{2}a^2}{(a+2)-a}=11$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a^2+4a+4)-\frac{1}{2}a^2&=22\\2a+2&=22\\\boldsymbol{a}&\boldsymbol{=10}\end{aligned}$$

【10】(1) $x=p$ のとき，$y=ap+b$，$x=q$ のとき，$y=aq+b$

よって，y の増加量は，

$(aq+b)-(ap+b)=\boldsymbol{a(q-p)}$

したがって，変化の割合は，

$$\frac{(aq+b)-(ap+b)}{q-p}=\frac{a(q-p)}{q-p}=\boldsymbol{a}$$

(2) $x=p$ のとき，$y=ap^2$，$x=q$ のとき，$y=aq^2$

よって，y の増加量は，

$aq^2-ap^2=\boldsymbol{a(q^2-p^2)}$

したがって，変化の割合は，

$$\frac{aq^2-ap^2}{q-p}=\frac{a(q-p)(q+p)}{q-p}=\boldsymbol{a(p+q)}$$

【11】(1) 値域の最大値が正であるから，$a>0$

よって，グラフは右の図のようになる．

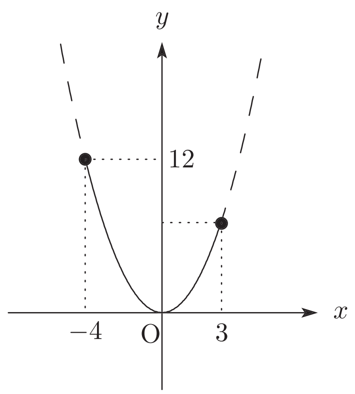
このとき，定義域に $x=0$ が含まれるから，

$x=0$ で，y の値は最小値 0 となる．

すなわち，$\boldsymbol{b=0}$

また，y の値が最大となるのは，グラフより，$x=-4$ のときだから，$12=a\times(-4)^2$

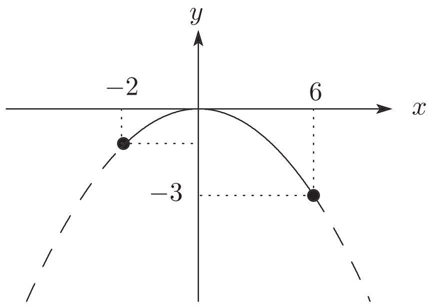
よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{4}}$



(2) 値域の最大値が 0 だから，グラフは右の図のようになる．
y の値が最小となるのは，グラフより，$x=6$ のときだから，

$$-3 = a \times 6^2$$

よって，$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{12}}$



(3) $y=-2x+3$ において，
$y=-1$ のとき，

$$-1 = -2x+3 \text{ より，} x = 2$$

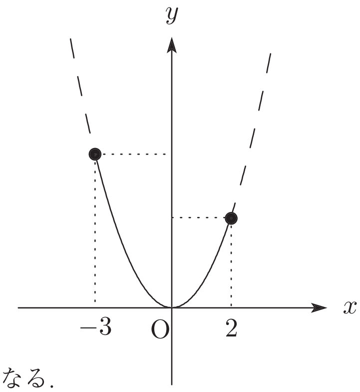
$y=9$ のとき，

$$9 = -2x+3 \text{ より，} x = -3$$

よって，定義域は，

$$-3 \leqq x \leqq 2 \quad \cdots\cdots(\text{ア})$$

とわかる．



このとき，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフは右の図のようになる．
グラフより，y の値は $x=-3$ のときに最大値をとり，$x=0$ のときに最小値をとるので，
$x=-3$ のとき，

$$y = \frac{1}{2} \times (-3)^2 = \frac{9}{2}$$

よって，値域は，

$$0 \leqq y \leqq \frac{9}{2} \quad \cdots\cdots(\text{イ})$$

(ア)，(イ) より，

① $\boldsymbol{-3}$　　② $\boldsymbol{2}$　　③ $\boldsymbol{0}$　　④ $\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

【12】(1) $y=5x^2$ で $y=125$ とすればよいから，$125=5x^2$．
よって，$x^2=25$ 　$\therefore\ x=\pm 5$
ただし，$x \geqq 0$ より，$x=5$
5 秒後（答）

(2) 最後の 1 秒間，すなわち 4 秒後から 5 秒後にボールが落ちる距離は，

$$125 - 5 \times 4^2 = 45(\text{m})$$

最初の 1 秒間に落ちる距離は

$$5 \times 1^2 - 0 = 5(\text{m})$$

よって，$45 \div 5 =$ **9 倍**

(3) t 秒後の落下距離は $5t^2$(m)．$(t+1)$ 秒後までの落下距離は $5(t+1)^2$(m)．この差が 30m なので,

$$5(t+1)^2-5t^2=30$$
$$10t+5=30$$
$$\boldsymbol{t=\frac{5}{2}(=2.5)}$$

(4) (3) より t 秒後から $(t+1)$ 秒後までの落下距離は $10t+5$．$(t-1)$ 秒後から t 秒後までの落下距離は $5t^2-5(t-1)^2=10t-5$

よって，与えられた条件は,

$$\frac{4}{3}(10t-5)=10t+5$$
$$40t-20=30t+15$$
$$10t=35$$
$$t=\frac{7}{2}=3.5$$

よって，このときの落下距離は $y=5\times\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{245}{4}$(m)

このときの地上からの高さは $125-\frac{245}{4}=\boldsymbol{\frac{255}{4}(=63.75)}$(m)

（ほぼ半分の高さにあたる）

【13】(1) P の y 座標は $\frac{2}{3}t$．これが Q の y 座標と一致する．Q の x 座標を s とおくと，Q の y 座標は $3s$ となる．これと $\frac{2}{3}t$ が等しいから,

$$3s=\frac{2}{3}t$$
$$s=\frac{2}{9}t$$

よって，線分 PQ の長さは

$$\mathrm{PQ}=t-\frac{2}{9}t=\frac{7}{9}t$$

台形 OQPR の面積は,

$$S=\left(\frac{7}{9}t+t\right)\times\frac{2}{3}t\div2=\frac{16}{9}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}t^2=\frac{16}{27}t^2$$

よって，$t=3$ のときが最小で，$S=\frac{16}{27}\times3^2=\frac{16}{3}$

$t=12$ のときが最大で，$S=\frac{16}{27}\times12^2=\frac{256}{3}$

変域は $\boldsymbol{\frac{16}{3}\leqq S\leqq\frac{256}{3}}$

(2) S の最大値は $\dfrac{256}{3}$ より，求める点 P の x 座標を t とおくと，

$$\frac{16}{27}t^2 = \frac{128}{3}$$

$$t = 6\sqrt{2}(3 \leqq t \leqq 12 \text{ より})$$

このときの P の座標は $\left(t,\ \dfrac{2}{3}t\right) = \left(\mathbf{6\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}}\right)$

(3) $t=3$ から $t=12$ までの変化の割合は $\left(\dfrac{256}{3} - \dfrac{16}{3}\right) \div (12-3) = \dfrac{80}{9}$

条件を満たすときの点 P の x 座標を p とおくと，

$$\left(\frac{16}{27}p^2 - \frac{16}{27} \times 3^2\right) \div (p-3) = \frac{1}{2} \times \frac{80}{9}$$

$$\frac{16}{27} \times \frac{(p^2-9)}{p-3} = \frac{40}{9}$$

$$\frac{(p+3)(p-3)}{p-3} = \frac{40}{9} \times \frac{27}{16}$$

$$p+3 = \frac{15}{2}$$

$$p = \frac{9}{2}$$

よって，このときの P の座標は $\left(p,\ \dfrac{2}{3}p\right) = \left(\mathbf{\dfrac{9}{2},\ 3}\right)$

添削課題

【1】(1) $y=ax^2$ のグラフが下に開くのは，$a<0$ の場合であるから，

②，④，⑤

(2) $y=ax^2$ のグラフの開き方は，a の絶対値が小さくなるほど大きくなるから，

⑥

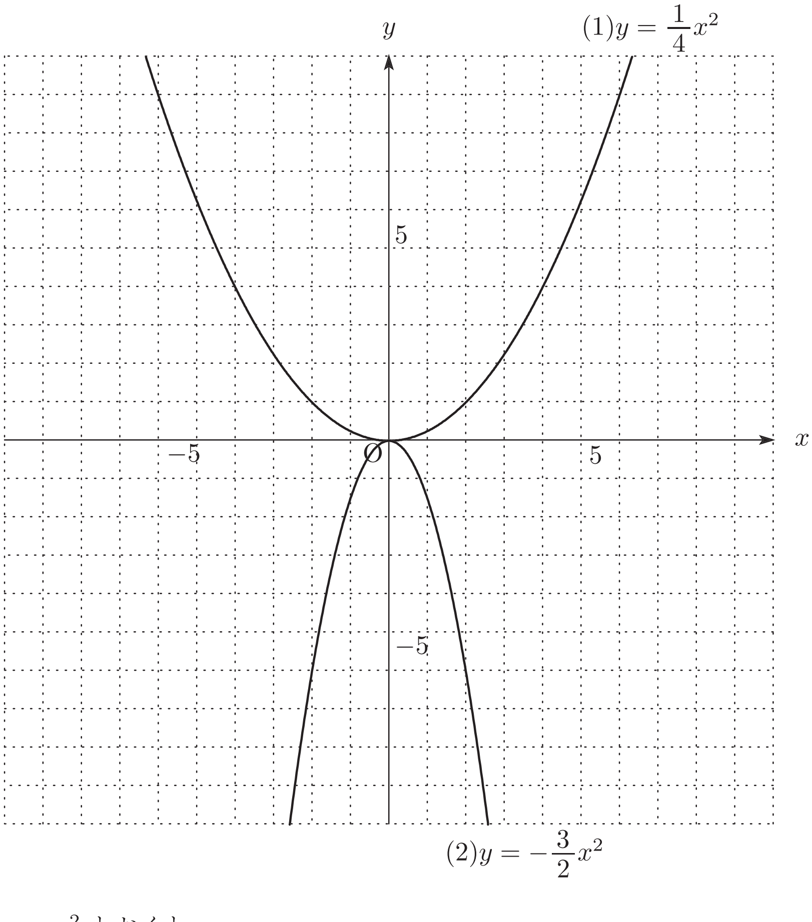
(3) $y=ax^2$ と $y=-ax^2$ のグラフが x 軸に関して対称となるから，

③，⑤

(4) $x<0$ の範囲で x の値が増加すると y の値が減少するのは，$a>0$ のときだから，

①，③，⑥

【2】それぞれ x と y の対応表をつくり，グラフ上の点をとってからかくようにするとよい．



【3】(1) ① $y=ax^2$ とおくと，

$$12=a\times(-4)^2$$

$$a=\frac{3}{4}$$

よって，$\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x^2}$

② $y = \dfrac{3}{4}x^2$ に $x = 6$ を代入して，

$$y = \frac{3}{4} \times 6^2$$

$$\therefore \boldsymbol{y = 27}$$

③ $y = \dfrac{3}{4}x^2$ に $y = 6$ を代入して，

$$6 = \frac{3}{4}x^2$$

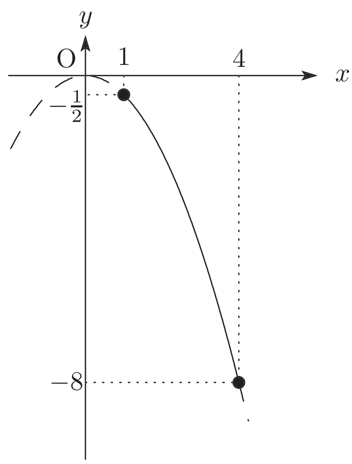
$$\therefore x^2 = 8$$

$$\boldsymbol{x = \pm 2\sqrt{2}}$$

(2) ① $x = 1$ のとき，$y = -\dfrac{1}{2} \times 1^2 = -\dfrac{1}{2}$

$x = 4$ のとき，$y = -\dfrac{1}{2} \times 4^2 = -8$

$$\begin{cases} \text{値域は，} \boldsymbol{-8 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}} \\ \text{最大値は，} \boldsymbol{-\frac{1}{2}\ (x = 1\ \text{のとき})} \\ \text{最小値は，} \boldsymbol{-8\ (x = 4\ \text{のとき})} \end{cases}$$

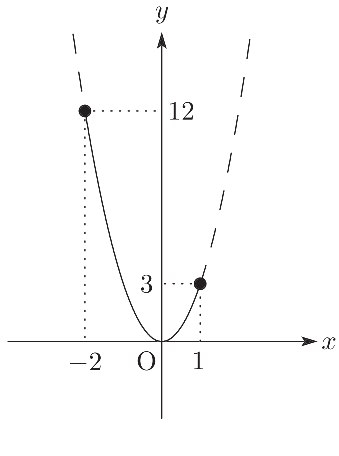


② グラフは右のようになる．

$x = -2$ のとき，$y = 3 \times (-2)^2 = 12$

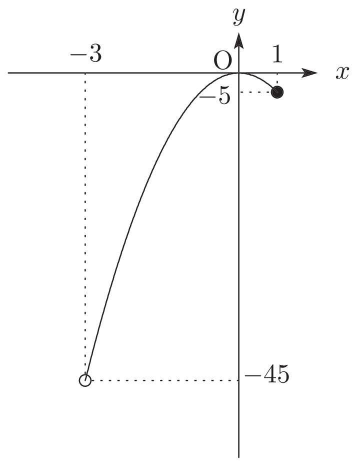
より，

$$\begin{cases} \text{値域は，} \boldsymbol{0 \leqq y \leqq 12} \\ \text{最大値は，} \boldsymbol{12\ (x = -2\ \text{のとき})} \\ \text{最小値は，} \boldsymbol{0\ (x = 0\ \text{のとき})} \end{cases}$$



③ グラフは右のようになるから，

$$\begin{cases} \text{値域は，} \boldsymbol{-45 < y \leqq 0} \\ \text{最大値は，} \boldsymbol{0\ (x=0\ \text{のとき})} \\ \text{最小値は，なし} \end{cases}$$



【4】(1) y が負の値をとることから，$a<0$.

よって，グラフは右のようになる.

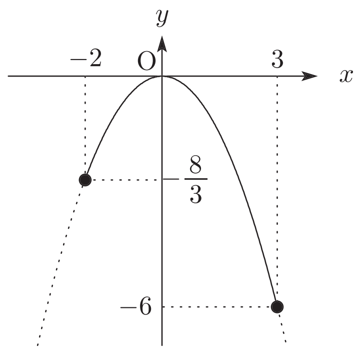
定義域に $x=0$ が含まれるから，$y=ax^2$ の最大値は 0 である.

よって，$\boldsymbol{b=0}$

$x=3$ のとき，y の値は最小となるから，

$$-6=a\times 3^2$$

$$a=\boldsymbol{-\frac{2}{3}}$$



(2) x の値が -4 から 2 まで増加するときの変化の割合に着目して，

$x=-4$ のとき $y=a\times(-4)^2=16a$

$x=2$ のとき $y=a\times 2^2=4a$

よって

$$\frac{4a-16a}{2-(-4)}=-2a=5$$

$$a=\boldsymbol{-\frac{5}{2}}$$

【5】(1) OA の式 $y=\dfrac{5}{2}x$

AB の式 $y=\dfrac{1}{2}x+8$

OC の式 $y=\dfrac{1}{2}x$

となる.

$0 \leqq t \leqq 4$ のとき

$\mathrm{PQ}=\dfrac{5}{2}t-\dfrac{1}{2}t=2t$ より

$S=\triangle\,\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\times 2t\times t=t^2$

$4 \leqq t \leqq 6$ のとき

$\mathrm{PQ}=\left(\dfrac{1}{2}t+8\right)-\dfrac{1}{2}t=8$ より

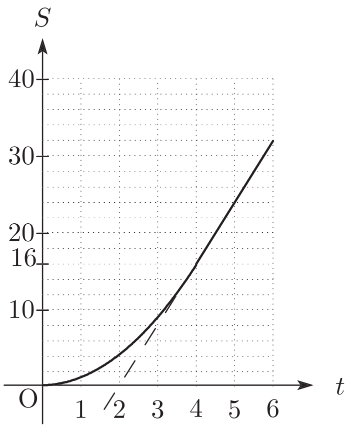
$S=(\text{四角形 OAPQ})=\dfrac{1}{2}\times 8\times 4+8\times(t-4)=8t-16$

以上より,

$0 \leqq t \leqq 4$ のとき, $\boldsymbol{S=t^2}$

$4 \leqq t \leqq 6$ のとき, $\boldsymbol{S=8t-16}$

(2) (1) より, 次のようになる.



小テスト

【1】(1) 解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=\frac{3}{2},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

したがって，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{13}{4}}$$

(2) $$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}$$

よって，$\alpha-\beta=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$

したがって，

$$\begin{aligned}\alpha^2-\beta^2&=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\\&=\frac{3}{2}\times\left(\pm\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\\&=\pm\boldsymbol{\frac{3\sqrt{17}}{4}}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}&=\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}\\&=\frac{-\left(\pm\frac{\sqrt{17}}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}\\&=\pm\boldsymbol{\sqrt{17}}\end{aligned}$$

問題

【1】(1) ① $y=-3x+b$ とおく．

$5=-6+b$ より，$b=11$

よって，$\boldsymbol{y=-3x+11}$

② $y=ax-2$ とおく．

$4=-3a-2$ より，$a=-2$

よって，$\boldsymbol{y=-2x-2}$

③ $y=ax+b$ とおく．

$$\begin{cases} 8=-5a+b \\ -1=a+b \end{cases}$$

$9=-6a$ より，$a=-\dfrac{3}{2}$

$b=-a-1=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}}$

(2) ① $y=ax^2$ とおく．

$8=a\times2^2$ より，$a=2$

よって，$\boldsymbol{y=2x^2}$

② $y=ax^2$ とおく．

$6=a\times(-3)^2$ より，$a=\dfrac{2}{3}$

よって，$\boldsymbol{y=\dfrac{2}{3}x^2}$

③ $y=ax^2$ とおく．

$-4=a\times(-4)^2$ より，$a=-\dfrac{1}{4}$

よって，$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x^2}$

【2】(1) $\begin{cases} y=-x+4 \quad \cdots\cdots① \\ y=2x-11 \quad \cdots\cdots② \end{cases}$

①，② より，y を消去して，

$$\begin{aligned} 2x-11&=-x+4 \\ 3x&=15 \\ x&=5 \end{aligned}$$

$x=5$ を ① に代入して，$y=-5+4=-1$

よって，交点の座標は，**(5，−1)**

(2) $\begin{cases} 5x+4y-2=0 & \cdots\cdots① \\ x-2y+8=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

② より，$x=2y-8 \quad \cdots\cdots②'$

これを ① に代入して，

$$5(2y-8)+4y-2=0$$
$$14y=42$$
$$y=3$$

これを ②′ に代入して，$x=2\times 3-8=-2$

よって，交点の座標は，$\mathbf{(-2,\ 3)}$

【3】(1) $\begin{cases} y=x^2 & \cdots\cdots㋐ \\ y=2x+15 & \cdots\cdots㋑ \end{cases}$

㋐ − ㋑ より，$x^2-2x-15=0$

$(x-5)(x+3)=0$ より，$x=5,\ -3$

$x=5$ のとき，㋐ より，$y=5^2=25$

$x=-3$ のとき，㋐ より，$y=(-3)^2=9$

よって，共有点の座標は，$\mathbf{(5,\ 25),\ (-3,\ 9)}$

(2) $\begin{cases} y=-x^2 & \cdots\cdots㋐ \\ y=-3x+2 & \cdots\cdots㋑ \end{cases}$

㋑ − ㋐ より，$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$ より，$x=1,\ 2$

$x=1$ のとき，㋐ より，$y=-1^2=-1$

$x=2$ のとき，㋐ より，$y=-2^2=-4$

よって，共有点の座標は，$\mathbf{(1,\ -1),\ (2,\ -4)}$

(3) $\begin{cases} y=3x^2 & \cdots\cdots㋐ \\ y=8x-4 & \cdots\cdots㋑ \end{cases}$

㋐ − ㋑ より，

$$3x^2-8x+4=0$$
$$(3x-2)(x-2)=0$$
$$x=\frac{2}{3},\ 2$$

$x=\dfrac{2}{3}$ のとき，㋐ より，$y=3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}$

$x=2$ のとき，㋐ より，$y=3\times 2^2=12$

よって，共有点の座標は，$\mathbf{\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right),\ (2,\ 12)}$

(4) $\begin{cases} y = -4x^2 \ \cdots\cdots ㋐ \\ y = -4x + 1 \ \cdots\cdots ㋑ \end{cases}$

㋑ − ㋐ より，$4x^2 - 4x + 1 = 0$

$(2x-1)^2 = 0$ より，$x = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{1}{2}$ のとき，㋐ より，$y = -4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = -1$

よって，共有点の座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)}$

【4】(1) $x = 4$ を $y = 8x - 12$ に代入して，

$$\begin{aligned} y &= 8 \times 4 - 12 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$x = 4$，$y = 20$ を $y = ax^2$ に代入して，

$$20 = a \times 4^2$$

$$\boldsymbol{a = \dfrac{5}{4}}$$

(2) $\begin{cases} y = \dfrac{5}{4}x^2 \ \cdots\cdots ① \\ y = 8x - 12 \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

① − ② より，

$$\frac{5}{4}x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$5x^2 - 32x + 48 = 0$$

$$(5x-12)(x-4) = 0$$

$$x = \frac{12}{5},\ 4$$

$x = \dfrac{12}{5}$ を ② に代入して，$y = 8 \times \dfrac{12}{5} - 12 = \dfrac{36}{5}$

よって，点 B の座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{36}{5}\right)}$

【5】(1) $x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して,

$$y=a\times(-2)^2=4a$$

$x=6$ を $y=ax^2$ に代入して,

$$y=a\times 6^2=36a$$

よって, 交点は $(-2,\ 4a)$, $(6,\ 36a)$ だから,

$$\begin{cases} 4a=-2m+6 & \cdots\cdots ① \\ 36a=6m+6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② より, $m=6a-1 \ \cdots\cdots ②'$

これを ① に代入して,

$$4a=-2(6a-1)+6$$
$$16a=8$$
$$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$$

これを $②'$ に代入して, $m=6\times\dfrac{1}{2}-1=\mathbf{2}$

(2) 直線 $y=-x+1$ と放物線 $y=2x^2$ の交点を求めると,

$$\begin{cases} y=-x+1 & \cdots\cdots ① \\ y=2x^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② − ① より,

$$2x^2+x-1=0$$
$$(2x-1)(x+1)=0$$
$$x=\frac{1}{2},\ -1$$

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき, ① より, $y=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$

$x=-1$ のとき, ① より, $y=-(-1)+1=2$

よって, 交点の座標は, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $(-1,\ 2)$

$y=ax+5$ にそれぞれの座標を代入して,

$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき, $\dfrac{1}{2}=a\times\dfrac{1}{2}+5$ より, $a=-9$

$(-1,\ 2)$ のとき, $2=a\times(-1)+5$ より, $a=3$

よって, a の値は $\mathbf{-9}$ または $\mathbf{3}$

(3) A，B の y 座標を a で表すと，

$x=a$ を $y=x^2$ に代入して，

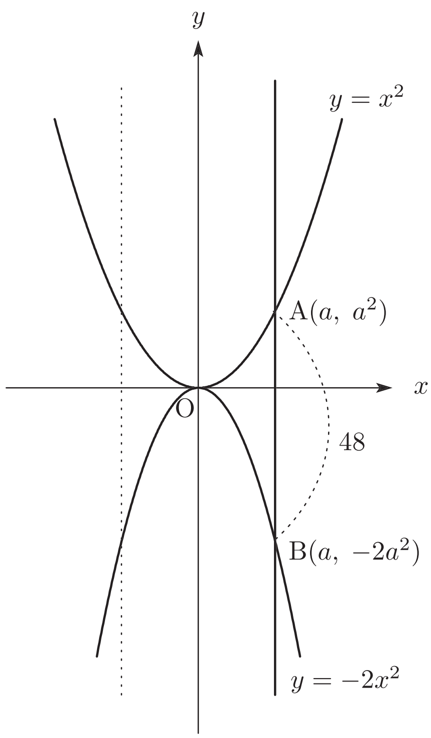
$y=a^2$ より，A$(a,\ a^2)$

$x=a$ を $y=-2x^2$ に代入して，

$y=-2a^2$ より，B$(a,\ -2a^2)$

線分 AB の長さに着目して，

$$\mathrm{AB}=a^2-(-2a^2)=48$$
$$3a^2=48$$
$$a^2=16$$
$$\boldsymbol{a=\pm 4}$$



【6】(1) $\begin{cases} y=x^2 \ \cdots\cdots ① \\ y=-5x+6 \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

① − ② より，

$$x^2+5x-6=0$$
$$(x+6)(x-1)=0$$
$$x=-6,\ 1$$

$x=-6$ のとき，① より，$y=(-6)^2=36$

$x=1$ のとき，① より，$y=1^2=1$

以上より，共有点の座標は $\mathbf{(-6,\ 36),\ (1,\ 1)}$

(2) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2 \ \cdots\cdots ① \\ y=2x-7 \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

① − ② より，$\dfrac{1}{2}x^2-2x+7=0$

判別式 $D=(-2)^2-4\times\dfrac{1}{2}\times 7=-10<0$

より，共有点はない．

(3) $\begin{cases} y = -\dfrac{4}{5}x^2 \ \cdots\cdots ① \\ y = 4x + 5 \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

② − ① より，

$$\frac{4}{5}x^2 + 4x + 5 = 0$$
$$4x^2 + 20x + 25 = 0$$
$$(2x+5)^2 = 0$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

$x = -\dfrac{5}{2}$ を ② に代入して，

$$y = 4 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = -5$$

以上より，共有点の座標は $\left(\boldsymbol{-\dfrac{5}{2},\ -5}\right)$

【7】 (1) $\begin{cases} y = ax^2 \ \cdots\cdots ① \\ y = 3x - 2 \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

① − ② より，$ax^2 - 3x + 2 = 0$

判別式を D とすると，$D = 0$ より，

$$D = (-3)^2 - 4 \times a \times 2 = 0$$
$$9 - 8a = 0$$
$$\boldsymbol{a = \frac{9}{8}}$$

(2) $\begin{cases} y = \dfrac{9}{8}x^2 \ \cdots\cdots ①' \\ y = 3x - 2 \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

①′ − ② より，

$$\frac{9}{8}x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$
$$(3x-4)^2 = 0$$
$$x = \frac{4}{3}$$

$x = \dfrac{4}{3}$ を ② に代入して，$y = 3 \times \dfrac{4}{3} - 2 = 2$

よって，交点の座標は，$\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{3},\ 2}\right)$

【8】 $\begin{cases} y = -2x^2 \ \cdots\cdots ① \\ y = x + a \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

② − ① より，$2x^2 + x + a = 0$

判別式 $D = 1^2 - 4 \times 2 \times a = 1 - 8a \ \cdots\cdots ③$

(1) $D < 0$ となるから，③ より，
$1 - 8a < 0$

$$\boldsymbol{a > \frac{1}{8}}$$

(2) $D = 0$ となるから，③ より，
$1 - 8a = 0$

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{8}}$$

よって，

$$2x^2 + x + \frac{1}{8} = 0$$

$$16x^2 + 8x + 1 = 0$$

$$(4x+1)^2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

これを ① に代入して，$y = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}$

よって，交点の座標は，$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right)}$

【9】(1) $\begin{cases} y = x^2 & \cdots ① \\ y = -2x + 24 & \cdots ② \end{cases}$

①－② より，

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x+6)(x-4) = 0$$

$$x = -6,\ 4$$

① より，$y = 36,\ 16$

よって，**A(−6, 36)，B(4, 16)**

(2) $x = -3$ を $y = x^2$ に代入すると，$y = (-3)^2 = 9$

よって，P$(-3,\ 9)$

また，$x = -3$ を $y = -2x + 24$ に代入すると，$y = (-2) \times (-3) + 24 = 30$

よって，Q$(-3,\ 30)$

以上より，PQ$= 30 - 9 =$ **21**

(3)

$$\triangle \mathrm{APQ} = \frac{1}{2} \times \mathrm{PQ} \times (\mathrm{AP}\ \text{の}\ x\ \text{座標の差})$$

$$= \frac{1}{2} \times 21 \times 3$$

$$= \boldsymbol{\frac{63}{2}}$$

【10】(1) $y=\dfrac{1}{3}x^2$ に $x=-6,\ 3$ を代入して，$y=12,\ 3$ $\quad\therefore$ A$(-6,\ 12)$，B$(3,\ 3)$

AB の傾きは $\dfrac{12-3}{-6-3}=-1$

よって，$y=-x+b$ とおいて，B$(3,\ 3)$ を通ることより，$b=6$

$\therefore$ AB の式 $\quad y=-x+6$

$$\triangle\,\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times(y\ 切片)\times(\mathrm{AB}\ の\ x\ 座標の差)$$
$$=\frac{1}{2}\times 6\times 9=\mathbf{27}$$

(2) 直線 AB の y 切片を C とおくと，OC の中点 M$(0,\ 3)$ を取れば

$$\triangle\,\mathrm{MAB}=\frac{1}{2}\times\triangle\,\mathrm{OAB}$$

よって，$\triangle$ MAB と $\triangle$ PAB との面積が等しくなるような P の位置を見つければよい.

つまり，M を通り，AB に平行な直線と放物線との交点を求めればよい.

$$\therefore\ \begin{cases} y=-x+3 \\ y=\dfrac{1}{3}x^2 \end{cases}$$

連立して,

$$\frac{1}{3}x^2+x-3=0$$
$$x^2+3x-9=0$$
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+36}}{2}=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$$

このとき y は $y=-x+3$ より

$$y=-\left(\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}\right)+3=\frac{9\mp3\sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore\ \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2},\ \frac{9\mp3\sqrt{5}}{2}}\right)\quad (複号同順)$$

【11】点 A から x 軸に下ろした垂線の足を A$'$，点 B から x 軸に下ろした垂線の足を B$'$ とする．

点 B の x 座標を t とすると，

　$\mathrm{A}(-2,\ 4a)$ ，$\mathrm{B}(t,\ at^2)$

とかける．さらに

　$\triangle \mathrm{PBB'} \backsim \triangle \mathrm{PAA'}$

であるから，相似な図形の対応する辺の比は等しいことより，

$$\begin{aligned}
\mathrm{PB'} : \mathrm{PA'} &= \mathrm{BB'} : \mathrm{AA'} \\
(6-t) : \{6-(-2)\} &= at^2 : 4a \\
8at^2 &= 4a(6-t) \\
2t^2 &= 6-t \\
2t^2+t-6 &= 0 \\
(t+2)(2t-3) &= 0 \\
\therefore t &= -2,\ \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

よって，点 B の x 座標は，$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

＜別解＞

【14】の結果を利用して，次のように解いてもよい．

B の x 座標を t とする．

B から x 軸に下ろした垂線の足を B$'$ とすると，

　$\mathrm{B'}(t,\ 0)$

このとき，$\{6-(-2)\}\times(6-t) = 6^2 - \dfrac{0}{a}$

よって，$t = \dfrac{3}{2}$

つまり，B の x 座標は，$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

【12】(1) $y = ax^2$ とおくと A$(-2,\ 6)$ を通ることから，$a = \dfrac{3}{2}$　$\therefore\ y = \dfrac{3}{2}x^2$

直線を $y = 3x + b$ とおくと A$(-2,\ 6)$ を通るので，$b = 12$　$\therefore\ y = 3x + 12$

連立して，

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}x^2 - 3x - 12 &= 0 \\
x^2 - 2x - 8 &= 0 \\
(x+2)(x-4) &= 0 \\
x &= -2,\ 4
\end{aligned}$$

よって B の x 座標は 4，$y = 24$　$\therefore$ B$(4,\ 24)$

$$\begin{aligned}
\triangle \mathrm{OAB} &= \frac{1}{2}\times(y\ \text{切片})\times(\mathrm{AB}\ \text{の}\ x\ \text{座標の差}) \\
&= \frac{1}{2}\times 12\times\{4-(-2)\} = \mathbf{36}
\end{aligned}$$

(2) P を通り y 軸に平行な直線が AB と交わる点を Q とする．

$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{3}{2}p^2\right)$ とおくと，$\mathrm{Q}(p,\ 3p+12)$ となる．

$$\therefore\ \mathrm{PQ} = (3p+12) - \frac{3}{2}p^2 = -\frac{3}{2}p^2 + 3p + 12$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PAB} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{PQ} \times (\mathrm{AB}\text{ の } x \text{ 座標の差}) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}p^2 + 3p + 12\right) \times 6 = \frac{45}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-9p^2 + 18p + 72 &= 45 \\ -p^2 + 2p + 3 &= 0 \\ p^2 - 2p - 3 &= 0 \\ (p+1)(p-3) &= 0 \\ \therefore\ p &= -1,\ 3\end{aligned}$$

このとき，$\dfrac{3}{2}p^2 = \dfrac{3}{2},\ \dfrac{27}{2}$

よって，$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{-1,\ \frac{3}{2}}\right)$**，**$\left(\boldsymbol{3,\ \frac{27}{2}}\right)$

＜別解＞

直線 AB と y 軸との交点を C とすると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times h \times (\mathrm{AB}\text{ の } x \text{ 座標の差}) &= \frac{45}{2} \\ \frac{1}{2} \times h \times 6 &= \frac{45}{2} \\ h &= \frac{45}{6} = \frac{15}{2}\end{aligned}$$

よって C から O に向かって $\dfrac{15}{2}$ 離れた点を $\mathrm{D}\left(0,\ 12 - \dfrac{15}{2}\right) = \left(0,\ \dfrac{9}{2}\right)$ とすると，$\triangle$DAB の面積が $\dfrac{45}{2}$．これと $\triangle$PAB の面積が等しくなればよいので，D を通る傾き 3 の直線と放物線の交点を求めればよい．

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x^2 \\ y = 3x + \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

連立して，

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} &= 0 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x+1)(x-3) &= 0 \\ x &= -1,\ 3\end{aligned}$$

このとき，$y = \dfrac{3}{2},\ \dfrac{27}{2}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\boldsymbol{-1,\ \frac{3}{2}}\right),\ \left(\boldsymbol{3,\ \frac{27}{2}}\right)$

【13】 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2 \ \cdots\cdots ① \\ y=3x+m \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

① − ② より，$\dfrac{1}{2}x^2-3x-m=0$

判別式を D とすると，

$$D=(-3)^2-4\times\frac{1}{2}\times(-m)=9+2m$$

①，② の交点が 2 つになるのは，$D>0$ のときだから，

$9+2m>0$ より，$m>-\dfrac{9}{2}$

①，② の交点が 1 つになるのは，$D=0$ のときだから，

$9+2m=0$ より，$m=-\dfrac{9}{2}$

①，② に交点がないのは，$D<0$ のときだから，

$9+2m<0$ より，$m<-\dfrac{9}{2}$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{m>-\dfrac{9}{2}} \textbf{のとき，交点は 2 つ} \\ \\ \boldsymbol{m=-\dfrac{9}{2}} \textbf{のとき，交点は 1 つ} \\ \\ \boldsymbol{m<-\dfrac{9}{2}} \textbf{のとき，交点はなし} \end{cases}$$

【14】 (1) 傾きが m で，点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通るから，

$$y=m(x-a)+b$$

よって，$\boldsymbol{y=mx-am+b}$

(2) p，q は，放物線 $y=kx^2$ と (1) で求めた直線との交点の x 座標だから，

$\begin{cases} y=kx^2 \ \cdots\cdots ① \\ y=mx-am+b \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

① − ② より，y を消去して，

$$\boldsymbol{kx^2-mx+am-b=0}$$

(3) $p+q=-\dfrac{-m}{k}=\boldsymbol{\dfrac{m}{k}}$

$pq=\boldsymbol{\dfrac{am-b}{k}}$

(4)
$$\begin{aligned}(p-a)(q-a)&=pq-(p+q)a+a^2\\&=\frac{am-b}{k}-\frac{m}{k}a+a^2\\&=\boldsymbol{a^2-\frac{b}{k}}\end{aligned}$$

【15】(1) $x=-2,\ 4$ より，A，B の y 座標は a を用いて $y=4a,\ 16a$ と表せる．

AB の傾きが $\dfrac{3}{2}$ より，

$$\frac{16a-4a}{4-(-2)}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{4}$$

$\therefore$ A$(-2,\ 3)$，B$(4,\ 12)$

AB の式は，$y=\dfrac{3}{2}x+b$ とおける．A を通ることより，$b=3-\dfrac{3}{2}\times(-2)=6$

$\therefore$ AB : $y=\dfrac{3}{2}x+6$

$y=0$ のとき，$x=-4$ より，C$\boldsymbol{(-4,\ 0)}$

(2) AC，QB を底辺とみると，△ACR と△BQR の高さは等しい．

$\therefore$ △ACR=△BQR のとき，AC=BQ

AC の x 座標の差が $(-2)-(-4)=2$ であるので，Q の x 座標は $4-2=2$

$\therefore$ P の x 座標は 2．よって，$y=3$

以上より，P$\boldsymbol{(2,\ 3)}$

(3) P の x 座標を t とおくと P$\left(t,\ \dfrac{3}{4}t^2\right)$，Q$\left(t,\ \dfrac{3}{2}t+6\right)$

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{PAB}&=\frac{1}{2}\times \mathrm{QP}\times(\mathrm{AB}\ \text{の}\ x\ \text{座標の差})\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}t+6-\frac{3}{4}t^2\right)\times\{4-(-2)\}\\&=3\times\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{2}t+6\right)\\&=-\frac{9}{4}(t^2-2t-8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{CQR}&=\frac{1}{2}\times \mathrm{CR}\times \mathrm{QR}\\&=\frac{1}{2}\times(t+4)\times\left(\frac{3}{2}t+6\right)\\&=\frac{3}{4}(t+4)^2\end{aligned}$$

△PAB=△CQR より，

$$-\frac{9}{4}(t^2-2t-8)=\frac{3}{4}(t+4)^2$$

$$-3t^2+6t+24=t^2+8t+16$$

$$4t^2+2t-8=0$$

$$2t^2+t-4=0$$

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1+32}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$$

$-2<-\dfrac{7}{4}=\dfrac{-1-6}{4}<\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}$，$\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}<\dfrac{-1+6}{4}=\dfrac{5}{4}<4$

より，条件をみたす．

$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}}$$

添削課題

【1】(1) $\begin{cases} y=-4x^2 & \cdots ① \\ y=4x+1 & \cdots ② \end{cases}$

② − ① より

$$4x^2+4x+1=0$$
$$(2x+1)^2=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$x=-\dfrac{1}{2}$ を①に代入して，$y=-4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=-1$

よって，交点は 1 つある．座標は，$\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{2},\ -1}\right)$

(2) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{4}x^2 & \cdots ① \\ y=x-5 & \cdots ② \end{cases}$

① − ② より，$\dfrac{1}{4}x^2-x+5=0$

判別式 $D=(-1)^2-4\times\dfrac{1}{4}\times 5=-4<0$ より，**交点はなし．**

(3) $\begin{cases} y=x^2 & \cdots ① \\ y=-\dfrac{1}{3}x+8 & \cdots ② \end{cases}$

① − ② より，

$$x^2+\frac{1}{3}x-8=0$$
$$3x^2+x-24=0$$
$$(3x-8)(x+3)=0$$
$$x=\frac{8}{3},\ -3$$

$x=\dfrac{8}{3}$ を①を代入して，$y=\left(\dfrac{8}{3}\right)^2=\dfrac{64}{9}$

$x=-3$ を①に代入して，$y=(-3)^2=9$

よって，交点は 2 つある．座標は，$\left(\boldsymbol{\dfrac{8}{3},\ \dfrac{64}{9}}\right)$**，**$\boldsymbol{(-3,\ 9)}$

【2】(1) $\begin{cases} y=-x^2 & \cdots ① \\ y=x-12 & \cdots ② \end{cases}$

② − ① より，

$$x^2+x-12=0$$
$$(x+4)(x-3)=0$$
$$x=-4,\ 3$$

$x=-4$ を②に代入して，$y=-4-12=-16$

$x=3$ を②に代入して，$y=3-12=-9$

よって，$\boldsymbol{(-4,\ -16),\ (3,\ -9)}$

(2) $\begin{cases} y=-x^2 & \cdots ① \\ y=x+a & \cdots ②' \end{cases}$

②′ − ① より，$x^2+x+a=0$ ⋯③

判別式 $D=1^2-4\times 1\times a$

$=1-4a$

$D>0$ となるから，

$1-4a>0$

$\boldsymbol{a<\frac{1}{4}}$

(3) (2) で，$D=1-4a=0$ となればよいから，$\boldsymbol{a=\frac{1}{4}}$

③に，$a=\frac{1}{4}$ を代入して，

$x^2+x+\frac{1}{4}=0$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$

$x=-\frac{1}{2}$

$x=-\frac{1}{2}$ を①に代入して，$y=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$

よって，$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)}$

【3】(1) $x=-8$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して，

$y=\frac{1}{2}\times(-8)^2=32$

よって，点 A の座標は $(-8,\ 32)$

これを，$y=mx+8$ に代入して，

$32=-8m+8$

$\boldsymbol{m=-3}$

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 & \cdots ① \\ y=-3x+8 & \cdots ② \end{cases}$

① − ② より，

$\frac{1}{2}x^2+3x-8=0$

$x^2+6x-16=0$

$(x+8)(x-2)=0$

$x=-8,\ 2$

これより，点 B の x 座標は 2 だから，①より，

$y=\frac{1}{2}\times 2^2=2$　　　**B(2, 2)**

(2) $\begin{cases} y = x + 9 & \cdots ① \\ y = \dfrac{2}{3}x^2 & \cdots ② \end{cases}$

② − ① より,

$$\frac{2}{3}x^2 - x - 9 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 27 = 0$$

$$(2x - 9)(x + 3) = 0$$

$$x = \frac{9}{2},\ -3$$

$x = \dfrac{9}{2}$ のとき，①より，$y = \dfrac{9}{2} + 9 = \dfrac{27}{2}$

これを $y = ax - 6$ に代入して,

$$\frac{27}{2} = \frac{9}{2}a - 6$$

$$a = \frac{13}{3}$$

$x = -3$ のとき，①より，$y = -3 + 9 = 6$

これを $y = ax - 6$ に代入して,

$6 = -3a - 6 \qquad a = -4$

よって，a の値は，$\boldsymbol{\dfrac{13}{3}}$ または $\boldsymbol{-4}$

【4】(1) A の y 座標は $y = \dfrac{3}{2} \times (-2) + 4 = 1 \qquad \therefore\ \ \mathrm{A}(-2,\ 1)$

これを $y = ax^2$ が通るので $\boldsymbol{a = \dfrac{1}{4}}$

(2) $y = \dfrac{1}{4}x^2$ と $y = \dfrac{3}{2}x + 4$ を連立して，$\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x - 4 = 0$

$\therefore\ \ x^2 - 6x - 16 = 0 \qquad (x + 2)(x - 8) = 0 \qquad x = -2,\ 8$

よって，B の x 座標は 8 なので，$y = \dfrac{3}{2} \cdot 8 + 4 = 16$

よって，**B(8，16)**

(3) P の y 座標は $\dfrac{1}{4}t^2$ ，Q の y 座標は $\dfrac{3}{2}t + 4$

よって，$\mathrm{PQ} = \dfrac{3}{2}t + 4 - \dfrac{1}{4}t^2 = \boldsymbol{-\dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{3}{2}t + 4}$

(4) $\triangle\mathrm{APB} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{PQ} \times (\mathrm{AB}$ の x 座標の差$)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4\right) \times 10 = 25$$

$\therefore\ \ -\dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{3}{2}t + 4 = 5$

$$t^2 - 6t + 4 = 0$$

$$t = 3 \pm \sqrt{5}$$

$-2 < t < 8$ より，これは条件を満たすので，$\boldsymbol{t = 3 \pm \sqrt{5}}$

(5) P を通り ℓ と平行な直線を引いたとき，P 以外の放物線との交点を R とする．

① 上の P と R の間にある点 P$'$ を考えると，P$'$ は線分 PR に関して A，B と反対側にあるので，線分 AB と P$'$ との距離の方が線分 AB と P との距離より大きくなる．

$\therefore \triangle \mathrm{ABP'} > \triangle \mathrm{ABP}$

したがって△ ABP の面積を最大にするには，このような P$'$ が存在しないようにしなければならない．

よって P と R が一致．つまり P において ℓ と平行な直線が P における接線になればよい．したがって，このときの直線の式 $y = \dfrac{3}{2}x + b$ を $y = \dfrac{1}{4}x^2$ と連立して重解をもつようにすればよい．

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{2}x + b$$

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - b = 0$$

$$x^2 - 6x - 4b = 0$$

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - (-4b) = 0$$

$$b = -\frac{9}{4}$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$$

このときの接点は，$\dfrac{1}{4}x^2 = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{4}$ より，

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 3$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(\mathbf{3},\ \mathbf{\frac{9}{4}}\right)$$

小テスト

【1】(1) $\boldsymbol{y = \frac{1}{12}}$

(2) $\boldsymbol{x = \pm 3}$

(3) $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x^2}$

(4) $\boldsymbol{y = -8}$

(5) $\boldsymbol{x = \pm 2}$

(6) $\boldsymbol{8}$

(7) $\boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$

(8) $\boldsymbol{6 \leqq y \leqq 54}$

(9) $\boldsymbol{-8 \leqq y \leqq 0}$

(10) $\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}}$

２３章　２乗に比例する関数（３）

問題

【1】(1) $y=ax^2$ に $(-2,\ 6)$ を代入して，

$$6=a\times(-2)^2$$

よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{2}}$

(2) 直線 ℓ の傾きを b として，$y=bx+4$ に $(-2,\ 6)$ を代入して，

$6=-2b+4$　より，$b=-1$

よって，ℓ；$y=-x+4$

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x^2 & \cdots\cdots ① \\ y=-x+4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② より，

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x^2+x-4&=0 \\ 3x^2+2x-8&=0 \\ (3x-4)(x+2)&=0 \\ x&=\frac{4}{3},\ -2 \end{aligned}$$

$x=\dfrac{4}{3}$ を ② に代入して，$y=-\dfrac{4}{3}+4=\dfrac{8}{3}$

$\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{3},\ \dfrac{8}{3}}\right)$

(3) $\triangle$ OAB$=4\times\left\{\dfrac{4}{3}-(-2)\right\}\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{20}{3}}$

(4) 線分 AB の中点を M とすると，M の座標は，

$$\left(\frac{(-2)+\frac{4}{3}}{2},\ \frac{6+\frac{8}{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{13}{3}\right)$$

OM の傾きは，$-\dfrac{\frac{13}{3}}{\frac{1}{3}}=-13$

よって，$\boldsymbol{y=-13x}$

【2】(1) 変化の割合が 1 より，直線 AB の方程式を $y=x+b$ とおくことができる．

A の y 座標は $y=x^2$ に $x=-3$ を代入して，$y=9$ $\therefore$ A$(-3,\ 9)$

$y=x+b$ に代入して，$b=12$

よって AB の式は $y=x+12$

これと $y=x^2$ を連立して，

$$\begin{aligned} x^2-x-12&=0 \\ (x+3)(x-4)&=0 \\ x&=-3,\ 4 \end{aligned}$$

A$(-3,\ 9)$ より，B の x 座標が 4．$\therefore$ B$(4,\ 16)$

直線 AB の y 切片を C とすると，OC$=12$

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{OAB} &= \frac{1}{2}\times\mathrm{OC}\times(\mathrm{AB}\text{ の }x\text{ 座標の差}) \\ &= \frac{1}{2}\times 12\times\{4-(-3)\} = \mathbf{42} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP} &= \mathrm{AP}:\mathrm{BP} \\ &= (\mathrm{AP}\text{ の }x\text{ 座標の差}):(\mathrm{BP}\text{ の }x\text{ 座標の差}) \\ &= 5:2 \end{aligned}$$

$\therefore$ $(\mathrm{AP}$ の x 座標の差$)=\dfrac{5}{7}\times\{4-(-3)\}=5$

$\therefore$ P の x 座標 $=-3+5=2$

P は $y=x+12$ 上にあるので，$y=14$ $\therefore$ P$\mathbf{(2,\ 14)}$

(3) Q の y 座標は $y=x^2=2^2=4$

$\therefore$ $\mathrm{PQ}=14-4=10$

$\triangle$OAB と $\triangle$QAB は，AB を共通の底辺とみることができるので，その面積比は高さの比となる．

O，Q から AB に下ろした垂線の足をそれぞれ D，E とすると，

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{QAB} &= \mathrm{OD}:\mathrm{QE} \\ &= \mathrm{OC}:\mathrm{QP}\ (\because\ \triangle\mathrm{ODC}\backsim\triangle\mathrm{QEP}) \\ &= 12:10 \\ &= \mathbf{6:5} \end{aligned}$$

【3】(1) $y=\dfrac{6-0}{0-(-12)}x+6$

整理して，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+6}$

(2) 原点 O を通り直線 ② と平行な直線を ③ とすると，直線 ③ は，$y=\dfrac{1}{2}x$ と表せるから，

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{4}x^2 \ \cdots\cdots ① \\ y=\dfrac{1}{2}x \ \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

① − ③ より，

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x=0$$

$$\frac{1}{4}x(x-2)=0$$

よって，$x=0,\ 2$

$x=2$ を ③ に代入して，

$$y=\frac{1}{2}\times 2=1$$

よって，P**(2，1)**

【4】(1) 角の 2 等分線の性質より

$$\mathrm{CD}:\mathrm{DB}=\mathrm{OC}:\mathrm{OB}=4:5$$

∴ D の x 座標 =CD= $3\times\dfrac{4}{4+5}=\dfrac{4}{3}$

つまり，$\mathrm{D}\left(\dfrac{4}{3},\ 4\right)$

OD の傾き $4\div\dfrac{4}{3}=3$ より，$\boldsymbol{y=3x}$

(2) $\mathrm{M}\left(\dfrac{\frac{4}{3}+3}{2},\ 4\right)=\left(\boldsymbol{\dfrac{13}{6},\ 4}\right)$

(3) OG：GM=2：1 となるので OG= $\dfrac{2}{3}$OM.

よって M の座標をそれぞれ $\dfrac{2}{3}$ 倍すればよい.

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{13}{6},\ \frac{2}{3}\times 4\right)=\left(\boldsymbol{\frac{13}{9},\ \frac{8}{3}}\right)$$

【5】(1) A(−2, 8)，B(3, 18)

傾きは，$\dfrac{18-8}{3-(-2)}=2$

$y=2x+b$ とおいて，(−2, 8) を通ることより，$b=12$

∴ $\boldsymbol{y=2x+12}$

(2) $\mathrm{M}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2},\ 13}\right)$

(3) OG= $\dfrac{2}{3}$OM より

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\times 13\right)=\left(\boldsymbol{\frac{1}{3},\ \frac{26}{3}}\right)$$

(4) OG$=\dfrac{2}{3}$OM より

$\triangle$ AGO $=\dfrac{2}{3}\triangle$ OAM

$\triangle$ OAM $=\dfrac{1}{2}\times$ (AB の y 切片) $\times$ (A，M の x 座標の差)

$=\dfrac{1}{2}\times 12\times\left\{\dfrac{1}{2}-(-2)\right\}$

$=15$

$\therefore$ $\triangle$ AGO$=\dfrac{2}{3}\times 15=\mathbf{10}$

【6】(1) $y=2x^2$ と $y=ax-2$ を連立して，

$2x^2=ax-2$

$2x^2-ax+2=0$

この判別式 D が 0 となればよい．

$D=a^2-4\times 2\times 2=0$

$\therefore a^2=16$

$\therefore \boldsymbol{a=\pm 4}$

(2) $a=4$ のとき，$y=2x^2$ と $y=4x-2$ を連立して，

$2x^2-4x+2=0$

$2(x-1)^2=0$

$\therefore x=1,\ y=2$

$a=-4$ のとき，同様にして，

$2x^2+4x+2=0$

$2(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1,\ y=2$

以上より，$a=4$ のとき $\mathbf{(1,\ 2)}$，$a=-4$ のとき $\mathbf{(-1,\ 2)}$

【7】求める直線を $y=x+b$ とおく．

$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ と連立すると

$-\dfrac{1}{2}x^2=x+b$

$\therefore \dfrac{1}{2}x^2+x+b=0$

この判別式が 0 となればよい．

$D=1-4\times\dfrac{1}{2}\times b=0$

$\therefore b=\dfrac{1}{2}$

求める式は，$\boldsymbol{y=x+\dfrac{1}{2}}$

【8】(1) $(1,\ -3)$ を通るので，

$$-3 = a + b$$

$$\therefore \boldsymbol{b = -a - 3}$$

(2) 連立して，判別式 $D = 0$ になればよい．

$$x^2 = ax + b$$

$$x^2 - ax - b = 0$$

$$\therefore D = \boldsymbol{a^2 + 4b = 0}$$

(3) $b = -a - 3$ を $a^2 + 4b = 0$ に代入する．

$$a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$(a-6)(a+2) = 0$$

$$a = 6,\ -2$$

$a = 6$ のとき，$b = -9$

$a = -2$ のとき，$b = -1$

よって 2 つの接線の式は，$\boldsymbol{y = 6x - 9}$，$\boldsymbol{y = -2x - 1}$

【9】(1) $\mathrm{A}(-4,\ 4)$，$\mathrm{B}(6,\ 9)$ より，傾きは $\dfrac{9-4}{6-(-4)} = \dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{1}{2}x + b$ とおいて $(-4,\ 4)$ を通ることから $b = 6$

よって，$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}x + 6}$

(2) $y = \dfrac{1}{2}x + k$ とおく．$y = \dfrac{1}{4}x^2$ と連立して，

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - k = 0$$

$$x^2 - 2x - 4k = 0$$

これが重解をもつ条件は，判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 + 4k = 0$$

$$k = -\frac{1}{4}$$

よって，$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}}$

(3) P を通り AB に平行な直線が放物線と再び交わる点を Q とする．
放物線上の P,Q 間に点 R をとると，R は PQ について AB と反対側にあるので，
$\triangle$ APB< $\triangle$ ARB となる．よって$\triangle$ APB の面積を最大にするには P,Q が一致して R が存在しないようにしなければならない．このときの P は (2) の接線の接点である．
$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$ と $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を連立して，

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}&=0\\ \frac{1}{4}(x-1)^2&=0\\ \therefore\ x&=1\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$
P を通り，y 軸に平行な直線と直線 AB との交点を S とすると，$y=\dfrac{1}{2}x+6$ の x に 1 を代入して，

$$y=\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2}$$

よって，PS$=\dfrac{13}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{4}$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{APB}&=\frac{1}{2}\times\mathrm{PS}\times(\text{AB の }x\text{ 座標の差})\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{25}{4}\times10\\ &=\boldsymbol{\frac{125}{4}}\end{aligned}$$

【10】(1) $y=-2x^2$ に，$x=1$ を代入して，

$y=-2\times 1^2=-2$ より，

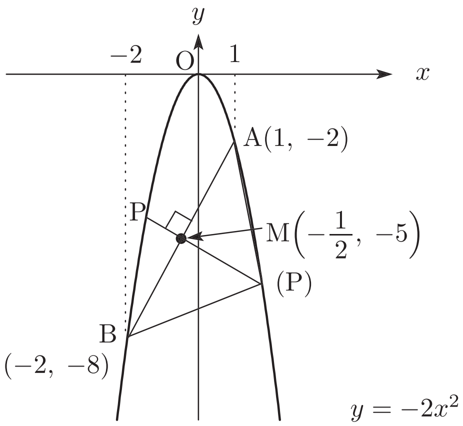
$$A(1,\ -2)$$

$y=-2x^2$ に，$x=-2$ を代入して，

$y=-2\times(-2)^2=-8$ より，

$$B(-2,\ -8)$$

PA=PB より，△ PAB は二等辺三角形だから，P は線分 AB の垂直二等分線上にある．



AB の中点を M とすると, M の座標は,

$$\left(\frac{1-2}{2},\ \frac{-2-8}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\ -5\right)$$

AB の傾きは，$\dfrac{-2-(-8)}{1-(-2)}=\dfrac{6}{3}=2$

よって，PM の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ だから，式は,

$$y=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-5$$

よって，$y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{21}{4}$

$$\begin{cases} y=-2x^2 & \cdots\cdots ① \\ y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{21}{4} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② − ① より，

$$2x^2-\frac{1}{2}x-\frac{21}{4}=0$$

$$8x^2-2x-21=0$$

$$(2x+3)(4x-7)=0$$

$$x=-\frac{3}{2},\ \frac{7}{4}$$

$x=-\dfrac{3}{2}$ を ① に代入して,

$$y=-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}$$

$x=\dfrac{7}{4}$ を ① に代入して,

$$y=-2\times\left(\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{49}{8}$$

よって，点 P は，$\boldsymbol{\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{9}{2}\right),\ \left(\frac{7}{4},\ -\frac{49}{8}\right)}$

(2) AP の式は，

$$y = \frac{-2+\frac{9}{2}}{1+\frac{3}{2}}(x-1)-2$$

整理して，$y = x - 3$

よって，BQ の式は，

$y = (x+2) - 8$ より，$y = x - 6$

$$\begin{cases} y = -2x^2 & \cdots\cdots ① \\ y = x - 6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② − ① より，

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$(2x-3)(x+2) = 0$$

$$x = \frac{3}{2},\ -2$$

$x = \frac{3}{2}$ を ② に代入して，

$$y = \frac{3}{2} - 6 = -\frac{9}{2}$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{9}{2}\right)$

AP//QB より，△ APB の底辺を AP とすると，台形 APBQ と△ APB は高さが等しいから，

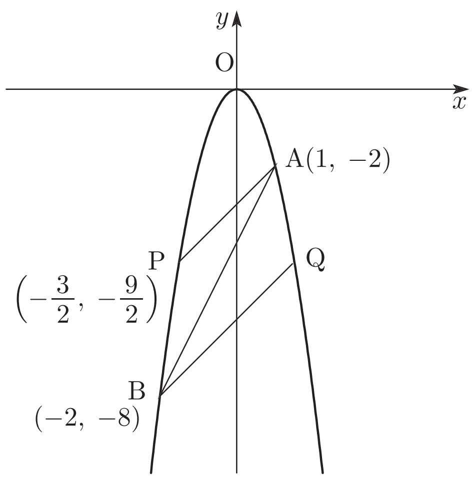
台形 APBQ : △ APB

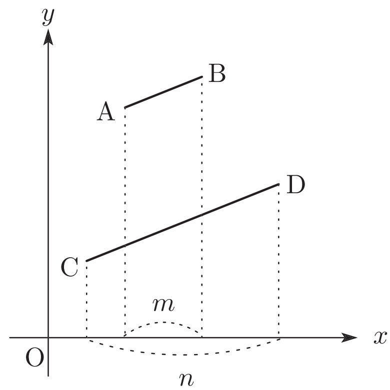
$=(\mathrm{AP}+\mathrm{QB}) : \mathrm{AP}$

$=\left\{\left(1+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}+2\right)\right\} : \left(1+\frac{3}{2}\right)$

$=6 : \frac{5}{2}$

=12 : 5





AB//CD のとき，

AB:CD= $m : n$

【11】(1) BC を底辺とすると，$\triangle$ OBC$=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$

OB を底辺とすると，$\triangle$ OBC$=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{4}$

$\therefore\ \dfrac{a^2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$\boldsymbol{a=\sqrt{2}}\quad(\because\quad a>0)$

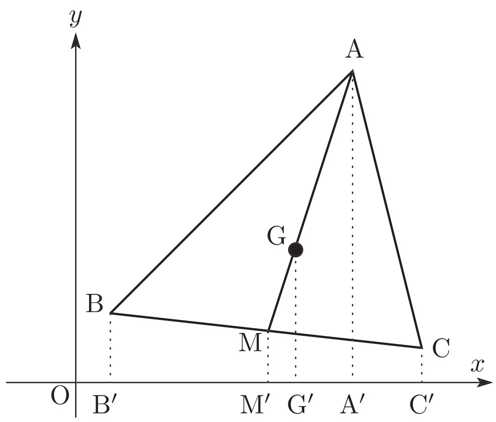
(2) ℓ と AB の交点を D とすると，AD：DB=OA：OB=1：$\sqrt{2}$

$\therefore \mathrm{AD}=1\times\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$

$\therefore \mathrm{D}(1,\ \sqrt{2}-1)$

よって，$\boldsymbol{y=(\sqrt{2}-1)x}$

【12】図のように A，B，C および BC の中点 M，重心 G から x 軸に下ろした垂線と，x 軸との交点をそれぞれ A′，B′，C′，M′，G′ とする．



M の座標は $\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$

AG：GM$=2:1$ および

MM′ //GG′ //AA′ より，

$\mathrm{A'G'}:\mathrm{G'M'}=2:1$

G$(p,\ q)$ とおくと，

$$(x_1-p):\left(p-\frac{x_2+x_3}{2}\right)=2:1$$

$$2\left(p-\frac{x_2+x_3}{2}\right)=x_1-p$$

$$2p-(x_2+x_3)=x_1-p$$

$$3p=x_1+x_2+x_3$$

$$p=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

同様にして，$q=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ であることも示せる．

よって，G$\boldsymbol{\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)}$ （証明終）

【13】(1) A$\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，B$(2,\ -8)$ より，

直線 ℓ の傾きは，$\dfrac{-8-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{-\dfrac{15}{2}}{\dfrac{5}{2}}=-3$

直線 ℓ は $y=-3x+b$ とおけるから，B$(2,\ -8)$ を代入して，$b=-2$

よって，直線 ℓ の式は，

$\boldsymbol{y=-3x-2}$

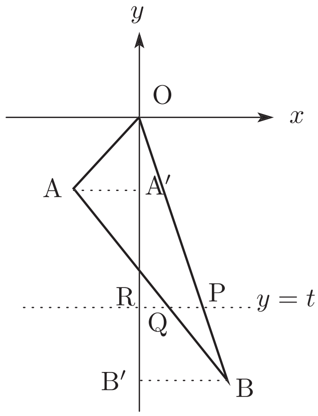
(2) ℓ と y 軸の交点は $(0,\ -2)$ だから，

$\triangle\ \mathrm{AOB}=2\times\left(2+\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

(3) $A\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$B(2,\ -8)$ より，

点 A，B から y 軸に引いた垂線の足をそれぞれ A′，B′ とし，$y=t$ と OB，AB，y 軸との交点をそれぞれ P，Q，R とすると，

$$\frac{\triangle \mathrm{QPB}}{\triangle \mathrm{AOB}}=\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BA}}\times\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BO}}$$
$$=\frac{\mathrm{B'R}}{\mathrm{B'A'}}\times\frac{\mathrm{B'R}}{\mathrm{B'O}}$$
$$=\frac{t+8}{-\frac{1}{2}+8}\times\frac{t+8}{8}$$
$$=\frac{1}{2}$$



よって，

$$(t+8)^2=30$$
$$t+8=\pm\sqrt{30}$$
$$t=-8\pm\sqrt{30}$$

$-8<t<0$ だから，$\boldsymbol{t=-8+\sqrt{30}}$

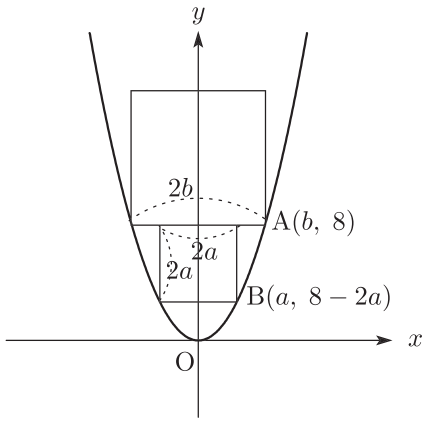
【14】(1) 右の図のように点 B をとると，

$B(a,\ 8-2a)$

点 B は $y=x^2$ 上にあるから，その y 座標は a^2 とも表せる．すなわち，

$$a^2=8-2a$$
$$a^2+2a-8=0$$
$$(a+4)(a-2)=0$$
$$a=-4,\ 2$$

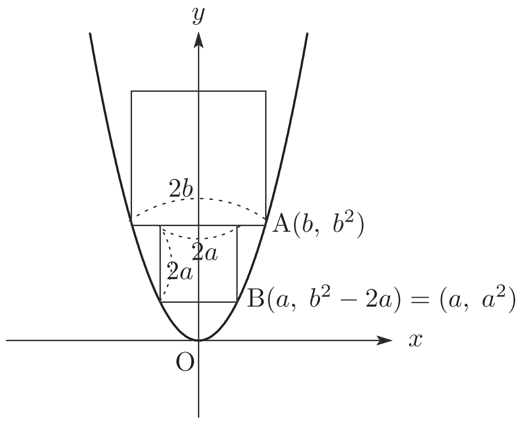
$a>0$ より，$\boldsymbol{a=2}$



(2) $\mathrm{A}(b,\ b^2)$ とおくと，$\mathrm{B}(a,\ b^2-2a)$

ここで，B は，$y=x^2$ 上にあるから，

$$a^2=b^2-2a \quad \cdots\cdots ①$$



また，それぞれの正方形の面積は，

$(2a)^2=4a^2$

$(2b)^2=4b^2$ より

$4a^2+4b^2=96$

$$a^2+b^2=24 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② を連立方程式として解くと，

① より，$b^2=a^2+2a$

これを ② に代入して，

$a^2+a^2+2a=24$

$a^2+a-12=0$

$(a+4)(a-3)=0$

よって，$a=-4,\ 3$

$a>0$ より，$\boldsymbol{a=3}$

添削課題

【1】(1) $y=x+3$ に $x=3$ を代入して,

$y=3+3=6$

よって，B(3, 6)

これを $y=ax^2$ に代入すると，$6=a\times 3^2$

$\boldsymbol{a=\dfrac{2}{3}}$

(2) $\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x^2 & \cdots ① \\ y=x+3 & \cdots ② \end{cases}$

① − ② より,

$\dfrac{2}{3}x^2-x-3=0$

$(2x+3)(x-3)=0$

$x=-\dfrac{3}{2},\ 3$

$x=-\dfrac{3}{2}$ を②に代入して，$y=-\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{3}{2}$

$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}}\right)$

(3) $\triangle$ OAB$=3\times\left(3+\dfrac{3}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$

(4) 原点を通り，直線②に平行な直線は $y=x$ だから,

$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x^2 & \cdots ① \\ y=x & \cdots ③ \end{cases}$

① − ③ より,

$\dfrac{2}{3}x^2-x=0$

$x(2x-3)=0$

$x=0,\ \dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{3}{2}$ を③に代入して，$y=\dfrac{3}{2}$

よって，$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}}\right)$

【2】(1) $y=\dfrac{5}{2}x$ と $y=-\dfrac{3}{2}x+8$ を連立して，$x=2,\ y=5$

$\therefore$ A **(2, 5)**

$y=-\dfrac{3}{2}x+8$ において，$y=0$ として $x=\dfrac{16}{3}$

$\therefore$ B $\left(\boldsymbol{\dfrac{16}{3},\ 0}\right)$

(2) OG は中線なので AB の中点 M を通る．

$$\mathrm{M}\left(\frac{2+\frac{16}{3}}{2},\ \frac{5+0}{2}\right)=\left(\frac{11}{3},\ \frac{5}{2}\right)$$

よって，傾きは，$\frac{5}{2}\div\frac{11}{3}=\frac{15}{22}$ なので

$\boldsymbol{y=\frac{15}{22}x}$

(3) $y=\frac{1}{2}x$ と $y=-\frac{3}{2}x+8$ を連立して $x=4,\ y=2$

$\therefore$ C $(4,\ 2)$

△OAC：△OBC=AC：CB=(A と C の y 座標の差)：(C と B の y 座標の差)

より

△OAC：△OBC $=(5-2):(2-0)=$ **3：2**

【3】 $\begin{cases} y=x^2 \ \cdots ① \\ y=ax-4 \ \cdots ② \end{cases}$

① − ② より

$x^2-ax+4=0$

これの判別式 D が，$D=0$ であればよい．

$$D=(-a)^2-4\times 4=0$$
$$a^2=16$$
$$a=\pm 4$$

よって求める直線は

$\boldsymbol{y=4x-4}$ または $\boldsymbol{y=-4x-4}$

【4】(1) △PAC∽△QBC だから，

△PAC：△QBC=4：1 より，相似比は 2：1

よって，点 Q の x 座標が q のとき，点 P の x 座標は $-2q$ となるから，それぞれの y 座標は，$y=\frac{1}{2}q^2,\ y=\frac{1}{2}(-2q)^2=2q^2$ より，

$\boldsymbol{\mathrm{P}(-2q,\ 2q^2),\quad \mathrm{Q}\left(q,\ \frac{1}{2}q^2\right)}$

(2) (1) より，A$(0,\ 2q^2)$，B$\left(0,\ \frac{1}{2}q^2\right)$，また，C$(0,\ 4)$ より，

$$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=(2q^2-4):\left(4-\frac{1}{2}q^2\right)$$
$$=2:1$$
$$2q^2-4=8-q^2$$
$$3q^2=12$$
$$q^2=4$$
$$q=\pm 2$$

$q>0$ だから，$\boldsymbol{q=2}$

(3) P$(-4,\ 8)$, Q$(2,\ 2)$ だから,

$$a = \frac{2-8}{2-(-4)}$$
$$= \mathbf{-1}$$

小テスト

【1】(1) $\mathbf{A(2,\ 2)}$

(2) $\mathbf{A(-4,\ 8)}$

(3) $\boldsymbol{y = -6x + 20}$

(4) $\mathbf{A(5,\ 50)}$

(5) $\boldsymbol{y = -5x}$

2MJSS/2MJS/2MJ
中２選抜東大・医学部数学
中２数学
中２東大数学

会員番号		氏　名	