3MJSS/3MJS/3MJ

本科2期10月度

解答

Ｚ会東大進学教室

中3選抜東大・医学部数学

中3数学

中3東大数学

１７章　確率（１）ー確率とその性質ー

問題

【1】全事象を U，スペードのカードをとり出す事象を A，絵札のカードをとり出す事象を B とする．
このとき，

$$n(U)=52,\ n(A)=13,\ n(B)=12$$

(1)

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{n(A)}{n(U)}\\&=\frac{13}{52}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}P(B)&=\frac{n(B)}{n(U)}\\&=\frac{12}{52}\\&=\boldsymbol{\frac{3}{13}}\end{aligned}$$

(3)

$$n(A\cap B)=3$$

よって

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=\frac{n(A\cap B)}{n(U)}\\&=\boldsymbol{\frac{3}{52}}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=13+12-3\\&=22\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=\frac{n(A\cup B)}{n(U)}\\&=\frac{22}{52}\\&=\boldsymbol{\frac{11}{26}}\end{aligned}$$

【2】(1) 40 人のクラスから 3 人の委員を選出する方法は

$$ {}_{40}\mathrm{C}_3 = 9880(\text{通り}) $$

3 人とも男子が選ばれる方法は

$$ {}_{22}\mathrm{C}_3 = 1540(\text{通り}) $$

よって

$$ \frac{1540}{9880} = \boldsymbol{\frac{77}{494}} $$

(2) 男子 1 人，女子 2 人が選ばれる方法は

$$ {}_{22}\mathrm{C}_1 \times {}_{18}\mathrm{C}_2 = 3366(\text{通り}) $$

よって

$$ \frac{3366}{9880} = \boldsymbol{\frac{1683}{4940}} $$

(3) A 君が必ず選ばれるためには，残りの 39 人から 2 人選ぶ確率を考えればよい．
残り 2 人の選び方は

$$ {}_{39}\mathrm{C}_2(\text{通り}) $$

なので

$$ \frac{1 \times {}_{39}\mathrm{C}_2}{{}_{40}\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\frac{3}{40}} $$

【3】

〔出た目の和〕

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

〔出た目の積〕

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(1) 目の和が 6 になるのは

$$(\text{大},\ \text{小}) = (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$$

なので

$$\mathbf{\frac{5}{36}}$$

(2) 目の和が 5 以下になるのは

$$(\text{大},\ \text{小}) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

なので

$$\frac{10}{36} = \mathbf{\frac{5}{18}}$$

(3) 目の積が 20 以上になるのは

$$(\text{大},\ \text{小}) = (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$$

なので

$$\frac{8}{36} = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

【4】(1) $x^2 + ax + b = 0$ が重解を持つのは,
判別式 $D = 0$ になるときである.

$$D = a^2 - 4b = 0$$

なので

$$a^2 - 4b = 0$$
$$a^2 = 4b \cdots ①$$

① を満たす a, b は

$$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (4,\ 4)$$

である. よって

$$\frac{2}{36} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

(2) 異なる 2 つの解をもつのは $D>0$ になるときである.

$$D=a^2-4b>0$$

なので

$$\begin{aligned} &a^2-4b>0 \\ &\quad a^2>4b\cdots② \end{aligned}$$

② を満たす $a,\ b$ は

$$\begin{aligned}(a,\ b)=&(3,\ 1),\ (3,\ 2)\\ &(4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)\\ &(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)\\ &(6,\ 1),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\end{aligned}$$

である.

よって

$$\boldsymbol{\frac{17}{36}}$$

(3) 解を持たないのは, (1), (2) より

$$1-\left(\frac{1}{18}+\frac{17}{36}\right)=\boldsymbol{\frac{17}{36}}$$

【5】(1) 9 個から 4 個取り出すのは

$${}_9\mathrm{C}_4 = 126(\text{通り})$$

白を 4 個取り出すのは

$${}_4\mathrm{C}_4 = 1(\text{通り})$$

よって

$$\mathbf{\frac{1}{126}}$$

(2) 「少なくとも 1 個は赤である」という事象の余事象は「すべて白である」という事象なので，これを考える．
「すべて白である」確率は，(1) より

$$\frac{1}{126}$$

なので

$$1 - \frac{1}{126} = \mathbf{\frac{125}{126}}$$

(3) 取り出した球が同じ色であるためには

(i) すべて赤
(ii) すべて白

のどちらかである．
(i) のとき

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4} = \frac{5}{126}$$

(ii) のとき

(1) より，$\frac{1}{126}$

よって，(i)，(ii) より

$$\frac{5}{126} + \frac{1}{126} = \frac{6}{126} = \mathbf{\frac{1}{21}}$$

(4) 「赤球も白球もともに含まれている」という事象の余事象は「すべて同じ色である」という事象である．
すべて同じ色になる確率は，(3) より

$$\frac{1}{21}$$

よって

$$1 - \frac{1}{21} = \mathbf{\frac{20}{21}}$$

【6】(1) 1〜15 のくじから 2 本選ぶのは，

$${}_{15}\mathrm{C}_2 = 105(\text{通り})$$

11〜15 のくじから 2 本選ぶのは，

$${}_5\mathrm{C}_2 = 10(\text{通り})$$

よって，求める確率は

$$\frac{10}{105} = \mathbf{\frac{2}{21}}$$

(2) 同じ段にあるということは

(i) 第 2 段にある　(ii) 第 3 段にある　(iii) 第 4 段にある　(iv) 第 5 段にある

のいずれかである．

(i) のとき

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{105}$$

(ii) のとき

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{3}{105}$$

(iii) のとき

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{6}{105}$$

(iv) のとき

(1) より，$\frac{10}{105}$

(i)，(ii)，(iii)，(iv) より

$$\frac{1}{105}+\frac{3}{105}+\frac{6}{105}+\frac{10}{105}=\frac{20}{105}=\boldsymbol{\frac{4}{21}}$$

(3) 「少なくとも 1 個が 1〜6 である」という事象の余事象は「2 つとも 7〜15 である」という事象である．

この確率は

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{36}{105}=\frac{12}{35}$$

よって

$$1-\frac{12}{35}=\boldsymbol{\frac{23}{35}}$$

(4) 2 個の円が真横に接するのは，

第 2 段で 1 組
第 3 段で 2 組
第 4 段で 3 組
第 5 段で 4 組

あるので

$$1+2+3+4=10(\text{組})$$

同様にして，斜めに接するのは，
右下がりのとき

$$1+2+3+4=10(\text{組})$$

右上がりのとき

$$4+3+2+1=10(\text{組})$$

よって，求める確率は

$$\frac{10+10+10}{105}=\frac{30}{105}=\boldsymbol{\frac{2}{7}}$$

【7】(1) 5枚のカードの並べ方は

$$5! = 120(\text{通り})$$

一の位が1であるのは

$$1 \times 4! = 24(\text{通り})$$

よって

$$\frac{24}{120} = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

(2)

(i)　一の位が1のとき
(ii)　一の位が5のとき

を考える.

(i) (1) より，24(通り)

(ii) (1) と同じなので，24(通り)

よって，(i)，(ii) より

$$\frac{24+24}{120} = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

(3) 1と5が両端にくるのは

(i)　一万の位が1，一の位が5
(ii)　一万の位が5，一の位が1

のときであり，それぞれの場合の数は

(i)　$1 \times 3! \times 1 = 6(\text{通り})$
(ii)　$1 \times 3! \times 1 = 6(\text{通り})$

よって，(i)，(ii) より

$$\frac{6+6}{120} = \mathbf{\frac{1}{10}}$$

(4) 40000以上の数は

(i)　一万の位が4
(ii)　一万の位が5

のときであり，それぞれの場合の数は

(i)　$1 \times 4! = 24(\text{通り})$
(ii)　$1 \times 4! = 24(\text{通り})$

よって，(i)，(ii) より

$$\frac{24+24}{120} = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

(5) 32000 以上 40000 未満の数は，一万の位が 3 で

(i)　千の位が 2
(ii)　千の位が 4
(iii)　千の位が 5

のときである．
(i) のときの場合の数は,

$$1 \times 1 \times 3! = 6(\text{通り})$$

(ii) のとき，(iii) のとき，ともに (i) と同様なので，それぞれの場合の数は, 6(通り)
(i)，(ii)，(iii) より

$$6 \times 3 = 18(\text{通り})$$

よって

$$\frac{18}{120} = \mathbf{\frac{3}{20}}$$

(6) 32000 以上の数は

(i)　32000 以上 40000 未満
(ii)　40000 以上

のときであり，それぞれの場合の数は

(i)　(5) より, 18(通り)
(ii)　(4) より, 48(通り)

なので，(i)，(ii) より

$$18 + 48 = 66(\text{通り})$$

よって

$$\frac{66}{120} = \mathbf{\frac{11}{20}}$$

【8】(1) 5 枚のカードを 1 列に並べる方法は

$${}_7P_5 = 2520(\text{通り})$$

5 桁の整数をつくるためには，一万の位は 1〜6，千の位以下はそれ以外の数なので

$${}_6P_1 \times {}_6P_4 = 2160(\text{通り})$$

よって

$$\frac{2160}{2520} = \boldsymbol{\frac{6}{7}}$$

(2) 5 桁の偶数をつくるためには，一の位が 0，2，4，6 になればよい．

(i) 一の位が 0 になる

(ii) 一の位が 2, 4, 6 になる

の場合を考える．

(i) のとき

一万の位から十の位までには 0 以外の 6 枚のカードから 4 枚を選んで並べればよいので

$$1 \times {}_6P_4 = 360(\text{通り})$$

(ii) のとき

一の位は 3 通りある．一万の位には，一の位に使った数字と 0 以外の 5 通りあり，千の位，百の位，十の位には，それ以外の 5 枚のカードから 3 枚を選んで並べればよいので

$$3 \times 5 \times {}_5P_3 = 900(\text{通り})$$

よって，(i)，(ii) より

$$360 + 900 = 1260(\text{通り})$$

したがって

$$\frac{1260}{2520} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3) 1 と 0 以外の数の選び方は

$$\begin{aligned}{}_5C_3 &= {}_5C_2 \\ &= 10(\text{通り}) \cdots ①\end{aligned}$$

ここで，

$$a,\ a,\ b,\ c,\ d$$

を並べることを考える．この場合の数は

$$\frac{5!}{2!} = 60(\text{通り})$$

このとき，左にある a を 1，右にある a を 0 に対応させて，b，c，d には残りの数字を対応させればよいので，①より

$$60 \times 10 = 600(\text{通り})$$

よって，確率は

$$\frac{600}{2520} = \boldsymbol{\frac{5}{21}}$$

(4)　(i) 0 を含むとき

$$ {}_4\mathrm{C}_2 = 6(\text{通り}) $$

そのそれぞれについて 1 と 2 をひとかたまりと考えると 5 桁の整数は

$$ \begin{aligned} 3 \times {}_3\mathrm{P}_3 &= 3 \times 3! \\ &= 18(\text{通り}) \end{aligned} $$

その各々に対して 1，2 の並び方が

$$ \begin{aligned} {}_2\mathrm{P}_2 &= 2! \\ &= 2(\text{通り}) \end{aligned} $$

よって，0 を含み 1 と 2 が隣り合う場合の数は

$$ 6 \times 18 \times 2 = 216(\text{通り}) $$

(ii) 0 を含まないとき

$$ \begin{aligned} {}_4\mathrm{C}_3 &= {}_4\mathrm{C}_1 \\ &= 4(\text{通り}) \end{aligned} $$

そのそれぞれについて 1 と 2 をひとかたまりと考えると 5 桁の整数は

$$ \begin{aligned} {}_4\mathrm{P}_4 &= 4! \\ &= 24(\text{通り}) \end{aligned} $$

その各々に対して 1，2 の並び方が

$$ \begin{aligned} {}_2\mathrm{P}_2 &= 2! \\ &= 2(\text{通り}) \end{aligned} $$

よって，0 を含まず 1 と 2 が隣り合う場合の数は

$$ 4 \times 24 \times 2 = 192(\text{通り}) $$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$ \begin{aligned} \frac{216+192}{{}_7\mathrm{P}_5} &= \frac{408}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \\ &= \boldsymbol{\frac{17}{105}} \end{aligned} $$

【9】(1) 出る目の最大値が 3 以下になるのは

「すべての目が 3 以下になる」

ということなので

$$\left(\frac{3}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \mathbf{\frac{1}{16}}$$

(2) 出た目の最大値が 2 以下になるのは

「すべての目が 2 以下になる」

ということなので

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

よって，(1) より

$$\frac{1}{16} - \frac{1}{81} = \mathbf{\frac{65}{1296}}$$

【10】(1) M が偶数になるのは

(i) $M = 2$　(ii) $M = 4$　(iii) $M = 6$

の場合である．

(i) $M \leqq 2$ である事象を考える．

$M \leqq 2$ になるためには，3 個とも 2 以下の目が出るという事象で，その確率は

$$\frac{2^3}{6^3} = \frac{8}{216}$$

また，$M \leqq 1$ である事象を考える．

$M \leqq 1$ になるためには，3 個とも 1 以下の目が出るという事象で，その確率は

$$\frac{1^3}{6^3} = \frac{1}{216}$$

よって，求める確率は

$$\frac{8}{216} - \frac{1}{216} = \frac{7}{216}$$

(ii) $M \leqq 4$ である事象を考える．

$M \leqq 4$ になるためには，3 個とも 4 以下の目が出るという事象で，その確率は

$$\frac{4^3}{6^3} = \frac{64}{216}$$

また，$M \leqq 3$ である事象を考える．

$M \leqq 3$ になるためには，3 個とも 3 以下の目が出るという事象で，その確率は

$$\frac{3^3}{6^3} = \frac{27}{216}$$

よって，求める確率は

$$\frac{64}{216} - \frac{27}{216} = \frac{37}{216}$$

(iii) $M \leqq 6$ である事象を考える.

$M \leqq 6$ になるためには，3 個とも 6 以下の目が出るという事象で，その確率は

$$\frac{6^3}{6^3} = \frac{216}{216}$$

また，$M \leqq 5$ である事象を考える.

$M \leqq 5$ になるためには，3 個とも 5 以下の目が出るという事象で，その確率は

$$\frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

よって，求める確率は

$$\frac{216}{216} - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

よって，(i)，(ii)，(iii) より，求める確率は

$$\frac{7}{216} + \frac{37}{216} + \frac{91}{216} = \boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

(2) $m \geqq 4$ である事象を考える.

$m \geqq 4$ になるためには 3 個とも 4 以上の目が出るという事象で，その確率は

$$\frac{3^3}{6^3} = \frac{27}{216}$$

また，$m \geqq 5$ である事象を考える.

$m \geqq 5$ になるためには 3 個とも 5 以上の目が出るという事象で，その確率は

$$\frac{2^3}{6^3} = \frac{8}{216}$$

よって，求める確率は

$$\frac{27}{216} - \frac{8}{216} = \boldsymbol{\frac{19}{216}}$$

(3) $M - m = 1$ となるのは

$$(M,\ m) = (6,\ 5),\ (5,\ 4),\ (4,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 1)$$

のときである.

$(M,\ m) = (6,\ 5)$ のとき，3 個とも 5 以上 6 以下の目でなければならない．さらに，3 個とも 5 の目や 3 個とも 6 の目は条件に合わないので除かねばならない.

よって，$(M,\ m) = (6,\ 5)$ となる確率は

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 - 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$$

他の $(M,\ m) = (5,\ 4),\ (4,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 1)$ となる確率も同様にして

$$\frac{1}{36}$$

だから，求める確率は

$$\frac{1}{36} \times 5 = \boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

添削課題

【1】(1) 6 通りのうち，奇数が出るのは，1，3，5 の 3 通りだから

$$\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) 表，裏の出方は，$2^3=8$(通り).

このうち，表が 2 回以上出るのは

(表，表，表), (表，表，裏), (表，裏，表), (裏，表，表)

の 4 通りあるので

$$\frac{4}{8}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(3) 4 人の手の出し方は，$3^4=81$(通り)

このうち，2 人だけが勝つのは，勝つ人の選び方が，${}_4C_2=6$(通り)

また，勝つ人の手の出し方が，3 通りずつあるので

$${}_4C_2\times 3=18(\text{通り})$$

よって

$$\frac{18}{81}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

【2】(1) 目の出かたは，$6^2=36$(通り).

同じ目の出る場合の数は

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

の 6 通り．よって

$$\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) 出る目の和が素数になる場合の数は，

(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6),
(2, 1), (2, 3), (2, 5),
(3, 2), (3, 4),
(4, 1), (4, 3),
(5, 2), (5, 6),
(6, 1), (6, 5)

の 15 通り．よって

$$\frac{15}{36}=\mathbf{\frac{5}{12}}$$

(3) 出る目の積が 25 以上になる場合の数は

(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)

の 4 通り．よって

$$1-\frac{4}{36}=\mathbf{\frac{8}{9}}$$

【3】(1) 9 枚のカードから 2 枚をひく場合の数は，${}_9C_2=36$(通り).

2 枚とも奇数であればよい.

そのひき方は，奇数 5 枚中 2 枚を選び出す組合せなので，${}_5C_2=10$(通り)．よって

$$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=\frac{10}{36}=\mathbf{\frac{5}{18}}$$

(2) 和が奇数となるのは，1 枚が奇数で 1 枚が偶数のときだから ${}_5C_1\times{}_4C_1$(通り)．よって

$$\frac{{}_5C_1\times{}_4C_1}{{}_9C_2}=\frac{20}{36}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$

【4】(1) 大中小 3 つのサイコロを投げるとき，目の出方は

$6^3 = 216$(通り)

すべて異なるのは，1〜6 の数から 3 つの数を選んで並べる場合の数だから，

${}_6P_3 = 120$(通り)

よって

$\dfrac{120}{216} = \mathbf{\dfrac{5}{9}}$

(2) $a < b < c$ となるのは，1〜6 の数から 3 つの数を取り出す場合の数と同じである．

すなわち，${}_6C_3 = 20$(通り)．

よって

$\dfrac{20}{216} = \mathbf{\dfrac{5}{54}}$

(3) 最小値が 5 になる場合の数は

(すべての目が 5 か 6 となる場合の数) − (すべての目が 6 となる場合の数)

なので

$2^3 - 1 = 7$(通り)

よって，$\mathbf{\dfrac{7}{216}}$

【5】(1) 合計 $3 + 2 + 1 = 6$(個) のうち，白球は 2 個だから，$\dfrac{2}{6} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(2) 6 個から 2 個取り出す場合の数は ${}_6C_2$ 通り．

また，赤球 3 個から 2 個取り出す場合の数は ${}_3C_2$ 通り．よって

$\dfrac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \mathbf{\dfrac{1}{5}}$

(3) 2 個とも赤球であるか，2 個とも白球であるか，である．

白球 2 個から 2 個取り出す場合の数は，${}_2C_2$ 通り．よって

$\dfrac{{}_3C_2 + {}_2C_2}{{}_6C_2} = \mathbf{\dfrac{4}{15}}$

(4) 6 個から 3 個取り出す場合の数は ${}_6C_3$ 通り．

赤球 1 個，白球 1 個，青球 1 個を取り出す場合の数は ${}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1$ 通り．

よって

$\dfrac{{}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1}{{}_6C_3} = \mathbf{\dfrac{3}{10}}$

【6】(1) 2 つの A を A_1，A_2 と区別しておく．

5 文字を 1 列に並べる並べ方は，

$5! = 120$(通り)

両端に A がくる並べ方は，

$2! \times 3! = 12$(通り)

よって，$\dfrac{12}{120} = \mathbf{\dfrac{1}{10}}$

(2) 母音が 3 個，子音 2 個より

母音，子音，母音，子音，母音

の順に並べればよいので，

$3! \times 2! = 12$(通り)

よって，$\dfrac{12}{120} = \mathbf{\dfrac{1}{10}}$

(3) O を固定する．円形に並べる並べ方は

$(5 - 1)! = 24$(通り)

このうち，となり合う 2 つの A をひとまとまりと考えて

$(4 - 1)! = 6$(通り)

ただし，A_1，A_2 の順と A_2，A_1 の順があるので

$6 \times 2! = 12$(通り)

よって，$\dfrac{12}{24} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

１８章　確率（２）ー確率と独立試行ー

問題

【1】サイコロのでる目を $(a,\ b)$ とすると，

事象 A ： (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)
事象 B ： (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)
事象 C ： (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)
事象 D ： (1, 5), (5, 1)

よって，排反事象となるのは，**A と B，A と D，B と C，B と D**

【2】(1) 11 個から 3 個を取り出す方法は，

$${}_{11}\mathrm{C}_3 = 165(\text{通り})$$

取り出した球が同じ色であるという事象は，2 つの事象

A ： 白球 3 個
B ： 赤球 3 個

の和事象であり，これらは互いに排反である．

A が起こる確率は，

$$P(A) = \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{11}\mathrm{C}_3} = \frac{20}{165} = \frac{4}{33}$$

B が起こる確率は，

$$P(B) = \frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{11}\mathrm{C}_3} = \frac{10}{165} = \frac{2}{33}$$

よって，求める確率は，確率の加法定理より

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{33} + \frac{2}{33} = \frac{6}{33} = \boldsymbol{\frac{2}{11}}$$

(2) 白球が 2 個以上という事象は，2 つの事象

A ： 白球 3 個
C ： 白球 2 個と赤球 1 個

の和事象であり，これらは互いに排反である．

A が起こる確率は，(1) より

$$P(A) = \frac{4}{33}$$

C が起こる確率は，

$$P(C) = \frac{{}_6\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_{11}\mathrm{C}_3} = \frac{15}{33}$$

よって，求める確率は，確率の加法定理より

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{33} + \frac{15}{33} = \boldsymbol{\frac{19}{33}}$$

【3】(1) 9 個から 2 個取り出す方法は

$${}_9\mathrm{C}_2 = 36(\text{通り})$$

2 個とも赤の場合

$${}_4\mathrm{C}_2 = 6(\text{通り})$$

よって

$$\frac{6}{36} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) 2 個とも同じ色の球であるという事象は，
3 つの事象
A ： 赤球 2 個
B ： 白球 2 個
C ： 黒球 2 個
の和事象であり，これらは互いに排反である．
A が起こる確率は，(1) より

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

B が起こる確率は

$$P(B) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{1}{36}$$

C が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{3}{36} \end{aligned}$$

よって，求める確率は，確率の加法定理より

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= \frac{6}{36} + \frac{1}{36} + \frac{3}{36} \\ &= \frac{10}{36} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{18}} \end{aligned}$$

(3) 9 個から 3 個取り出す方法は

$${}_9\mathrm{C}_3 = 84(\text{通り})$$

2 個だけが赤球であるという事象は，2 つの事象
D ： 赤球 2 個，白球 1 個，黒球 0 個
E ： 赤球 2 個，白球 0 個，黒球 1 個

の和事象であり，これらは互いに排反である．

D が起こる確率は

$$P(D) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_0}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{2}{14}$$

E が起こる確率は

$$P(E) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_0 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{3}{14}$$

よって，求める確率は，確率の加法定理より

$$\begin{aligned} P(D \cup E) &= P(D) + P(E) \\ &= \frac{2}{14} + \frac{3}{14} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{14}} \end{aligned}$$

(4) 3 個とも色が異なるということは，赤球 1 個，白球 1 個，黒球 1 個を取り出すということなので，その場合の数は

$${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 4 \times 2 \times 3 = 24(\text{通り})$$

よって

$$\frac{24}{84} = \boldsymbol{\frac{2}{7}}$$

【4】(1) A 君が当たりくじを引く確率は，$\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

(2) B さんが当たりくじを引く事象は，2 つの事象

D ：A 君が当たり，B さんは当たり

E ：A 君がはずれ，B さんは当たり

の和事象であり，これらは互いに排反である．

D が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

E が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

よって，求める確率は，確率の加法定理より

$$\begin{aligned} P(D \cup E) &= P(D) + P(E) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{7}{30} \\ &= \frac{9}{30} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{10}} \end{aligned}$$

(3) A 君，B さんの 1 人だけが当たりくじを引く事象は，2 つの事象

F ：A 君が当たり，B さんははずれ

G ：A 君がはずれ，B さんは当たり

の和事象であり，これらは互いに排反である．

F が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(F) &= \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

G が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(G) &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

よって，求める確率は，確率の加法定理より

$$\begin{aligned} P(F \cup G) &= P(F) + P(G) \\ &= \frac{7}{30} + \frac{7}{30} \\ &= \boldsymbol{\frac{7}{15}} \end{aligned}$$

(4) C 君が当たりくじを引く事象は，4 つの事象

H ：A 君が当たり，B さんも当たり，C 君も当たる

I ：A 君が当たり，B さんがはずれ，C 君は当たる

J ：A 君がはずれ，B さんは当たり，C 君も当たる

K ：A 君がはずれ，B さんもはずれ，C 君は当たる

の和事象である．

H が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(H) &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{6}{720} \end{aligned}$$

I が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(I) &= \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} \\ &= \frac{42}{720} \end{aligned}$$

J が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(J) &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \\ &= \frac{42}{720} \end{aligned}$$

K が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(K) &= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{126}{720} \end{aligned}$$

よって，求める確率は，確率の加法定理より

$$\begin{aligned} P(H \cup I \cup J \cup K) &= P(H) + P(I) + P(J) + P(K) \\ &= \frac{6}{720} + \frac{42}{720} + \frac{42}{720} + \frac{126}{720} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{10}} \end{aligned}$$

【5】(1) 1 番目と 2 番目の人が当たりくじを引く確率は

$$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\mathbf{\frac{1}{12}}$$

(2) 2 番目と 4 番目の人が当たりくじを引く事象は，3 つの事象

A ：1 番目が当たり，2 番目も当たり，3 番目ははずれ，4 番目が当たる

B ：1 番目がはずれ，2 番目は当たり，3 番目も当たり，4 番目も当たる

C ：1 番目がはずれ，2 番目は当たり，3 番目がはずれ，4 番目は当たる

の和事象である．

A が起こる確率は

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}\\&=\frac{36}{3024}\end{aligned}$$

B が起こる確率は

$$\begin{aligned}P(B)&=\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\\&=\frac{36}{3024}\end{aligned}$$

C が起こる確率は

$$\begin{aligned}P(C)&=\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}\\&=\frac{180}{3024}\end{aligned}$$

3 つの事象はそれぞれ排反だから

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)\\&=\frac{36}{3024}+\frac{36}{3024}+\frac{180}{3024}\\&=\mathbf{\frac{1}{12}}\end{aligned}$$

(3) 4 番目の人が当たりくじを引く事象は，7 つの事象

D ：1 番目が当たり，2 番目も当たり，3 番目ははずれ，4 番目は当たる
E ：1 番目が当たり，2 番目ははずれ，3 番目が当たり，4 番目も当たる
F ：1 番目が当たり，2 番目ははずれ，3 番目もはずれ，4 番目は当たる
G ：1 番目がはずれ，2 番目は当たり，3 番目も当たり，4 番目も当たる
H ：1 番目がはずれ，2 番目は当たり，3 番目がはずれ，4 番目は当たる
I ：1 番目がはずれ，2 番目もはずれ，3 番目は当たり，4 番目も当たる
J ：1 番目がはずれ，2 番目もはずれ，3 番目もはずれ，4 番目は当たる

の和事象である．

D が起こる確率は

$$P(D) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{36}{3024}$$

E が起こる確率は

$$P(E) = \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{36}{3024}$$

F が起こる確率は

$$P(F) = \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{180}{3024}$$

G が起こる確率は

$$P(G) = \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{36}{3024}$$

H が起こる確率は

$$P(H) = \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{180}{3024}$$

I が起こる確率は

$$P(I) = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{180}{3024}$$

J が起こる確率は

$$P(J) = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{360}{3024}$$

7 つの事象はそれぞれ排反だから

$$\begin{aligned}
&P(D \cup E \cup F \cup G \cup H \cup I \cup J) \\
=&P(D) + P(E) + P(F) + P(G) + P(H) + P(I) + P(J) \\
=&\frac{36}{3024} + \frac{36}{3024} + \frac{180}{3024} + \frac{36}{3024} + \frac{180}{3024} + \frac{180}{3024} + \frac{360}{3024} \\
=&\boldsymbol{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

【6】(1) 1 以外の目が出る確率は

$$\frac{5}{6}$$

3 回連続でサイコロを投げる試行は独立であるから，求める確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \mathbf{\frac{125}{216}}$$

(2) 1 回目に 3 以下が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2 回目に偶数が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3 回目に 4 以上が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

(3) 出る目の積が 5 の倍数になるためには，3 回投げたうち，少なくとも 1 回 5 の目が出ればよい．
1 回も 5 の目が出ない確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

なので，求める確率は

$$1 - \frac{125}{216} = \mathbf{\frac{91}{216}}$$

(4) 出る目の積が 3 の倍数になるためには 3 回投げたうち，少なくとも 1 回は 3 と 6 の目のどちらかが出ればよい．
3 の目と 6 の目が 1 回も出ない確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

なので，求める確率は

$$1 - \frac{8}{27} = \mathbf{\frac{19}{27}}$$

【7】(1) P がはずれる確率は

$$\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

Q が当たる確率は

$$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

R が当たる確率は

$$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

このくじを引く試行は独立だから，求める確率は

$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{4}{125}}$$

(2) 「少なくとも 1 人が当たる」という事象の余事象は「1 人も当たらない」という事象である．この確率は

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

よって，求める確率は

$$1 - \frac{64}{125} = \mathbf{\frac{61}{125}}$$

【8】(1) 1 つのサイコロを振って偶数が出る確率は

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

サイコロを振る試行は独立だから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2) A の箱から白球が取り出される確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_1}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

サイコロを振る試行と箱から 1 球取り出す試行は独立だから，求める確率は

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\mathbf{\frac{1}{10}}$$

(3) 2 つのサイコロの目のうち少なくとも 1 つが奇数であり，かつ B の箱から白球が取り出される確率を求めればよい．2 つのサイコロの目のうち少なくとも 1 つが奇数である確率は

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

B の箱から白球が取り出される確率は

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_1}=\frac{7}{10}$$

よって，求める確率は

$$\frac{3}{4}\times\frac{7}{10}=\mathbf{\frac{21}{40}}$$

(4) A の箱から白球が取り出される事象と B の箱から白球が取り出される事象は排反だから，確率の加法定理より，求める確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{21}{40}=\mathbf{\frac{5}{8}}$$

【9】サイコロを投げて，1 か 2 の目が出る確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3 か 4 か 5 か 6 の目が出る確率は

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(i) 事象 S：サイコロを投げる試行と，P の袋から赤球と白球を 1 個ずつ取り出す試行は，独立だから

$$\begin{aligned}P(S)&=\frac{1}{3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\\&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

(ii) 事象 T：サイコロを投げる試行と，Q の袋から赤球と白球を 1 個ずつ取り出す試行は，独立だから

$$\begin{aligned}P(T)&=\frac{2}{3}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\\&=\frac{16}{45}\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，事象 S と事象 T は排反なので，加法定理より

$$\begin{aligned} P(S\cup T) &= P(S)+P(T) \\ &= \frac{1}{5}+\frac{16}{45} \\ &= \mathbf{\frac{5}{9}} \end{aligned}$$

【10】射手が撃つ試行は独立である.

(1) 射手が命中させる確率は

$$\frac{3}{5}$$

2 発とも命中する確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \mathbf{\frac{9}{25}}$$

(2) 余事象を考える.
「2 発とも命中しない」確率は

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

よって，求める確率は

$$1-\frac{4}{25} = \mathbf{\frac{21}{25}}$$

【11】グー，チョキ，パーの出る確率は，それぞれ $\frac{1}{3}$ である.

(1) A だけが勝つ場合は

(A，B，C) = (パ，グ，グ)，(グ，チ，チ)，(チ，パ，パ)

の 3 通りである.

(i) 事象 D：(A，B，C) = (パ，グ，グ)
このときの確率は

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(ii) 事象 E：(A，B，C) = (グ，チ，チ)
このときの確率は

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(iii) 事象 F：(A，B，C) = (チ，パ，パ)
このときの確率は

$$\begin{aligned} P(F) &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

事象 D, E, F は排反だから，加法定理より，求める確率は

$$\begin{aligned}P(D\cup E\cup F)&=\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{9}}\end{aligned}$$

(2) A が勝つのは,

(i)　事象 X ： A だけが勝つ

(ii)　事象 Y ： A，B が勝つ

(iii)　事象 Z ： A，C が勝つ

のときである.

(i) のとき，(1) より

$$P(X)=\frac{1}{9}$$

(ii) のとき,

(A，B，C) = (パ，パ，グ)，(グ，グ，チ)，(チ，チ，パ)

である.

(ア) 事象 G：(A，B，C) = (パ，パ，グ)

このときの確率は

$$\begin{aligned}P(G)&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{27}\end{aligned}$$

(イ) 事象 H：(A，B，C) = (グ，グ，チ)

このときの確率は

$$\begin{aligned}P(H)&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{27}\end{aligned}$$

(ウ) 事象 I：(A，B，C) = (チ，チ，パ)

このときの確率は

$$\begin{aligned}P(I)&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{27}\end{aligned}$$

(ア)，(イ)，(ウ) は排反なので，加法定理より，求める確率は

$$\begin{aligned} P(Y) &= P(G \cup H \cup I) \\ &= P(G) + P(H) + P(I) \\ &= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(iii) のとき

(A, B, C) = (パ, グ, パ), (グ, チ, グ), (チ, パ, チ)

である．(ii) と同様にして

$$P(Z) = \frac{1}{9}$$

(i)，(ii)，(iii) は互いに排反なので，加法定理より，求める確率は，

$$\begin{aligned} P(X \cup Y \cup Z) &= P(X) + P(Y) + P(Z) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) 勝負がつかないのは

(i)　事象 J ：A，B，C がともにグーかパーかチョキ

(ii)　事象 K ：A，B，C がみな異なるものを出す

のときである．

(i) のとき

(ア) 事象 L：(A, B, C) = (グ, グ, グ)

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(L) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(イ) 事象 M：(A, B, C) = (パ, パ, パ)

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(ウ) 事象 N：(A, B, C) = (チ, チ, チ)

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(N) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(ア)，(イ)，(ウ) は排反なので，加法定理より

$$
\begin{aligned}
P(J) &= P(L \cup M \cup N) \\
&= P(L) \cup P(M) \cup P(N) \\
&= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \\
&= \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

(ii) のとき

A，B，C がみな異なるものを出す場合の数は

$$3! = 6(\text{通り})$$

そのうちの 1 つの確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

A，B，C がみな異なるものを出す場合は，それぞれ排反だから

$$
\begin{aligned}
P(K) &= \frac{1}{27} \times 6 \\
&= \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

(i)，(ii) は排反なので，加法定理より

$$
\begin{aligned}
P(J \cup K) &= P(J) + P(K) \\
&= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

添削課題

【1】(1) 8 の倍数のカードは，12 枚あるから，求める確率は

$$\frac{12}{100}=\mathbf{\frac{3}{25}}$$

(2) 奇数のカードは 50 枚あるから，奇数のカードをひく確率は

$$\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

「8 の倍数のカードをひく」と「奇数のカードをひく」は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{25}+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{31}{50}}$$

(3) 20 の倍数のカードは，5 枚あるので，20 の倍数のカードをひく確率は

$$\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$$

また，8 と 20 の公倍数 (すなわち，40 の倍数) は，2 枚あるから，8 と 20 の公倍数のカードをひく確率は

$$\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$$

求める確率は

$$\frac{3}{25}+\frac{1}{20}-\frac{1}{50}=\mathbf{\frac{3}{20}}$$

【2】くじをひいたあと，くじをもとに戻すので，各くじびきは独立試行である．

また，1 回のくじびきで，

1 等が当たる確率は，$\frac{1}{10}$，

2 等が当たる確率は，$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，

3 等が当たる確率は，$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

である．

(1) $$\frac{1}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{100}}$$

(2) はずれが出る確率は $\frac{1}{5}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{1}{125}}$$

【3】全事象は，$6^2=36$ (通り)

このうち，2 つとも 1 が出ない場合は，$5^2=25$(通り) より，事象 A は事象「2 つとも 1 の目が出ない」の余事象だから，

$36-25=11$(通り)

また，事象 B は 18(通り) ある．

(1) ① $P(\mathrm{A})=\mathbf{\frac{11}{36}}$

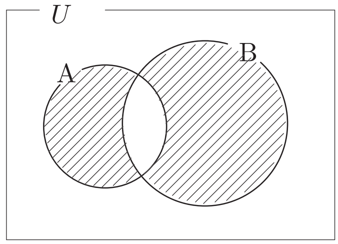
② $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ は，(1, 2)，(1, 4)，(1, 6)，(2, 1)，(4, 1)，(6, 1) の 6 通り．よって，$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{6}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

③ $P(\mathrm{B})=\dfrac{18}{36}$ より

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$
$$=\frac{11}{36}+\frac{18}{36}-\frac{6}{36}$$
$$=\boldsymbol{\frac{23}{36}}$$

(2) ベン図より，A であり B でない部分と，B であり A でない部分の和集合だから，A, B どちらか一方だけが起こる事象は

$\boldsymbol{(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cup(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})}$



$\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}$ は，(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (5, 1) の 5 通り．よって

$P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=\dfrac{5}{36}$

$\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}$ は，(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5) の 12 通り．

よって，$P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=\dfrac{12}{36}$

$\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}$ と $\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}$ は互いに排反だから，

$$P\left((\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cup(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})\right)=P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=\frac{5}{36}+\frac{12}{36}=\boldsymbol{\frac{17}{36}}$$

【4】(1) 1 回目の操作終了後，表を向いているコインは 7 枚，裏を向いているコインは 4 枚である．2 回目の操作で裏から表になるコインの枚数を n $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とすると，このとき表から裏になるコインは $4-n$ 枚だから

$$X=\{7-(4-n)\}+n=2n+3$$

ここで，n は整数だから，X は奇数である．　（証明終）

(2) (1) より，X は 3, 5, 7, 9, 11 のいずれかの値になる．

$X=k$ となる確率を $P(k)$ と表すことにする．

$X=3$ となるのは，$n=0$ のときだから

$$P(3)=\frac{{}_7\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4}=\frac{7}{66}$$

$X=5$ となるのは，$n=1$ のときだから

$$P(5)=\frac{{}_7\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{11}\mathrm{C}_4}=\frac{14}{33}$$

$X=3$ となる事象と $X=5$ となる事象は互いに排反だから，$X\leqq 5$ となる確率は

$$\frac{7}{66}+\frac{14}{33}=\boldsymbol{\frac{35}{66}}$$

＜参考＞

$$P(7)=\frac{21}{55},\quad P(9)=\frac{14}{165},\quad P(11)=\frac{1}{330}$$

となる．

１９章　確率（３）－反復試行－

問題

【1】(1) サイコロを 1 回投げるとき，1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$

4 回とも 1 の目が出るのは，$\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \mathbf{\frac{1}{1296}}$

(2) サイコロを 1 回投げるとき，

1 の目が出る確率は，$\frac{1}{6}$

1 以外の目が出る確率は，$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

よって，求める確率は，

$$ {}_4C_1 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \mathbf{\frac{125}{324}} $$

(3) 求める確率は，

$$ {}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \mathbf{\frac{25}{216}} $$

【2】(1) 硬貨を投げるとき，表が出る確率と裏が出る確率は，それぞれ $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$ なので，求める確率は，

$$ {}_7C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2 = {}_7C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{21}{128}} $$

(2) 「少なくとも 1 枚が表になる」という事象の余事象は「すべて裏になる」という事象である．

すべて裏になる確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

よって，求める確率は

$$ 1 - \frac{1}{128} = \mathbf{\frac{127}{128}} $$

(3) 「少なくとも 2 枚が裏になる」という事象の余事象は「すべて表が出る．または 1 枚だけ裏が出る」という事象である．

(i) すべて表になる確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

(ii) 1 枚だけ裏が出る確率は

$$ {}_7C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{128} $$

(i)，(ii) は互いに排反なので，求める確率は

$$ 1 - \left(\frac{1}{128} + \frac{7}{128}\right) = \mathbf{\frac{15}{16}} $$

(4) 「表も裏も少なくとも 1 枚ある」という事象の余事象は「すべて裏が出る．もしくはすべて表が出る」という事象である．

(i) すべて表の確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

(ii) すべて裏の確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

(i), (ii) は排反なので，求める確率は

$$1 - \left(\frac{1}{128} + \frac{1}{128}\right) = \boldsymbol{\frac{63}{64}}$$

【3】(1) 1 回取り出したときに赤球が出る確率，白球が出る確率はそれぞれ

$$\frac{2}{5},\ \frac{3}{5}$$

である．
4 回とも赤球が出る確率は

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{16}{625}}$$

(2) 「少なくとも 1 回は赤球が出る」という事象の余事象は「すべて白球が出る」という事象である．
この確率を考えると

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$$

よって，求める確率は

$$1 - \frac{81}{625} = \boldsymbol{\frac{544}{625}}$$

(3) 「白球が 2 回以上出る」という事象の余事象は,「白球が 1 回以下出る」という事象であり，これは

A：すべて赤球が出る
B：白球が 1 回，赤球が 3 回出る

の和事象である．
この 2 つの事象は互いに排反なので，
A が起こる確率は，(1) より

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$$

B が起こる確率は

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{96}{625}$$

よって，求める確率は

$$1 - \left(\frac{16}{625} + \frac{96}{625}\right) = \boldsymbol{\frac{513}{625}}$$

＜ **(3)** の別解＞

「白球が 2 回以上出る」ということは，
「白球が 2 回もしくは 3 回もしくは 4 回出る」ということである.

(i) 白球が 2 回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625} $$

(ii) 白球が 3 回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{216}{625} $$

(iii) 白球が 4 回出る確率は

$$ \left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625} $$

よって，求める確率は

$$ \frac{216}{625}+\frac{216}{625}+\frac{81}{625}=\boldsymbol{\frac{513}{625}} $$

(4) 白球の方が多く出るということは，2 つの事象

C ： 白球が 3 回，赤球が 1 回出る
D ： 白球が 4 回出る

の和事象である.
この 2 つの事象は互いに排反なので,
C の起こる確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{216}{625} $$

D が起こる確率は

$$ \left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625} $$

よって，求める確率は

$$ \frac{216}{625}+\frac{81}{625}=\boldsymbol{\frac{297}{625}} $$

【4】(1) 14 個の中から 5 個を同時に取り出す方法は

$$ {}_{14}\mathrm{C}_5 (\text{通り}) $$

である．

赤球が 1 個，白球が 2 個，青球が 2 個取り出す方法は

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 (\text{通り}) $$

である．

よって，求める確率は

$$ \frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2}{{}_{14}\mathrm{C}_5} = \mathbf{\frac{180}{1001}} $$

(2) 箱から球を 1 個取り出したときに，赤球，白球，青球が出る確率は，それぞれ

$$ \frac{2}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7} $$

である．

5 回の試行で，赤球が 1 回，白球が 2 回，青球が 2 回取り出されるとき，その取り出し方は

$$ \frac{5!}{1!2!2!} (\text{通り}) $$

それぞれの確率は，いずれも

$$ \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 $$

これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$ \frac{5!}{1!2!2!} \times \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \mathbf{\frac{2160}{16807}} $$

(3) 「同じ色の球が出る」というのは「2 回とも赤球が出るまたは 2 回とも白球が出るまたは 2 回とも青球が出る」ということである．

(i) 2 回とも赤球が出る確率は，$\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$

(ii) 2 回とも白球が出る確率は，$\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$

(iii) 2 回とも青球が出る確率は，$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$

(i)，(ii)，(iii) は互いに排反なので，求める確率は

$$ \frac{4}{49} + \frac{4}{49} + \frac{9}{49} = \mathbf{\frac{17}{49}} $$

(4) 「白球が 4 回以上取り出される」ということは「白球が 4 回取り出されるまたは白球が 5 回取り出される」ということである．

(i) 白球が 4 回，赤球が 1 回出る確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{2}{7}\right) = {}_5\mathrm{C}_1 \times \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{2}{7}\right) = \frac{160}{16807} $$

(ii) 白球が 4 回，青球が 1 回出る確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{7}\right) = {}_5\mathrm{C}_1 \times \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{240}{16807} $$

(iii) 白球が 5 回出る確率は

$$ \left(\frac{2}{7}\right)^5 = \frac{32}{16807} $$

(i)，(ii)，(iii) は互いに排反なので，求める確率は

$$ \frac{160}{16807} + \frac{240}{16807} + \frac{32}{16807} = \mathbf{\frac{432}{16807}} $$

【5】(1) A が 4 勝するとき，その確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \mathbf{\frac{16}{81}}$$

(2) 「5 ゲームをやって A が先に 4 勝する」ということは「4 ゲームまでに A が 3 勝し，5 ゲーム目に A が勝つ」ということであり

$$\begin{aligned} {}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3} &= {}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3} \\ &= \mathbf{\frac{64}{243}} \end{aligned}$$

(3) 「6 ゲームをやって A が先に 4 勝する」ということは「5 ゲームまでに A が 3 勝し，6 ゲーム目に A が勝つ」ということであり

$$\begin{aligned} {}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3} &= {}_5C_2\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3} \\ &= \mathbf{\frac{160}{729}} \end{aligned}$$

(4) 「7 ゲームをやって A が先に 4 勝する」ということは「6 ゲームまでに A が 3 勝し，7 ゲーム目に A が勝つ」ということであり

$${}_6C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{320}{2187}}$$

(5) A が先に 4 勝するという事象は，4 つの事象

4 ゲーム目に A が先に 4 勝する
5 ゲーム目に A が先に 4 勝する
6 ゲーム目に A が先に 4 勝する
7 ゲーム目に A が先に 4 勝する

の和事象である．
これらの事象は互いに排反なので，(1)〜(4) より

$$\frac{16}{81}+\frac{64}{243}+\frac{160}{729}+\frac{320}{2187} = \mathbf{\frac{1808}{2187}}$$

【6】(1) グー，チョキ，パーの出る確率は，それぞれ $\frac{1}{3}$ であるから，
A が勝つ事象は

事象 C ：(A, B) = (グ，チ)
事象 D ：(A, B) = (パ，グ)
事象 E ：(A, B) = (チ，パ)

の和事象である．
これらの事象は互いに排反なので

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

(2) 勝負がつくというのは

事象 F ： A が勝つ

事象 G ： B が勝つ

の和事象である．

これらの事象は互いに排反なので

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(3) 「あいこになる」という事象の余事象は「勝負がつく」という事象である．

よって，(2) より，求める確率は

$$1-\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

(4) 「3 回目で勝負が終わる」ということは，2 つの事象

事象 H ： 3 回続けて A が勝つ

事象 I ： 3 回続けて B が勝つ

の和事象である．これらの事象は排反で，それぞれの確率は

$$P(H)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$
$$P(I)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

であるから

$$\begin{aligned}P(H\cup I)&=P(H)+P(I)\\&=\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\\&=\mathbf{\frac{2}{27}}\end{aligned}$$

(5) 「4 回目で勝負がつく」ということは，2 つの事象

事象 J ： 3 回目までに A が 2 勝して，4 回目に A が勝つ

事象 K ： 3 回目までに B が 2 勝して，4 回目に B が勝つ

の和事象である．これらの事象は排反で，それぞれの確率は

$$\begin{aligned}P(J)&={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}\\&={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{27}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(K)&={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{27}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}P(J\cup K)&=P(J)+P(K)\\&=\frac{2}{27}+\frac{2}{27}\\&=\mathbf{\frac{4}{27}}\end{aligned}$$

添削課題

【1】(1) 10 回とも表が出る確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$$

10 回とも裏が出る確率も $\frac{1}{1024}$ だから，表も裏も出る確率は

$$1-\left(\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}\right)=\mathbf{\frac{511}{512}}$$

(2) 10 回のうち，表が 6 回，裏が 4 回出る確率は

$$_{10}\mathrm{C}_6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{105}{512}}$$

【2】(1) ちょうど 1 周して上がるのに，偶数が x 回，奇数が y 回出るとすると

$2x+y=6$ (x，y は負でない整数)

これを解いて

$(x,\ y)=(0,\ 6),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (3,\ 0)$

よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_5\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\mathbf{\frac{43}{64}}$$

(2) ちょうど 2 周して上がるのは

(i) A から 5 だけ進んで F に止まり

(ii) 偶数の目が出ることによって，F から 2 だけ進んで（A は通過）B に止まり

(iii) B から 5 だけ進んで A に止まる

ときである．

(i) は (1) と同様に考えると，$2x+y=5$

すなわち，$(x,\ y)=(0,\ 5),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1)$ となる場合だから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_4\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{21}{32}}$$

(ii) が起こる確率は，$\frac{1}{2}$

(iii) は (i) と同じく，$\frac{21}{32}$

(i)，(ii)，(iii) がともに起こる確率は

$$\frac{21}{32}\times\frac{1}{2}\times\frac{21}{32}=\mathbf{\frac{441}{2048}}$$

【3】1 回につき，3 の倍数の目が出る確率は，$\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

3 の倍数以外の目が出る確率は,

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

である.

(1) P_4 は，4 回振って 4 回とも 3 の倍数の目が出る確率だから

$$P_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{81}}$$

(2) P_8 は，1〜7 回目のうち 3 回だけ 3 の倍数の目が出て，かつ 8 回目に 3 の倍数の目が出る確率だから

$$P_8 = {}_7\mathrm{C}_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{560}{6561}}$$

２０章　二項定理

問題

【1】(1)

$$(x+y)^4 = {}_4\mathrm{C}_0x^4 + {}_4\mathrm{C}_1x^3y + {}_4\mathrm{C}_2x^2y^2 + {}_4\mathrm{C}_3xy^3 + {}_4\mathrm{C}_4y^4$$
$$= \boldsymbol{x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4}$$

(2)

$$(x-y)^6 = {}_6\mathrm{C}_0x^6 + {}_6\mathrm{C}_1x^5(-y) + {}_6\mathrm{C}_2x^4(-y)^2 + {}_6\mathrm{C}_3x^3(-y)^3 + {}_6\mathrm{C}_4x^2(-y)^4 + {}_6\mathrm{C}_5x(-y)^5 + {}_6\mathrm{C}_6(-y)^6$$
$$= \boldsymbol{x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6}$$

(3)

$$(a+1)^4 = {}_4\mathrm{C}_0a^4 + {}_4\mathrm{C}_1a^3\cdot 1 + {}_4\mathrm{C}_2a^2\cdot 1^2 + {}_4\mathrm{C}_3a\cdot 1^3 + {}_4\mathrm{C}_41^4$$
$$= \boldsymbol{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1}$$

(4)

$$(a-1)^5 = {}_5\mathrm{C}_0a^5 + {}_5\mathrm{C}_1a^4(-1) + {}_5\mathrm{C}_2a^3(-1)^2 + {}_5\mathrm{C}_3a^2(-1)^3 + {}_5\mathrm{C}_4a(-1)^4 + {}_5\mathrm{C}_5(-1)^5$$
$$= \boldsymbol{a^5 - 5a^4 + 10a^3 - 10a^2 + 5a - 1}$$

(5)

$$(2x+y)^4 = {}_4\mathrm{C}_0(2x)^4 + {}_4\mathrm{C}_1(2x)^3y + {}_4\mathrm{C}_2(2x)^2y^2 + {}_4\mathrm{C}_3(2x)y^3 + {}_4\mathrm{C}_4y^4$$
$$= \boldsymbol{16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4}$$

(6)

$$(x-3y)^5$$
$$= {}_5\mathrm{C}_0x^5 + {}_5\mathrm{C}_1x^4(-3y) + {}_5\mathrm{C}_2x^3(-3y)^2 + {}_5\mathrm{C}_3x^2(-3y)^3 + {}_5\mathrm{C}_4x(-3y)^4 + {}_5\mathrm{C}_5(-3y)^5$$
$$= \boldsymbol{x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5}$$

(7)

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^4 = {}_4\mathrm{C}_0a^4 + {}_4\mathrm{C}_1a^3\left(\frac{1}{a}\right) + {}_4\mathrm{C}_2a^2\left(\frac{1}{a}\right)^2 + {}_4\mathrm{C}_3a\left(\frac{1}{a}\right)^3 + {}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{a}\right)^4$$
$$= \boldsymbol{a^4 + 4a^2 + 6 + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^4}}$$

(8)

$$\left(2a-\frac{1}{a}\right)^5 = {}_5\mathrm{C}_0(2a)^5 + {}_5\mathrm{C}_1(2a)^4\left(-\frac{1}{a}\right) + {}_5\mathrm{C}_2(2a)^3\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + {}_5\mathrm{C}_3(2a)^2\left(-\frac{1}{a}\right)^3 + {}_5\mathrm{C}_4(2a)\left(-\frac{1}{a}\right)^4 + {}_5\mathrm{C}_5\left(-\frac{1}{a}\right)^5$$
$$= \boldsymbol{32a^5 - 80a^3 + 80a - \frac{40}{a} + \frac{10}{a^3} - \frac{1}{a^5}}$$

【2】(1) $(x+2)^7$ の展開式の一般項は

$${}_7\mathrm{C}_r \cdot x^{7-r} \cdot 2^r$$

x^3 の項は

$$\begin{aligned} 7-r &= 3 \\ r &= 4 \end{aligned}$$

のときであるから，その係数は

$$\begin{aligned} {}_7\mathrm{C}_4 \cdot 2^4 &= {}_7\mathrm{C}_3 \cdot 2^4 \\ &= \mathbf{560} \end{aligned}$$

(2) $(x-5)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5\mathrm{C}_r \cdot x^{5-r} \cdot (-5)^r$$

x^4 の項は

$$\begin{aligned} 5-r &= 4 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

のときであるから，その係数は

$${}_5\mathrm{C}_1 \cdot (-5) = \mathbf{-25}$$

(3) $(2x+3y)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_r \cdot (2x)^{6-r} \cdot (3y)^r = {}_6\mathrm{C}_r \cdot 2^{6-r} \cdot 3^r \cdot x^{6-r} \cdot y^r$$

x^2y^4 の項は $r=4$ のときであるから，その係数は

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 2^{6-4} \cdot 3^4 &= {}_6\mathrm{C}_2 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \\ &= \mathbf{4860} \end{aligned}$$

(4) $(3x-2y)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_r \cdot (3x)^{6-r} \cdot (-2y)^r = {}_6\mathrm{C}_r \cdot 3^{6-r} \cdot (-2)^r \cdot x^{6-r} \cdot y^r$$

x^3y^3 の項は $r=3$ のときであるから，その係数は

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{C}_3 \cdot 3^{6-3} \cdot (-2)^3 &= {}_6\mathrm{C}_3 \cdot 3^3 \cdot (-2)^3 \\ &= \mathbf{-4320} \end{aligned}$$

(5) $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} &{}_6\mathrm{C}_r \cdot (x^2)^{6-r} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^r \\ =&{}_6\mathrm{C}_r \cdot 2^r \cdot x^{12-2r} \cdot \frac{1}{x^r} \\ =&{}_6\mathrm{C}_r \cdot 2^r \cdot x^{12-3r} \end{aligned}$$

x の項は

$$\begin{aligned} 12-3r &= 1 \\ r &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

となる．r は整数だから不適.
よって，x の項の係数は $\mathbf{0}$

(6) $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^5$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} &{}_5\mathrm{C}_r \cdot (2x^2)^{5-r} \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^r \\ =&{}_5\mathrm{C}_r \cdot 2^{5-r} \cdot (-3)^r \cdot x^{10-2r} \cdot \frac{1}{x^r} \\ =&{}_5\mathrm{C}_r \cdot 2^{5-r} \cdot (-3)^r \cdot x^{10-3r} \end{aligned}$$

x^3 の項は

$$\begin{aligned} 10-3r &= 3 \\ r &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

となる．r は整数だから不適.
よって，x の項の係数は $\mathbf{0}$

(7) $\left(x+\dfrac{1}{2x^2}\right)^{12}$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned}
&{}_{12}\mathrm{C}_r\cdot x^{12-r}\cdot\left(\frac{1}{2x^2}\right)^r\\
=&{}_{12}\mathrm{C}_r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot x^{12-r}\cdot\frac{1}{x^{2r}}\\
=&{}_{12}\mathrm{C}_r\cdot\frac{1}{2^r}\cdot x^{12-3r}
\end{aligned}$$

定数項は

$$\begin{aligned}
12-3r&=0\\
r&=4
\end{aligned}$$

のときであるから，その係数は

$${}_{12}\mathrm{C}_4\cdot\frac{1}{2^4}=\boldsymbol{\frac{495}{16}}$$

(8) $\left(2x^4-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned}
&{}_{10}\mathrm{C}_r\cdot(2x^4)^{10-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r\\
=&{}_{10}\mathrm{C}_r\cdot 2^{10-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{40-4r}\cdot\frac{1}{x^r}\\
=&{}_{10}\mathrm{C}_r\cdot 2^{10-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{40-5r}
\end{aligned}$$

定数項は

$$\begin{aligned}
40-5r&=0\\
r&=8
\end{aligned}$$

のときであるから，その係数は

$$\begin{aligned}
{}_{10}\mathrm{C}_8\cdot 2^{10-8}\cdot(-1)^8&={}_{10}\mathrm{C}_2\cdot 2^2\\
&=\mathbf{180}
\end{aligned}$$

【3】(1) $(a+b+c)^6$ の展開式の一般項は

$$\frac{6!}{p!q!r!}\cdot a^p\cdot b^q\cdot c^r \quad (ただし, p+q+r=6)$$

a^2b^3c の項は，$p=2$，$q=3$，$r=1$ のときであるから，その係数は

$$\frac{6!}{2!3!1!}=\mathbf{60}$$

(2) $(x+y+z)^7$ の展開式の一般項は

$$\frac{7!}{p!q!r!}\cdot x^p\cdot y^q\cdot z^r \quad (ただし, p+q+r=7)$$

$x^3y^2z^2$ の項は，$p=3$，$q=2$，$r=2$ のときであるから，その係数は

$$\frac{7!}{3!2!2!}=\mathbf{210}$$

(3) $(a+b+1)^{10}$ の展開式の一般項は

$$\frac{10!}{p!q!r!}\cdot a^p\cdot b^q\cdot 1^r=\frac{10!}{p!q!r!}\cdot a^p\cdot b^q \quad (ただし, p+q+r=10)$$

a^2b の項は，$p=2$，$q=1$，$r=7$ のときであるから，その係数は

$$\frac{10!}{2!1!7!}=\mathbf{360}$$

(4) $(x-2y-z)^5$ の展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}\cdot x^p\cdot(-2y)^q\cdot(-z)^r=\frac{5!}{p!q!r!}\cdot(-2)^q\cdot(-1)^r\cdot x^p\cdot y^q\cdot z^r \quad (ただし, p+q+r=5)$$

x^2yz^2 の項は，$p=2$，$q=1$，$r=2$ のときであるから，その係数は

$$\frac{5!}{2!1!2!}\cdot(-2)\cdot(-1)^2=\mathbf{-60}$$

(5) $(2a-b+3c)^7$ の展開式の一般項は

$$\frac{7!}{p!q!r!}\cdot(2a)^p\cdot(-b)^q\cdot(3c)^r=\frac{7!}{p!q!r!}\cdot 2^p\cdot(-1)^q\cdot 3^r\cdot a^p\cdot b^q\cdot c^r \quad (ただし, p+q+r=7)$$

a^4bc^2 の項は，$p=4$，$q=1$，$r=2$ のときであるから，その係数は

$$\frac{7!}{4!1!2!}\cdot 2^4\cdot(-1)\cdot 3^2=\mathbf{-15120}$$

(6) $(x^2-2x+3)^4$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned}&\frac{4!}{p!q!r!}\cdot(x^2)^p\cdot(-2x)^q\cdot 3^r\\&=\frac{4!}{p!q!r!}\cdot(-2)^q\cdot 3^r\cdot x^{2p}\cdot x^q\\&=\frac{4!}{p!q!r!}\cdot(-2)^q\cdot 3^r\cdot x^{2p+q}\quad(\text{ただし}, p+q+r=4\ \cdots①)\end{aligned}$$

x^5 の項は

$$2p+q=5\ \cdots②$$

のときである．

①，②より

$$(p,\ q,\ r)=(1,\ 3,\ 0),\ (2,\ 1,\ 1)$$

よって，x^5 の項の係数は

$$\begin{aligned}\frac{4!}{1!3!0!}\cdot(-2)^3\cdot 3^0+\frac{4!}{2!1!1!}\cdot(-2)\cdot 3&=-32-72\\&=\mathbf{-104}\end{aligned}$$

(7) $\left(a+\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right)^5$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned}&\frac{5!}{p!q!r!}\cdot a^p\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^q\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^r\\&=\frac{5!}{p!q!r!}\cdot\frac{1}{2^q}\cdot a^p\cdot\frac{1}{a^r}\\&=\frac{5!}{p!q!r!}\cdot\frac{1}{2^q}\cdot a^{p-r}\quad(\text{ただし}, p+q+r=5\ \cdots①)\end{aligned}$$

a^3 の項は

$$p-r=3\ \cdots②$$

のときである．

①，②より

$$(p,\ q,\ r)=(3,\ 2,\ 0),\ (4,\ 0,\ 1)$$

よって，a^3 の項の係数は

$$\begin{aligned}\frac{5!}{3!2!0!}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{5!}{4!0!1!}\cdot\frac{1}{2^0}&=\frac{5}{2}+5\\&=\mathbf{\frac{15}{2}}\end{aligned}$$

(8) $\left(x^2+x-\dfrac{2}{x}\right)^7$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned}&\frac{7!}{p!q!r!}\cdot(x^2)^p\cdot x^q\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^r\\=&\frac{7!}{p!q!r!}\cdot(-2)^r\cdot x^{2p}\cdot x^q\cdot\frac{1}{x^r}\\=&\frac{7!}{p!q!r!}\cdot(-2)^r\cdot x^{2p+q-r}\quad(\text{ただし，}p+q+r=7\ \cdots①)\end{aligned}$$

定数項は

$$2p+q-r=0\ \cdots②$$

のときである．

①，②より

$$(p,\ q,\ r)=(1,\ 2,\ 4)$$

よって，定数項は

$$\frac{7!}{1!2!4!}\cdot(-2)^4=\mathbf{1680}$$

【4】(1)

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!} \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \times \frac{n-r}{n-r} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{r}{r} \\
&= \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} + \frac{(n-1)!r}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}\{(n-r)+r\} \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} \times n \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_r
\end{aligned}
$$

（証明終）

(2) 二項定理より

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r x^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \cdots ①$$

である.

①に $x=1$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
(1+1)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \times 1 + {}_n\mathrm{C}_2 \times 1^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r \times 1^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \times 1^n \\
2^n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n
\end{aligned}
$$

（証明終）

(3) ① に $x=-1$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
(1-1)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \times (-1) + {}_n\mathrm{C}_2 \times (-1)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r \times (-1)^r \\
&\qquad + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \times (-1)^n \\
0 &= {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + (-1)^n \cdot {}_n\mathrm{C}_n
\end{aligned}
$$

（証明終）

(4) 二項定理より

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= {}_{2n}\mathrm{C}_0 \cdot 1^{2n} + {}_{2n}\mathrm{C}_1 \cdot 1^{2n-1} \cdot x + {}_{2n}\mathrm{C}_2 \cdot 1^{2n-2} \cdot x^2 \\ &\qquad + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} \cdot x^{2n} \\ &= {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 \cdot x + {}_{2n}\mathrm{C}_2 \cdot x^2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} \cdot x^{2n}\end{aligned}$$

これに $x=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(1+1)^{2n} &= {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 \cdot 1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 \cdot 1^2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} \cdot 1^{2n} \\ 2^{2n} &= {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

$x=-1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(1-1)^{2n} &= {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 \cdot (-1) + {}_{2n}\mathrm{C}_2 \cdot (-1)^2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} \cdot (-1)^{2n} \\ 0 &= {}_{2n}\mathrm{C}_0 - {}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 - \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} \quad \cdots ③\end{aligned}$$

② + ③ より

$$\begin{aligned}2({}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}) &= 2^{2n} \\ {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} &= \frac{2^{2n}}{2} \\ {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} &= 2^{2n-1}\end{aligned}$$

（証明終）

添削課題

【1】(1) $(a-2b)^7$

$={}_7C_0a^7+{}_7C_1a^6(-2b)+{}_7C_2a^5(-2b)^2$
$+{}_7C_3a^4(-2b)^3+{}_7C_4a^3(-2b)^4+{}_7C_5a^2(-2b)^5$
$+{}_7C_6a(-2b)^6+{}_7C_7(-2b)^7$
$=\boldsymbol{a^7-14a^6b+84a^5b^2-280a^4b^3+560a^3b^4-672a^2b^5}$
$\boldsymbol{+448ab^6-128b^7}$

(2) $\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^8$ の展開式の一般項は

$${}_8C_r\cdot x^{8-r}\cdot\left(-\frac{3}{x}\right)^r={}_8C_r\cdot(-3)^r\cdot x^{8-r}\cdot\frac{1}{x^r}$$

$x^{8-r}\cdot\dfrac{1}{x^r}=x^2$ から

$x^{8-2r}=x^2$
$8-2r=2$
$-2r=-6$
$r=3$

よって，x^2 の係数は

${}_8C_3\cdot(-3)^3=\boldsymbol{-1512}$

【2】$(1+a+a^2)^9$ の展開式の一般項は

$$\frac{9!}{p!q!r!}\cdot1^p\cdot a^q\cdot(a^2)^r=\frac{9!}{p!q!r!}\cdot a^{q+2r}\qquad（ただし，p+q+r=9）$$

$a^{q+2r}=a^4$ より

$q+2r=4$ $\cdots$①

ここで，$p+q+r=9$ $\cdots$② とする．

①，②より

$(p,\ q,\ r)=(5,\ 4,\ 0),\ (6,\ 2,\ 1),\ (7,\ 0,\ 2)$

よって，a^4 の係数は

$$\frac{9!}{5!4!}+\frac{9!}{6!2!}+\frac{9!}{7!2!}=\boldsymbol{414}$$

【3】(1) 二項定理より

$(1+a)^n={}_nC_0\cdot1^n+{}_nC_1\cdot1^{n-1}\cdot a+{}_nC_2\cdot1^{n-2}\cdot a^2+\cdots+{}_nC_n\cdot a^n$

である．これより

$$(1+a)^n=1+{}_nC_1\cdot a+{}_nC_2\cdot a^2+\cdots+a^n$$
$$=1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\cdots+a^n$$

ここで，右辺の第3項以降はそれぞれ正なので

$(1+a)^n>1+na$

（証明終）

(2) (1) において，$a=\dfrac{1}{n}$ とおくと

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+n\cdot\frac{1}{n}=1+1=2$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$$

（証明終）

【4】 $21^{21}=(20+1)^{21}$

$$\begin{aligned}
&= {}_{21}\mathrm{C}_0\cdot 20^{21}+{}_{21}\mathrm{C}_1\cdot 20^{20}\cdot 1+{}_{21}\mathrm{C}_2\cdot 20^{19}\cdot 1^2+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{19}\cdot 20^2\cdot 1^{19}\\
&\qquad\qquad +{}_{21}\mathrm{C}_{20}\cdot 20\cdot 1^{20}+{}_{21}\mathrm{C}_{21}\cdot 1^{21}\\
&= 20^{21}+{}_{21}\mathrm{C}_1\cdot 20^{20}+{}_{21}\mathrm{C}_2\cdot 20^{19}+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{19}\cdot 20^2+{}_{21}\mathrm{C}_{20}\cdot 20+1\\
&= 20^2(20^{19}+{}_{21}\mathrm{C}_1\cdot 20^{18}+{}_{21}\mathrm{C}_2\cdot 20^{17}+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{19})+421\\
&= 400(20^{19}+{}_{21}\mathrm{C}_1\cdot 20^{18}+{}_{21}\mathrm{C}_2\cdot 20^{17}+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{19}+1)+21
\end{aligned}$$

ここで,（　）内は整数だから，$400(20^{19}+{}_{21}\mathrm{C}_1\cdot 20^{18}+{}_{21}\mathrm{C}_2\cdot 20^{17}+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{19}+1)$ は 400 で割り切れる.

よって，21^{21} を 400 で割った余りは

21

3MJSS/3MJS/3MJ
中３選抜東大・医学部数学
中３数学
中３東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	