P3J

本科２期11月度

解答

Ｚ会東大進学教室

東大物理

２１章　交流回路論

問題

■演習

【１】

《解答》

(a) 抵抗の電圧降下より，

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{ab}} &= RI \\
&= RI_0 \sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

(b) コイルの電圧降下より，

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{bc}} &= L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \\
&= \omega L I_0 \cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

(c) c 点の側の電荷を Q とすると，

$$
\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I_0 \sin(\omega t) \qquad \therefore \quad Q = -\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t)
$$

このとき，コンデンサーの基本式より，

$$
-\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t) = CV_{\mathrm{cd}} \qquad \therefore \quad V_{\mathrm{cd}} = -\frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t)
$$

(d) $\omega = \omega_0$ のとき，$V_{\mathrm{bc}} + V_{\mathrm{cd}} = 0$ なので，

$$
\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) I_0 \cos(\omega_0 t) = 0 \qquad \therefore \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}
$$

(e) $\omega = \omega_0$ のとき，d 点に対する a 点の電位は，

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{ad}} &= V_{\mathrm{ab}} + (V_{\mathrm{bc}} + V_{\mathrm{cd}}) \\
&= RI_0 \sin(\omega_0 t) + 0
\end{aligned}
$$

電源の振幅は V_0 なので，

$$
RI_0 = V_0 \qquad \therefore \quad I_0 = \frac{V_0}{R}
$$

(f) $\omega = \omega_0$ のとき，V_{bc} と V_{cd} は振幅が等しく逆位相で振動するので，互いにうち消し合って $V_{\mathrm{bc}} + V_{\mathrm{cd}} = 0$ に保たれる．

(g) コンデンサー

(h) V_{cd} の振幅が V_0 とすると，

$$
\frac{I_0}{\omega C} = V_0 \qquad \therefore \quad I_0 = \omega C V_0
$$

(i) コイル

(j) V_{bc} の振幅が V_0 とすると，

$$\omega L I_0 = V_0 \qquad \therefore \quad I_0 = \frac{V_0}{\omega L}$$

【2】

《解答》

(1) 起電力および電圧降下の正の向きを時計回りにとる．コンデンサー左側極板の電荷を Q とおくと，回路の方程式は，

$$RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = V_0\sin(\omega t)$$

ここで，電流の定義より，

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad \therefore \quad Q = \int I\mathrm{d}t$$

これらより，Q を消去すると，

$$RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t = V_0\sin(\omega t) \quad \cdots(*)$$

与えられた $I(t)$ を代入すると，

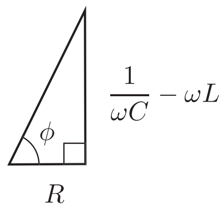
$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= RI_0\sin(\omega t+\phi) + \omega L I_0\cos(\omega t+\phi) - \frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t+\phi)\\ &= I_0\left\{R\sin(\omega t+\phi) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos(\omega t+\phi)\right\}\\ &= I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t+\phi+\alpha)\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = \tan\alpha$ とおいた．$(*)$ は任意の t で成立しているので，

$$\begin{cases} I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = V_0 \\ \omega t + \phi + \alpha = \omega t \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} I_0 = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ \phi = -\alpha \end{cases}$$

α の定義式をふまえると，ϕ が満たす関係式は，

$$\tan\phi = -\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\dfrac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$



(2) 電源の供給電力は，

$$\begin{aligned}P &= V_0\sin(\omega t) \times I_0\sin(\omega t+\phi)\\ &= V_0 I_0\sin(\omega t)\left\{\sin(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\sin\phi\right\}\\ &= V_0 I_0\left\{\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\cos\phi + \frac{\sin(2\omega t)}{2}\sin\phi\right\}\end{aligned}$$

$\sin(2\omega t)$，$\cos(2\omega t)$ の平均は 0 なので，

$$\begin{aligned}\overline{P} &= V_0 I_0 \left(\frac{1}{2}\cos\phi + 0\cdot\sin\phi\right)\\ &= V_0 \cdot \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2}}\\ &= \frac{R{V_0}^2}{2\left\{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2\right\}}\end{aligned}$$

(3) I_0 の分母が最小となるとき, I_0 が最大となるので，このとき $\omega=\omega_0$ とすると,

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \qquad \therefore \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

このときの平均電力は,

$$\overline{P} = \frac{R{V_0}^2}{2(R^2+0)} = \frac{{V_0}^2}{2R}$$

【3】

《解答》

本問の (ア)〜(カ) では，位相差のつき方とリアクタンスの表式を知っていて，それを用いることが想定されている．(それらを既知としないのであれば，**確認問題２**と同じく，コイルとコンデンサーの基本性質に立ち返って求めることができる．)

(ア) $\dfrac{\pi}{2}$
(イ) 進んで
(ウ) $\dfrac{\pi}{2}$
(エ) 遅れて
(オ) i_C の振幅を I_{C0} とすると，

$$V_0 = \frac{1}{\omega C} \cdot I_{C0} \qquad \therefore \quad I_{C0} = \omega C V_0$$

これと (ア)，(イ) より，

$$\begin{aligned} i_C(t) &= \omega C V_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \omega C V_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

(カ) i_L の振幅を I_{L0} とすると，

$$V_0 = \omega L \cdot I_{L0} \qquad \therefore \quad I_{L0} = \frac{V_0}{\omega L}$$

これと (ウ)，(エ) より，

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{V_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

(キ) R を流れる電流は，

$$\begin{aligned} i(t) &= i_C(t) + i_L(t) \\ &= \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) V_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

よって，R の電圧は，

$$\begin{aligned} V_R(t) &= Ri(t) \\ &= \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) R V_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

(ク) 回路の方程式より，B を基準とした A の電位は，

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{AB}}(t) &= V_R(t) + V_{LC}(t) \\
&= \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) RV_0 \cos(\omega t) + V_0 \sin(\omega t) \\
&= \sqrt{{V_0}^2 + \left\{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) RV_0\right\}^2} \sin(\omega t + \phi) \qquad \left[\tan\phi = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) R\right] \\
&= V_0 \sqrt{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \times \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

(ケ) (ク) より，

$$
V = V_0 \sqrt{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \qquad \therefore \quad V_0 = \frac{V}{\sqrt{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}
$$

(コ) $i(t)$ の振幅を I とすると，$I = \left|\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right| V_0$ と表せる．これと (ケ) より，

$$
I = \frac{\left|\omega C - \frac{1}{\omega L}\right|}{\sqrt{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} V
$$

【4】

《解答》

(ア) コンデンサーの左側極板の電荷を Q として，回路の方程式は，

$$RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = V_0\sin(\omega t)$$

また，電流の定義より，

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad \therefore \quad Q = \int I\mathrm{d}t$$

これらより，Q を消去すると，

$$RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t = V_0\sin(\omega t)$$

$I = I_1\sin(\omega t - \alpha_1)$ を左辺に代入すると，

$$I_1\left\{R\sin(\omega t - \alpha_1) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos(\omega t - \alpha_1)\right\} = V_0\sin(\omega t)$$

$$\therefore \quad I_1\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t - \alpha_1 + \beta_1) = V_0\sin(\omega t) \quad \cdots(*)$$

ただし，左辺を合成する際に定義した β_1 は次式を満たす．

$$\tan\beta_1 = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$(*)$ の振幅に注目することにより，

$$I_1\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = V_0 \qquad \therefore \quad Z = \frac{V_0}{I_1} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

(イ) Z が最小となるとき，I_1 は最大となるので，

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = 0 \qquad \therefore \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \fallingdotseq 1.5\times10^3\,\mathrm{rad/s}$$

(ウ) $\omega = \omega_1$ のとき，$Z = R$ なので，

$$I_1 = \frac{V_0}{R} = \frac{2.00\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 2.0\times10^{-2}\,\mathrm{A}$$

(エ) 抵抗の電圧を V_R として，回路の方程式は，

$$V_\mathrm{R} + V_\mathrm{AB} = V \qquad \therefore \quad V_\mathrm{AB} = V - V_\mathrm{R}$$

$\omega = \omega_1$ のとき，(ウ) より V_R の振幅が $RI_1 = V_0$ となり，起電力 V の振幅と一致しているので，$V_\mathrm{AB} = 0\,\mathrm{V}$ に保たれる．

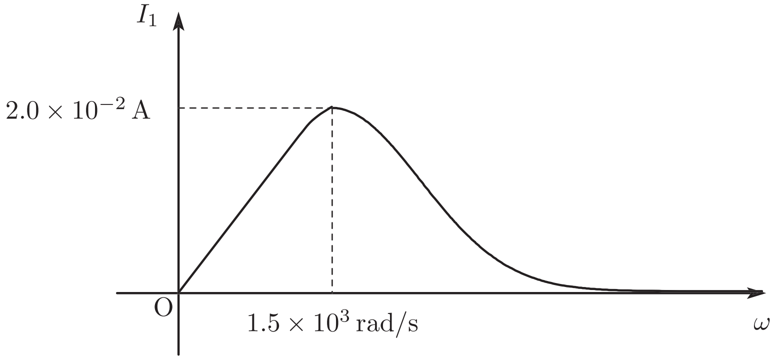
(オ) ω が十分大きいとき，$\omega L \gg R$ かつ $R \gg \dfrac{1}{\omega C}$ なので，

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \fallingdotseq \omega L \qquad \therefore \quad I_1 = \frac{V_0}{Z} \fallingdotseq \frac{V_0}{\omega L}$$

(カ) ω が十分小さいとき，$\dfrac{1}{\omega C} \gg R$ かつ $R \gg \omega L$ なので，

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \fallingdotseq \frac{1}{\omega C} \qquad \therefore \quad I_1 = \frac{V_0}{Z} \fallingdotseq \omega C V_0$$

(キ) (イ)，(ウ) 及び (オ)，(カ) をふまえると，下図のようになる．



(ク) 電源，R，C から成るループに注目すると，回路の方程式は，

$$R \cdot 0 + \frac{Q}{C} = V_0 \sin(\omega_2 t) \qquad \therefore \quad Q = CV_0 \sin(\omega_2 t)$$

電流の定義より，

$$I_\mathrm{C} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \omega_2 C V_0 \cos(\omega_2 t)$$

(ケ) 電源，R，L から成るループに注目すると，回路の方程式は，

$$R \cdot 0 + L\frac{\mathrm{d}I_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t} = V_0 \sin(\omega_2 t) \qquad \therefore \quad I_\mathrm{L} = -\frac{V_0}{\omega_2 L}\cos(\omega_2 t)$$

(コ) $I_\mathrm{R} = 0$ に保たれるとき，常に $I_\mathrm{L} + I_\mathrm{C} = 0$ なので，

$$\left(\omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L}\right) V_0 \cos(\omega_2 t) = 0 \qquad \therefore \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(サ) ω が十分大きいとき，$\dfrac{1}{\omega C} \ll \omega L$ なので，コンデンサーを流れる．

(シ) ω が十分小さいとき，$\omega L \ll \dfrac{1}{\omega C}$ なので，コイルを流れる．

(ス) ω が十分大きいとき，コイルの存在を無視できるので，近似的に (ア) を用いることができ，

$$Z \fallingdotseq \sqrt{R^2 + \left(0 - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R\left\{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad I_2 = \frac{V_0}{R}\left\{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq \frac{V_0}{R}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2\right\} = \frac{V_0}{R}\left(1 - \frac{1}{2R^2C^2\omega^2}\right)$$

ω が十分小さいとき，コンデンサーの存在を無視できるので，近似的に (ア) を用いることができ，

$$Z \fallingdotseq \sqrt{R^2 + (\omega L - 0)^2} = R\left\{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

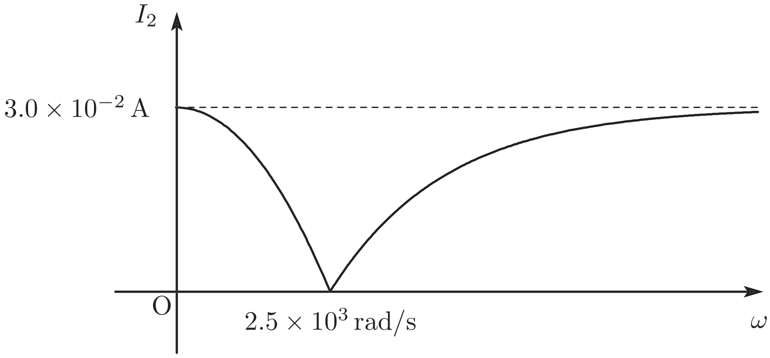
$$\therefore \quad I_2 = \frac{V_0}{R}\left\{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq \frac{V_0}{R}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\right\} = \frac{V_0}{R}\left(1 - \frac{L^2}{2R^2}\omega^2\right)$$

これらより，$\omega \to \infty$ と $\omega \to 0$ の両方で I_2 は $\dfrac{V_0}{R} = 3.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{A}$ となることがわかる．さらに (コ) より，

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.5 \times 10^3\,\mathrm{rad/s}$$

以上をふまえると，下図のようになる．



添削課題

《解答》

I (1) $RI = V - vBl$

(2) $ma = IBl$

(3) (1) より,

$$R\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 - Bl\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \therefore \quad \frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{Bl}{R}a$$

これと (2) より，a を消去すると，

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{Bl}{R} \times \frac{Bl}{m}I \qquad \therefore \quad t_0 = \frac{mR}{(Bl)^2}$$

(4) $t = 0$ のとき, (1) より,

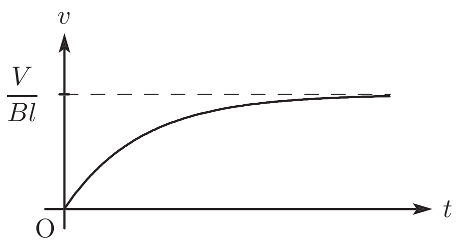
$$RI(0) = V - Bl \cdot 0 \qquad \therefore \quad I(0) = \frac{V}{R}$$

(5) 導体棒を通過した電荷 q は, グラフと横軸の間の面積と等しいので,

$$q = I(0) \times t_0 = \frac{mV}{(Bl)^2}$$

(6) 十分時間がたつと，$I = 0$ に収束する．このとき $v = v_\infty$ とすると，(1) より，

$$0 = V - v_\infty Bl \qquad \therefore \quad v_\infty = \frac{V}{Bl}$$



また (2) より，

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = IBl \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{Bl}{m}I$$

$I(0)$ から 0 に収束する間に，傾き $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ は $\dfrac{Bl}{m}I(0)$ から 0 に収束する．以上より，v の時間変化の概略は右図のようになる．

(7) 導体棒の運動エネルギー変化と発生したジュール熱の合計が電池のした仕事と一致するので,

$$qV = \frac{1}{2}m{v_\infty}^2 + J \qquad \therefore \quad J = \frac{m}{2}\left(\frac{V}{Bl}\right)^2$$

II (1) $Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Blv_0\sin(\omega t)$

(2) (1) の左辺に $i(t) = I_0\sin(\omega t + \phi_0)$ を代入すると,

$$RI_0\sin(\omega t + \phi_0) + \omega LI_0\cos(\omega t + \phi_0) = Blv_0\sin(\omega t)$$

$$\therefore \quad I_0\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\sin(\omega t + \phi_0 + \alpha) = Blv_0\sin(\omega t) \quad \cdots(*)$$

ここで，合成する際に定義した α は，$\tan\alpha = \dfrac{\omega L}{R}$ を満たす．任意の t で $(*)$ が成立するので，

$$\begin{cases} I_0\sqrt{R^2+(\omega L)^2} = Blv_0 \\ \omega t + \phi_0 + \alpha = \omega t \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} I_0 = \dfrac{Blv_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \\ \phi_0 = -\alpha \end{cases}$$

(3) 抵抗での消費電力は，

$$P = R\{I_0\sin(\omega t+\phi_0)\}^2 = R{I_0}^2\cdot\frac{1-\cos\{2(\omega t+\phi_0)\}}{2}$$

$\cos\{2(\omega t+\phi_0)\}$ の平均値は 0 なので，平均消費電力は，

$$\overline{P} = R{I_0}^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{R(Blv_0)^2}{2\{R^2+(\omega L)^2\}}$$

配点

100 点

I　(1)～(7) →各 10 点　　II　(1)～(3) →各 10 点

《解説》

I の基礎方程式は，(1)，(2) で立式したとおり，

$$\begin{cases} RI = V - vBl & \cdots ① \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = IBl & \cdots ② \end{cases}$$

①，②より，v を消去すると，

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{(Bl)^2}{mR}I \quad \cdots ③$$

表記を簡単にするため，$t_0 = \dfrac{mR}{(Bl)^2}$ とおくと，

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t_0}\cdot I$$

$I(0) = \dfrac{V}{R}$ をふまえると，

$$I(t) = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{t_0}}$$

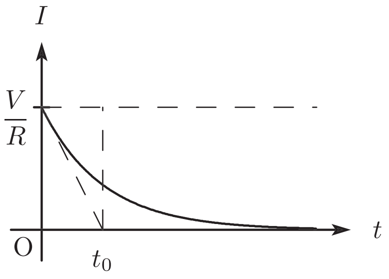
また，①，② より，I を消去して，$v_\infty = \dfrac{V}{Bl}$ とおくと，

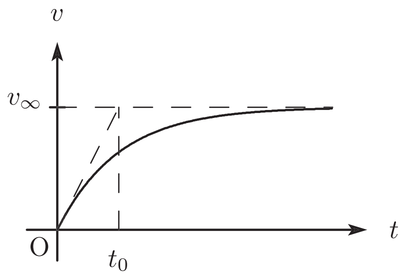
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t_0}(v-v_\infty) \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}(v-v_\infty)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t_0}(v-v_\infty)$$

$v(0) = 0$ をふまえると，

$$v(t) - v_\infty = -v_\infty e^{-\frac{t}{t_0}} \qquad \therefore \quad v(t) = v_\infty(1-e^{-\frac{t}{t_0}})$$

これらを図示すると下図のようになる．





さらに，エネルギーの保存を導出するためには，① $\times I +$ ② $\times v$ を変形していけばよく，

$$RI^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}v^2\right) = VI$$

電池の仕事は，ジュール熱と運動エネルギー変化に分配されることが分かる．

２２章　電磁波の特性

問題

■演習

【1】

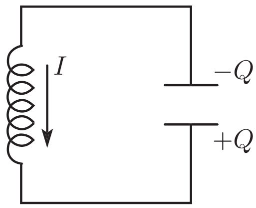
《解答》

(1) $\dfrac{1}{2}C_1E^2$[J]

(2) 電気振動のエネルギー保存より，

$$\frac{1}{2}L_1{I_0}^2+0=0+\frac{1}{2}C_1E^2 \qquad \therefore \quad I_0=E\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$$

右図の設定で，回路の方程式と電流の定義より，



$$\begin{cases} -L_1\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\dfrac{Q}{C_1} \\ I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \end{cases} \qquad \therefore \quad \ddot{Q}=-\frac{1}{L_1C_1}Q$$

Q 及び I の変動は単振動で，角振動数を ω とすると，

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{L_1C_1}} \qquad \therefore \quad T_0=2\pi\sqrt{L_1C_1}$$

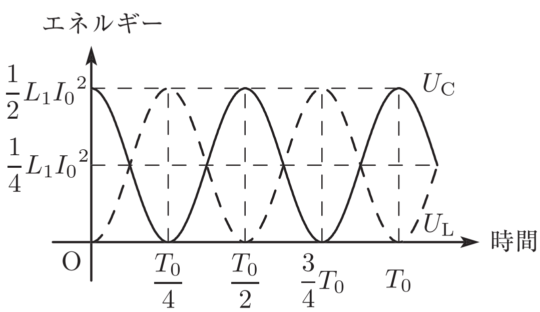
(3) 図 2 の電流が流れるとき，コイルのエネルギーは，

$$U_{\mathrm{L}}=\frac{L_1}{2}\left\{I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right\}^2=\frac{L_1{I_0}^2}{4}\left\{1-\cos\left(\frac{4\pi}{T_0}t\right)\right\}$$

コンデンサーのエネルギーを U_{C} として，電気振動のエネルギー保存より，

$$U_{\mathrm{L}}+U_{\mathrm{C}}=\frac{1}{2}L_1{I_0}^2+0 \qquad \therefore \quad U_{\mathrm{C}}=\frac{L_1{I_0}^2}{4}\left\{1+\cos\left(\frac{4\pi}{T_0}t\right)\right\}$$

これらより，それぞれのエネルギー変化の概略は下図のようになる．



(4) 回路が電磁波を放射することにより，電気振動のエネルギーが減少したから．

(5) ループ平面の法線の向きを電磁波の磁場の向きと一致させたいので，この法線を蝶番の軸と平行にすれば良い．

(6) 図 6 の回路の電気振動の周期が電磁波の周期 T と一致するとき，振動回路が共振して電圧計が最も強く振れるので，

$$2\pi\sqrt{L_2C_2} = T \qquad \therefore \quad C_2 = \frac{T^2}{4\pi^2 L_2}$$

さらに，T は図 4 の振動周期と等しいことをふまえると，

$$C_2 = \frac{(2\times 10^{-6}\,\mathrm{s})^2}{4\times 3.14^2 \times (0.5\times 10^{-3}\,\mathrm{H})} \fallingdotseq 2.0\times 10^{-10}\,\mathrm{F}$$

【2】

《解答》

(1) 光源からの光は，光の進行方向に垂直な面内で振動する電場の方向にかたよりがなく，あらゆる方向の振動を同じ割合で含んでいる自然光である．

(2) A が通す振動の方向と B が通す振動の方向の組み合わせにより，B を透過する光の強さが決まる．これらの方向が互いに平行のとき光の強さは最大となり，互いに垂直のとき光の強さは最小で 0 となる．

(3) A と C が通す振動の方向が同じなので，光の強さの最大値と最小値が現れるときの回転角度は図 2 のままとなる．よって，グラフは (a)．

(4) A と C が通す振動の方向が垂直なので，これらのいずれかの方向と B が通す振動の方向が一致するとき，光の強さは 0 となる．よって，グラフは (g)．

《解説》

A を通った電場の振幅が E_0 のとき，角度 θ だけ回転した B が通す電場の振幅は $|E_0 \cos\theta|$ となる．光の強さ I は振幅の 2 乗に比例するので，比例定数を k として，

$$I = k(E_0 \cos\theta)^2 = k{E_0}^2 \times \cos^2\theta$$

これが図 2 に相当していることは直ちにわかる．

(3) ではさらに，B が通す振動の方向から角度 $-\theta$ だけ回転した C を通すので，電場の振幅は $|E_0 \cos\theta \times \cos(-\theta)|$ となり，

$$I = k\{E_0 \cos\theta \cos(-\theta)\}^2 = k{E_0}^2 \times \cos^4\theta$$

これは図 3(a) に相当することがわかる．

また (4) では，B が通す振動の方向から角度 $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ だけ回転した C を通すので，電場の振幅は $\left|E_0 \cos\theta \times \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right|$ となり，

$$I = k\left\{E_0 \cos\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\}^2 = k{E_0}^2 \times \sin^2\theta \cos^2\theta$$

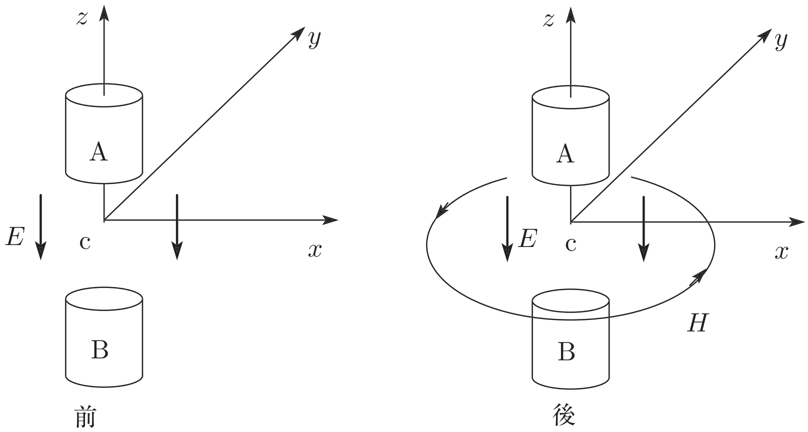
これは図 3(g) に相当することがわかる．

【3】

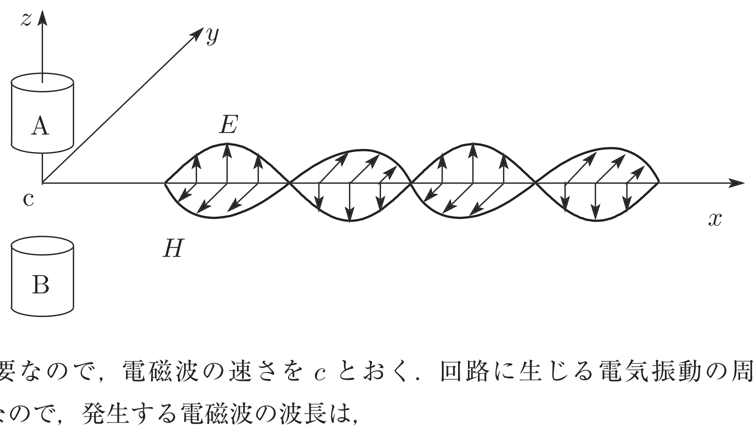
《解答》

(3) では，解答に際して必要となる光速 c が与えられていない．物理定数に関しては，稀にこのような扱いをされることがある．本問はその一例である．

(1) スイッチを閉じる前は，電界 E が A→B の向きに生じていて，磁界 H は 0 である．スイッチを入れた直後は，電界 E の向きは同じだが大きさが減少する．このため，変位電流が B→A の向きに流れ，磁界 H は A の側から見て同心円状かつ反時計回りの向きに生じる．(下図)



(2) 電磁波の伝わる向きは，電界ベクトル $\overrightarrow{E}$ から磁界ベクトル $\overrightarrow{H}$ に向かって右ねじを回したとき右ねじの進む向きと一致する．また，(1) より x 軸上における電界の向きは z 方向で磁界の向きは y 方向なので，電磁波は下図のように伝わる．



(3) 解答に必要なので，電磁波の速さを c とおく．回路に生じる電気振動の周期は $T = 2\pi\sqrt{LC}$ なので，発生する電磁波の波長は，

$$\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{LC}$$

初期条件より，2 つの回路は同位相で振動するので，発生した 2 つの電磁波が点 P で打ち

消しあう条件は,

$$(r+d)-(r-d)=\frac{\lambda}{2}\times(\text{奇数}) \qquad \therefore \quad 2d=\frac{\lambda}{2}\times(\text{奇数})$$

これを満たす最小の d が d_0 なので,

$$2d_0=\frac{\lambda}{2}\times 1 \qquad \therefore \quad d_0=\frac{1}{2}\pi c\sqrt{LC}$$

(4) 初期条件より，2 つの回路は逆位相で振動するので，2 つの波源における位相差は π で，これに加えて経路の違いによる位相差も生じる．

点 P に届く 2 つの電磁波の位相差は,

$$\begin{aligned}\varDelta\theta_{\mathrm{P}}&=\pi+2\pi\times\frac{2d_0}{\lambda}\\&=\pi+\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2}=2\pi\end{aligned}$$

よって，点 P で 2 つの電磁波は強め合い，振幅は 2 倍となり，強さは 4 倍となる．

また，点 Q に届く 2 つの電磁波の経路差は 0 なので位相差は $\varDelta\theta_{\mathrm{Q}}=\pi$ となる．よって，点 Q で 2 つの電磁波は打ち消し合い，強さは 0 となる．

【4】

《解答》

(1) $E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$

(2) (a) 角速度を ω[rad/s] とすると $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ なので，向心方向の運動方程式は，

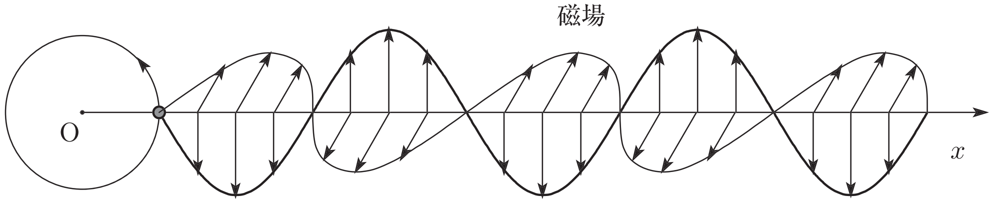
$$m\cdot r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=qE \qquad \therefore\quad T=2\pi\sqrt{\frac{mr}{qE}}$$

(b) $I=\dfrac{q}{T}$

(c) $H=\dfrac{I}{2r}$

(3) 磁場の向きが点電荷 P の回転軸と平行で，電場の向きが P の回転軸及び磁場と垂直となる電磁波が放射される．

1 つの方向について，電場と磁場の様子を図に示すと次のようになる．



(a) (ア)

(b) (ウ)

(c) (オ)

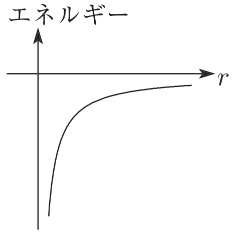
(d) 向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{r}=q\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \qquad \therefore\quad v=\sqrt{\frac{Qq}{4\pi\varepsilon mr}}$$

よって，点電荷 P のエネルギーは，

$$\frac{1}{2}mv^2+(-q)\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}=-\frac{Qq}{8\pi\varepsilon r}$$

電磁波を放射することで P のエネルギーは減少するので，r は減少し続ける．→(オ)



添削課題

《解答》

(1) 直交

(2) 垂直

(3) 横

(4) $E_1 = E_0 \cos\theta$

(5) $I_1 = a{E_1}^2 = a{E_0}^2 \cos^2\theta$

(6) $T_1(\theta) = \dfrac{I_1}{I_0} = \cos^2\theta$

(7) (6) より，$T_1\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$

(8) (6) より，$T_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

(9) 透過できない

(10) (4) と同様にして，

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \cos\dfrac{\pi}{4} \\ E_2 = E_1 \cos\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \therefore \quad E_2 = E_0 \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}E_0$$

(11) (5)，(6) と同様にして，

$$I_2 = a{E_2}^2 = \frac{1}{4}a{E_0}^2 \qquad \therefore \quad T_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{4}$$

(12) (4) と同様にして，

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \cos\dfrac{\theta}{n} \\ E_2 = E_1 \cos\dfrac{\theta}{n} \\ \qquad \vdots \\ E_n = E_{n-1} \cos\dfrac{\theta}{n} \end{cases} \qquad \therefore \quad E_n = E_0 \cos^n\frac{\theta}{n}$$

(5)，(6) と同様にして，

$$I_n = a{E_n}^2 = a{E_0}^2 \cos^{2n}\frac{\theta}{n} \qquad \therefore \quad T_n(\theta) = \frac{I_n}{I_0} = \cos^{2n}\frac{\theta}{n}$$

配点

100 点

(1)～(9) →各 8 点，(10) → 10 点，(11) → 8 点，(12) → 10 点

２３章　光の粒子性

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) $\dfrac{h}{\lambda}$

(2) $\gamma = \alpha - \beta$

(3) 運動量変化の x 成分は，

$$\begin{aligned}\frac{h}{\lambda}\cos\gamma - \frac{h}{\lambda}\cos(\alpha-\beta) &= \frac{h}{\lambda}\cos(\alpha-\beta) - \frac{h}{\lambda}\cos(\alpha-\beta)\\ &= 0\end{aligned}$$

また，y 成分は，

$$\begin{aligned}\frac{h}{\lambda}\sin\gamma - \left\{-\frac{h}{\lambda}\sin(\alpha-\beta)\right\} &= \frac{h}{\lambda}\sin(\alpha-\beta) + \frac{h}{\lambda}\sin(\alpha-\beta)\\ &= \frac{2h\sin(\alpha-\beta)}{\lambda}\end{aligned}$$

(4) 運動量の変化と力積の関係より，

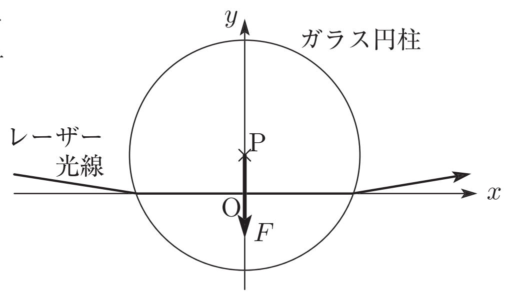
$$\text{力積の } x \text{ 成分} = 0$$

$$\text{力積の } y \text{ 成分} = \frac{2h\sin(\alpha-\beta)}{\lambda}$$

(5) 1 個の光子が円柱に及ぼす力積は $-y$ 方向に大きさ $\dfrac{2h\sin(\alpha-\beta)}{\lambda}$ なので，時間 t で入射した全光子が円柱に及ぼす力積の大きさは，

$$Ft = \frac{2h\sin(\alpha-\beta)}{\lambda}\cdot Nt$$

$$\therefore\quad F = \frac{2Nh\sin(\alpha-\beta)}{\lambda}$$



(6) 屈折の法則より，

$$n\sin\beta = 1\cdot\sin\alpha \qquad \therefore\quad n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

(7) α，β が微小角のとき，(6) より $\alpha \fallingdotseq n\beta$ とみなせる．また，(5) より，

$$\begin{aligned}F &\fallingdotseq \frac{2Nh(\alpha-\beta)}{\lambda}\\ &= \frac{2Nh}{\lambda}\cdot(n-1)\beta\end{aligned}$$

さらに，$\overline{\mathrm{OP}} = R\sin\beta$ が成り立つので，

$$L \fallingdotseq R\beta \qquad \therefore \quad \beta = \frac{L}{R}$$

これらより，

$$F = \frac{2Nh}{\lambda} \cdot \frac{(n-1)L}{R} \qquad \therefore \quad \frac{F}{L} = \frac{2Nh(n-1)}{\lambda R}$$

【2】

《解答》

I (あ) ④

(い) 電場の大きさを E として，面積 S の部分にガウスの法則を適用すると，

$$E \cdot S = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sigma S \qquad \therefore \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

金属の表面付近に生じている電位差の大きさは，

$$E \cdot t = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot t$$

(う) 電子がもつ位置エネルギー $(-e) \cdot V$ の増加分が仕事関数 W なので，

$$\begin{aligned} W &= (-e) \cdot \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t \right) - (-e) \cdot 0 \\ &= \frac{e\sigma t}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

II (1) (a) $\nu = \dfrac{3.0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{6.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 5.0 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$

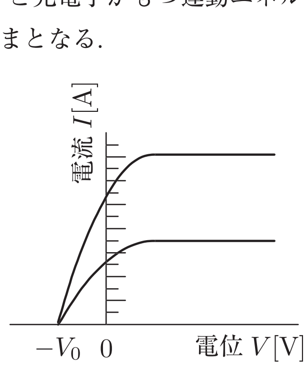
(b) 上向き

(c) $V < 0$ になると，光電子がもつ位置エネルギーは K の位置よりも P の位置で大きい．一方，K から出た時の光電子がもっている運動エネルギーの大きさは有限である．このため，P での位置エネルギーが大きくなり過ぎると光電子のエネルギーが不足して P に到達できなくなり，電流が 0 になる．

(d) $V = -V_0$ とした場合について，光電子のエネルギー保存より，

$$\frac{1}{2} m {v_{\mathrm{max}}}^2 + (-e) \cdot 0 = 0 + (-e) \cdot (-V_0) \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$$

(e) 単色光の強さを 2 倍にすると，光子 1 個のエネルギーが変わることなく K に入射する光子の数が 2 倍になり，光電子による電流も 2 倍になる．また，光子 1 個のエネルギーが変わらないと光電子がもつ運動エネルギーの最大値も変わらないので，阻止電圧は V_0 のままとなる．



(2) (a) $h\nu$

(b) 光子 1 個のエネルギーが金属の仕事関数よりも小さいと，電子 1 個が光子 1 個のエネルギーを吸収しても金属の外部に飛び出すことができない．このため，光の振動数が小さくなり過ぎると電流が流れなくなる．

(c) 仕事関数を W として，光電子が飛び出す過程のエネルギー保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_{\max}}^2 = h\nu - W$$

$\nu = \nu_0$ とした場合では，

$$0 = h\nu_0 - W$$

これらより W を消去すると，

$$\frac{1}{2}m{v_{\max}}^2 = h(\nu - \nu_0)$$

さらに (1)(d) をふまえると，

$$eV_0 = h(\nu - \nu_0) \qquad \therefore \quad V_0 = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0)$$

(d) 仕事関数 W が小さい方が電子は飛び出しやすく，ν_0 を用いて仕事関数は $W = h\nu_0$ と表すことができる．このため，限界振動数 ν_0 の小さい金属 A の方が電子は飛び出しやすい．

【3】

《解答》

(a) $h\nu$

(b) $\dfrac{h\nu}{c}$

(c) $\dfrac{1}{2}M{V_1}^2 + h\nu_1 = \dfrac{1}{2}M{V_0}^2 + h\nu_0 \quad \cdots ①$

(d) $MV_1 + \dfrac{h\nu_1}{c} = MV_0 + \dfrac{h\nu_0}{c} \quad \cdots ②$

(e) $MV_1 - \dfrac{h\nu_1}{c} = MV_0 + \dfrac{h\nu_0}{c} \quad \cdots ③$

(f) ① $-\, c \times$ ② で ν_1 を消去すると，

$$\frac{1}{2}M{V_1}^2 - McV_1 = \frac{1}{2}M{V_0}^2 - McV_0$$

V_0，V_1 は c よりも十分小さいので，

$$-McV_1 \fallingdotseq -McV_0 \qquad \therefore \quad V_1 = V_0$$

(g) (d)，(f) より，

$$MV_0 + \frac{h\nu_1}{c} = MV_0 + \frac{h\nu_0}{c} \qquad \therefore \quad \nu_1 = \nu_0$$

(h) ① $+\, c \times$ ③ で ν_1 を消去すると，

$$\frac{1}{2}M{V_1}^2 + McV_1 = \frac{1}{2}M{V_0}^2 + McV_0 + 2h\nu_0$$

V_0，V_1 は c よりも十分小さいので，

$$McV_1 \fallingdotseq McV_0 + 2h\nu_0 \qquad \therefore \quad V_1 = V_0 + \frac{2h\nu_0}{Mc}$$

(i) (e)，(h) より，

$$M\left(V_0 + \frac{2h\nu_0}{Mc}\right) - \frac{h\nu_1}{c} = MV_0 + \frac{h\nu_0}{c} \qquad \therefore \quad \nu_1 = \nu_0$$

(j) $V_1 > V_0 > 0$ なので，原子の速さが増加していて，運動エネルギーも増加する．

(k) $V_0 < V_1 < 0$ なので，原子の速さは $|V_1| < |V_0|$ となって減少していて，運動エネルギーは減少する．

(l) 高い

(m) 低い

(n) 低い

【4】

《解答》

あ．エネルギー保存より，

$$E_\mathrm{e} = E_\mathrm{g} + \frac{1}{2}Mv^2 + hf_1$$

$$\therefore \quad \Delta E = E_\mathrm{e} - E_\mathrm{g} = \frac{1}{2}Mv^2 + hf_1$$

い．γ 線の光子の進行方向を正として運動量保存より，

$$0 = \frac{hf_1}{c} + M(-v)$$

う．両保存則から v を消去し，f_1 について整理して，

$$f_1{}^2 + 2\frac{Mc^2}{h}f_1 - \frac{2Mc^2\Delta E}{h^2} = 0$$

$$\therefore \quad f_1 = \frac{Mc^2}{h}\left(\sqrt{1+\frac{2\Delta E}{Mc^2}} - 1\right)$$

問題文の近似式を用いて，

$$f_1 \fallingdotseq \frac{Mc^2}{h}\left\{1 + \frac{\Delta E}{Mc^2} - \frac{(\Delta E)^2}{2(Mc^2)^2} - 1\right\} = \frac{\Delta E}{h}\left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right)$$

え．う．の結果で $M \to NM$ で $f_1 \to f_N$ として，

$$f_N = \frac{\Delta E}{h}\left(1 - \frac{\Delta E}{2NMc^2}\right)$$

(1) エネルギー，運動量の各保存則は，

$$\Delta E = \frac{1}{2}NMv_N{}^2 + hf_N$$

$$0 = \frac{hf_N}{c} + NM(-v_N)$$

v_N を消去して，

$$\Delta E = \frac{h^2 f_N{}^2}{2NMc^2} + hf_N$$

$N \to \infty$ で $f_N \to f_\infty$(このとき右辺第 1 項→ 0) ゆえ，

$$\Delta E \fallingdotseq hf_\infty \qquad \therefore \quad f_N \to f_\infty = \frac{\Delta E}{h}$$

お．観測者が動く (遠ざかる) 場合のドップラー効果と同様だから，

$$f_\mathrm{d} = f_N - \frac{V}{\lambda} = f_N - f_N\frac{V}{c}$$

このとき，吸収体の位置 x について，

$$x = A\cos\omega t \qquad \therefore \quad V = \dot{x} = -\omega A\sin\omega t$$

$$\therefore \quad \frac{f_\mathrm{d}}{f_N} = 1 - \frac{V}{c} = \frac{c + \omega A\sin\omega t}{c}$$

か．え．の結果より，$f_\mathrm{d}=f_\infty$ のとき，

$$\frac{f_\mathrm{d}}{f_N}=\frac{\dfrac{\Delta E}{h}}{\dfrac{\Delta E}{h}\left(1-\dfrac{\Delta E}{2NMc^2}\right)}\fallingdotseq 1+\frac{\Delta E}{2NMc^2}$$

これと，お．の結果より，$f_\mathrm{d}=f_\infty$ のとき

$$\frac{f_\mathrm{d}}{f_N}=\frac{c+\omega A\sin\omega t_1}{c}$$

以上 2 式より，

$$\sin\omega t_1=\frac{\Delta E}{2A\omega NMc}$$

き．か．の結果に数値を代入し，

$$\omega=\frac{c\Delta E}{2ANMc^2\sin\omega t_1}=0.6\,\mathrm{rad/s}$$

く．③

(2) $\sin\omega t=\dfrac{1}{2}$ より，吸収体で γ 線が吸収されるのは，

$$\omega t=\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad},\quad \frac{5}{6}\pi\,\mathrm{rad}$$

このとき γ 線の強度が極小になるから，該当する図を選んで③.

添削課題

《解答》

(ア) $\dfrac{W_0}{E}$

(イ) $h \cdot \dfrac{c}{\lambda_0}$

(ウ) $p = \dfrac{E}{c}$

(エ) $\dfrac{N}{4\pi L^2}$

(オ) $\dfrac{N}{4\pi L^2} \cdot \pi r^2 = \dfrac{r^2}{4L^2} N$

(カ) 光子の運動量の減少より，

$$p - (-p) = 2p$$

(キ) (カ) と同様に考えて，

$$p - 0 = p$$

(ク) 時間 t の間に帆に衝突する光子は nt 個で，このうち $k \times nt$ 個が (カ) の力積を与え，残りの $(1-k) \times nt$ 個が (キ) の力積を与えるので，時間 t の間の全力積は，

$$2p \times knt + p \times (1-k)nt = (1+k)pnt$$

(ケ) (ク) より，

$$Ft = (1+k)pnt \qquad \therefore \quad F = (1+k)pn$$

(コ) $\dfrac{GMm}{L^2}$

(サ) (ア)，(オ)，(ケ) より，

$$\begin{aligned} F &= (1+k) \cdot \frac{E}{c} \cdot \left(\frac{r^2}{4L^2} \cdot \frac{W_0}{E} \right) \\ &= \frac{(1+k)W_0 r^2}{4cL^2} \end{aligned}$$

太陽から離れる向きを正とした合力は，

$$F - \frac{GMm}{L^2} = \left\{ \frac{(1+k)W_0 r^2}{4c} - GMm \right\} \cdot \frac{1}{L^2}$$

$r = R$ の場合に，この合力が 0 となるので，

$$\frac{(1+k)W_0 R^2}{4c} - GMm = 0 \qquad \therefore \quad R = \sqrt{\frac{4cGMm}{(1+k)W_0}}$$

(シ) (サ) に数値を代入すると，

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{4 \times (3.0 \times 10^8) \times (6.7 \times 10^{-11}) \times (2.0 \times 10^{30}) \times (2.0 \times 10^2)}{2 \times (4.0 \times 10^{26})}} \\ &= 2.0 \times 10^2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

配点

100 点

(ア)〜(コ) 各 8 点

(サ)12 点

(シ)8 点

P3J
東大物理

Z-KAI

会員番号	

氏　名	