M1JS/M1J

本科2期12月度

# 解答

Z会東大進学教室

# 高1選抜東大数学

# 高1東大数学

## ２４章　微分・積分（４）

### 問題

【1】$C$ は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int(-2)dx = \boldsymbol{-2x+C}$　　(答)

(2) $\displaystyle\int(2x-3)dx = 2\int xdx - 3\int dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C = \boldsymbol{x^2-3x+C}$　　(答)

(3)
$$\int 4(x-1)dx = \int(4x-4)dx = 4\int xdx - 4\int dx$$
$$= 4\cdot\frac{x^2}{2} - 4x + C = \boldsymbol{2x^2-4x+C}$$　　(答)

(4) $\displaystyle\int(6x^2+3)dx = 6\int x^2dx + 3\int dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} + 3x + C = \boldsymbol{2x^3+3x+C}$　　(答)

(5)
$$\int(-1-x+2x^2)dx = -\int dx - \int xdx + 2\int x^2dx$$
$$= -x - \frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^3}{3} + C$$
$$= \boldsymbol{-x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+C}$$　　(答)

(6) $\displaystyle\int(3t^2-t)dt = 3\int t^2dt - \int tdt = 3\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + C = \boldsymbol{t^3-\frac{t^2}{2}+C}$　　(答)

【2】$C$ は積分定数とする.

(1)
$$\int x(x-3)dx = \int(x^2-3x)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C}$$　　(答)

(2)
$$\int(x-2)(x+1)dx = \int(x^2-x-2)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C}$$　　(答)

(3)
$$\int(t-2)(t+2)dt = \int(t^2-4)dt$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}t^3-4t+C}$$　　(答)

(4)
$$\int(3+2x)(3x+2)dx = \int(6x^2+13x+6)dx$$
$$= \boldsymbol{2x^3+\frac{13}{2}x^2+6x+C}$$　　(答)

(5) $$\int (x-1)^2 dx = \int (x^2-2x+1)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(x-1)^3\}' = 3 \cdot 1 \cdot (x-1)^2 = 3(x-1)^2$ より， $(x-1)^2 = \dfrac{1}{3} \cdot \{(x-1)^3\}'$

$$\therefore \int (x-1)^2 dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}(x-1)^3 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \qquad \text{(答)}$$

ここで，$C_1 = C + \dfrac{1}{3}$ である．

(6) $$\int (3x-2)^2 dx = \int (9x^2-12x+4)dx$$
$$= \boldsymbol{3x^3 - 6x^2 + 4x + C} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(3x-2)^3\}' = 3 \cdot 3 \cdot (3x-2)^2 = 9(3x-2)^2$ より， $(3x-2)^2 = \dfrac{1}{9} \cdot \{(3x-2)^3\}'$

$$\therefore \int (3x-2)^2 dx = \boldsymbol{\frac{1}{9}(3x-2)^3 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \qquad \text{(答)}$$

ここで，$C_1 = C + \dfrac{8}{9}$ である．

(7) $$\int (x-1)^3 dx = \int (x^3-3x^2+3x-1)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(x-1)^4\}' = 4 \cdot 1 \cdot (x-1)^3 = 4(x-1)^3$ より，$(x-1)^3 = \dfrac{1}{4} \cdot \{(x-1)^4\}'$

$$\therefore \int (x-1)^3 dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}(x-1)^4 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \qquad \text{(答)}$$

ここで，$C_1 = C - \dfrac{1}{4}$ である．

(8) $$\int (2y+1)^3 dy = \int (8y^3+12y^2+6y+1)dy$$
$$= \boldsymbol{2y^4 + 4y^3 + 3y^2 + y + C} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(2y+1)^4\}' = 4 \cdot 2 \cdot (2y+1)^3 = 8(2y+1)^3$ より，$(2y+1)^3 = \dfrac{1}{8} \cdot \{(2y+1)^4\}'$

$$\therefore \int (2y+1)^3 dy = \boldsymbol{\frac{1}{8}(2y+1)^4 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \qquad \text{(答)}$$

ここで，$C_1 = C - \dfrac{1}{8}$ である．

(9) $$\int (x-1)^2(x+2)dx = \int (x^3-3x+2)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C} \qquad (答)$$

【3】(1) $$\int_0^2 (-3)dx = \Big[-3x\Big]_0^2 = -3(2-0) = \mathbf{-6} \qquad (答)$$

(2) $$\int_2^{-1} 2xdx = \Big[x^2\Big]_2^{-1} = 1-4 = \mathbf{-3} \qquad (答)$$

(3) $$\int_{-1}^1 3x^2dx = \Big[x^3\Big]_{-1}^1 = 1-(-1) = \mathbf{2} \qquad (答)$$

＜別解＞

$f(x)=3x^2$ とおくと，$f(-x)=3(-x)^2=3x^2=f(x)$ より $f(x)$ が偶関数なので

$$\int_{-1}^1 3x^2dx = 2\int_0^1 3x^2dx = 2\Big[x^3\Big]_0^1 = 2(1-0) = \mathbf{2} \qquad (答)$$

(4) $$\int_{-1}^{-1} x^5dx = \mathbf{0} \qquad (答)$$

【4】(1) $$\int_1^2 (2x+1)dx = \Big[x^2+x\Big]_1^2 = (4+2)-(1+1) = \mathbf{4} \qquad (答)$$

(2) $$\int_0^2 2(x-1)dx = 2\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2 = 2\left\{\left(\frac{4}{2}-2\right)-(0-0)\right\} = \mathbf{0} \qquad (答)$$

(3) $$\int_0^1 (6x^2-3)dx = \Big[2x^3-3x\Big]_0^1 = (2-3)-(0-0) = \mathbf{-1} \qquad (答)$$

(4) $$\int_{-1}^1 (x^2-3x)dx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad (答)$$

(5) $$\int_2^{-2} (3+x-x^2)dx = \int_{-2}^2 (x^2-x-3)dx = 2\int_0^2 (x^2-3)dx$$
$$= 2\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_0^2 = 2\left(\frac{8}{3}-6\right) = \boldsymbol{-\frac{20}{3}} \qquad (答)$$

(6) $$\int_0^{-1} (9x^2+4x-1)dx = \Big[3x^3+2x^2-x\Big]_0^{-1}$$
$$= (-3+2+1)-(0+0-0) = \mathbf{0} \qquad (答)$$

(7) $$\int_{-2}^{1}(3x^2-2x-1)dx=\Big[x^3-x^2-x\Big]_{-2}^{1}$$
$$=(1-1-1)-(-8-4+2)=\mathbf{9} \qquad \text{(答)}$$

(8) $$\int_{-1}^{2}(x^2-2x-2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2-2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{1}{3}\{8-(-1)\}-(4-1)-2\{2-(-1)\}=\mathbf{-6} \qquad \text{(答)}$$

(9) $$\int_{3}^{2}(x^2-4x-3)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-3x\right]_{3}^{2}$$
$$=\frac{1}{3}(8-27)-2(4-9)-3(2-3)=\mathbf{\frac{20}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $$\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3-x)dx=\mathbf{0} \qquad \text{(答)}$$

(2) $$\int_{-1}^{0}(x^2-1)dx+\int_{0}^{1}(x^2-1)dx=\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(x^2-1)dx$$
$$=2\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{0}^{1}$$
$$=2\left(\frac{1}{3}-1\right)=\mathbf{-\frac{4}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $$\int_{-2}^{1}(4x^3+3x^2-2x-2)dx-\int_{1}^{2}(2+2x-3x^2-4x^3)dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(4x^3+3x^2-2x-2)dx+\int_{1}^{2}(4x^3+3x^2-2x-2)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2-2x-2)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(3x^2-2)dx$$
$$=2\Big[x^3-2x\Big]_{0}^{2}=2\cdot\left(2^3-2\cdot 2\right)=\mathbf{8} \qquad \text{(答)}$$

(4) $$\int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx+\int_{a}^{c}(x-x^2-x^3)dx$$
$$=\int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx-\int_{a}^{c}(x^3+x^2-x)dx$$
$$=\int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx+\int_{c}^{a}(x^3+x^2-x)dx$$
$$=\int_{-a}^{a}(x^3+x^2-x)dx$$
$$=2\int_{0}^{a}x^2dx$$
$$=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $1\leqq x\leqq 3$ において，$|x-3|=-(x-3)$ より
$$\int_1^3|x-3|dx=\int_1^3\{-(x-3)\}dx$$
$$=-\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_1^3$$
$$=-\left\{\left(\frac{9}{2}-9\right)-\left(\frac{1}{2}-3\right)\right\}=\mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $$|2x-4|=\begin{cases}-(2x-4) & (0\leqq x\leqq 2)\\ 2x-4 & (2\leqq x\leqq 3)\end{cases}$$ より

$$\int_0^3|2x-4|dx=\int_0^2\{-(2x-4)\}dx+\int_2^3(2x-4)dx$$
$$=-\left[x^2-4x\right]_0^2+\left[x^2-4x\right]_2^3$$
$$=-\{(4-8)-(0-0)\}+\{(9-12)-(4-8)\}=\mathbf{5} \qquad \text{(答)}$$

(3) $$|x^2-1|=\begin{cases}-(x^2-1) & (0\leqq x\leqq 1)\\ x^2-1 & (1\leqq x\leqq 2)\end{cases}$$ より

$$\int_0^2|x^2-1|dx=\int_0^1\{-(x^2-1)\}dx+\int_1^2(x^2-1)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2$$
$$=-\left\{\left(\frac{1}{3}-1\right)-(0-0)\right\}+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$
$$=\mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

(4)

$$\left|x^2-2x-3\right|=\begin{cases}-(x^2-2x-3) & (0 \leqq x \leqq 3)\\ x^2-2x-3 & (3 \leqq x \leqq 4)\end{cases} \quad \text{より}$$

$$\int_0^4 \left|x^2-2x-3\right|dx=\int_0^3\{-(x^2-2x-3)\}dx+\int_3^4(x^2-2x-3)dx$$

ここで

$$g(x)=-(x^2-2x-3)$$
$$G(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x \quad (g(x) \text{ の不定積分の }1\text{ つ})$$

とおくと，上式の右辺は

$$\begin{aligned}\int_0^3 g(x)dx+\int_3^4\{-g(x)\}dx &= \int_0^3 g(x)dx+\int_4^3 g(x)dx\\ &= \Big[G(x)\Big]_0^3+\Big[G(x)\Big]_4^3\\ &= 2G(3)-G(0)-G(4)\\ &= 2(-9+9+9)-(0-0-0)\\ &\qquad -\left(-\frac{64}{3}+16+12\right)\\ &= \mathbf{\frac{34}{3}} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

**コメント**

本問のように被積分関数を $g(x)$ などとおくことで，計算の見通しが非常に良くなる．この方法は被積分関数が複雑になればなるほど有効である．

(5)

$$\left|2x^2-3x-2\right|=\begin{cases}-(2x^2-3x-2) & \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2\right)\\ 2x^2-3x-2 & \left(-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{2},\ 2 \leqq x \leqq 3\right)\end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^3 \left|2x^2-3x-2\right|dx\\ &=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(2x^2-3x-2)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^2\{-(2x^2-3x-2)\}dx\\ &\qquad\qquad +\int_2^3(2x^2-3x-2)dx\end{aligned}$$

ここで

$$g(x)=2x^2-3x-2,$$

$$G(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x \quad (g(x) \text{ の不定積分の }1\text{ つ})$$

とおくと，上式の右辺は

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{2} \{-g(x)\}dx + \int_{2}^{3} g(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{2}^{-\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{2}^{3} g(x)dx$$

$$= \Big[G(x)\Big]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \Big[G(x)\Big]_{2}^{-\frac{1}{2}} + \Big[G(x)\Big]_{2}^{3}$$

$$= 2G\left(-\frac{1}{2}\right) + G(3) - G(-1) - 2G(2)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{12} - \frac{3}{8} + 1\right) + \left(18 - \frac{27}{2} - 6\right)$$

$$- \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) - 2\left(\frac{16}{3} - 6 - 4\right)$$

$$= \mathbf{\frac{109}{12}} \qquad \text{(答)}$$

【7】 $I(a) = \displaystyle\int_0^1 |x^2 - a^2| dx$ とおく．

$$|x^2 - a^2| = \begin{cases} -(x^2 - a^2) & (0 < x < a) \\ x^2 - a^2 & (a \leqq x) \end{cases}$$

であるから，$a$ の値の範囲で場合に分ける．

(i) $0 < a < 1$ のとき

$$I(a) = \int_0^a \{-(x^2 - a^2)\}dx + \int_a^1 (x^2 - a^2)dx \quad \cdots (*)$$

ここで

$$g(x) = -(x^2 - a^2)$$
$$G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + a^2 x \quad (g(x) \text{ の不定積分の } 1 \text{ つ})$$

とおくと

$$(*) = \int_0^a g(x)dx + \int_a^1 \{-g(x)\}dx$$
$$= \int_0^a g(x)dx + \int_1^a g(x)dx$$
$$= \Big[G(x)\Big]_0^a + \Big[G(x)\Big]_1^a$$
$$= 2G(a) - G(0) - G(1)$$
$$= 2\left(-\frac{1}{3}a^3 + a^3\right) - \left(-\frac{1}{3} + a^2\right)$$
$$= \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}$$

(ii) $1 \leqq a$ のとき

$$I(a) = \int_0^1 \{-(x^2 - a^2)\}dx = \int_0^1 g(x)dx$$
$$= \Big[G(x)\Big]_0^1 = G(1) - G(0) = a^2 - \frac{1}{3}$$

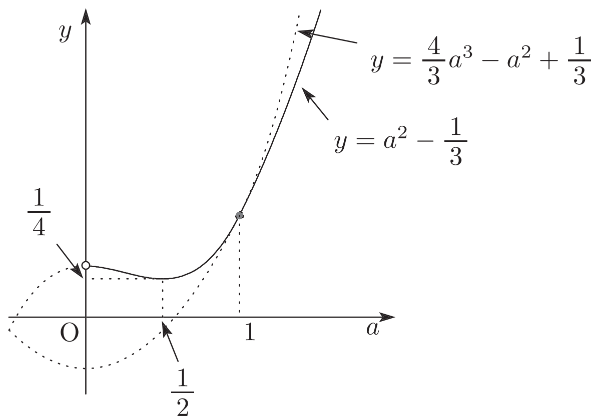
以上より

$$I(a) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}a^3 - a^2 + \dfrac{1}{3} & (0 < a < 1) \\ a^2 - \dfrac{1}{3} & (1 \leqq a) \end{cases}$$

ここで

$$\left(\frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}\right)' = 4a^2 - 2a$$
$$= 2a\,(2a - 1)$$

であるから，$I(a)$ のグラフは次の図のようになる．




ゆえに求める $I(a)$ の最小値は，

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【8】

ポイント

与式における被積分関数を，$x - \alpha$ について展開する．
また，不定積分の公式

$$\int (x + a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x + a)^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を用いる．

≪証明≫

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx \\
&= \int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\right\}dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^2 \\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)(\beta-\alpha)^3 \\
&= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

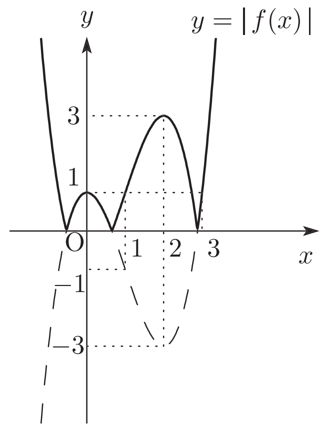
〔証明終〕

【9】(1) $f(x)=x^3-3x^2+1$ より

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2-6x \\
&= 3x(x-2)
\end{aligned}$$

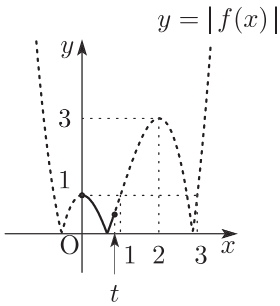
よって，$f(x)$ の増減表は下のようになる．

| $x$ | $\cdots\cdots$ | $0$ | $\cdots\cdots$ | $2$ | $\cdots\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ |

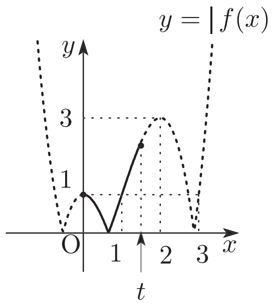



ゆえに $y=|f(x)|$ のグラフの概形は右図のようになる．
したがって $0\leqq x\leqq t$ における最大値は下図のようになる．

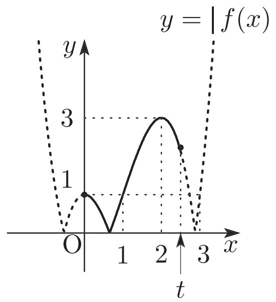
$0\leqq t\leqq 1$ のとき




$1\leqq t\leqq 2$ のとき




$2\leqq t\leqq 3$ のとき




ゆえに求める最大値は

$$\boldsymbol{g(t)=\begin{cases} 1 & (0\leqq t\leqq 1) \\ -t^3+3t^2-1 & (1\leqq t\leqq 2) \\ 3 & (2\leqq t\leqq 3) \end{cases}}$$ （答）

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\int_0^3 g(t)dt &= \int_0^1 1dt + \int_1^2 (-t^3+3t^2-1)dt + \int_2^3 3dt \\ &= \Big[t\Big]_0^1 + \Big[(-\frac{t^4}{4}+t^3-t)\Big]_1^2 + \Big[3t\Big]_2^3 \\ &= 1 + \frac{9}{4} + 3 \\ &= \boldsymbol{\frac{25}{4}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【10】(1) $f(t)$ に関する条件より

$$f(t) = \int f'(t)dt = -t + C_1 \quad (C_1\text{は定数})$$

ここで，$f(0) = C_1 = 2$ より

$$\therefore\ f(t) = -t + 2$$

また $g(t)$ に関する条件より

$$\begin{aligned}g(t) &= \int g'(t)dt \\ &= \int (-t+2)dt \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + 2t + C_2 \quad (C_2\text{は定数})\end{aligned}$$

同様に，$g(0) = C_2 = 7$ より

$$\therefore \quad g(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 7$$

ここで

$$\begin{cases} x = f(t) = -t + 2 \\ y = g(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 7 \end{cases}$$

とおく．第 1 式より $t = -x + 2$．これを第 2 式に代入して

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{2}(-x+2)^2 + 2(-x+2) + 7 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 9\end{aligned}$$

ところで $0 \leqq t \leqq c$ より

$$0 \leqq -x + 2 \leqq c \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - c \leqq x \leqq 2$$

以上より，求める軌跡は

**放物線 $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + 9}$ の $\boldsymbol{2 - c \leqq x \leqq 2}$ の部分** (答)

(2) (1) と同様にして

$$h(t) = \int h'(t)dt = t + h(0) = t + f(c) = t + 2 - c$$

$$\begin{aligned} k(t) &= \int k'(t)dt = \frac{1}{2}t^2 + (2-c)t + k(0) \\ &= \frac{1}{2}t^2 + (2-c)t + g(c) \\ &= \frac{1}{2}t^2 + (2-c)t - \frac{1}{2}c^2 + 2c + 7 \end{aligned}$$

点 $(h(t),\ k(t))$ の軌跡が原点を通るとき,

$$\begin{cases} t + 2 - c = 0 & \cdots ① \\ \dfrac{1}{2}t^2 + (2-c)t - \dfrac{1}{2}c^2 + 2c + 7 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

となる $t$ が存在するように $c$ を定めればよい．ここで

$$\begin{cases} ① \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - c = -t \\ ② \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{2}t^2 + (2-c)t - \dfrac{1}{2}(2-c)^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

であるから，$c$ を消去すると

$$\frac{1}{2}t^2 - t^2 - \frac{1}{2}t^2 + 9 = 0 \quad \therefore\ t = 3 \quad (\because\ t \geqq 0)$$

よって，① より

$$2 - c = -3 \qquad \therefore\ \boldsymbol{c = 5} \qquad (\text{答})$$

## 添削課題

【1】$C$ は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{2}xdx = \boldsymbol{\frac{1}{4}x^2 + C}$ (答)

(2) $\displaystyle\int (x-6)dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 - 6x + C}$ (答)

(3) $\displaystyle\int (x^2+x)dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C}$ (答)

(4) $\displaystyle\int (t^2+2t)dt = \boldsymbol{\frac{1}{3}t^3 + t^2 + C}$ (答)

(5) $$\begin{aligned}\int (2x-5)^2dx &= \int (4x^2-20x+25)dx \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}x^3 - 10x^2 + 25x + C} \quad (答)\end{aligned}$$

＜別解＞

$\{(2x-5)^3\}' = 3\cdot 2\cdot(2x-5)^2 = 6(2x-5)^2$

$\therefore\ (2x-5)^2 = \dfrac{1}{6}\{(2x-5)^3\}'$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int (2x-5)^2dx &= \frac{1}{6}\int \{(2x-5)^3\}'dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(2x-5)^3 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \quad (答)\end{aligned}$$

ここで, $C_1 = C + \dfrac{125}{6}$ である.

(6) $$\begin{aligned}\int x(x-3)(x+3)dx &= \int (x^3-9x)dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + C} \quad (答)\end{aligned}$$

【2】(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3-1^3}{3} = \boldsymbol{\frac{7}{3}}$ (答)

(2) $\displaystyle\int_1^0 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^0 = (0-0) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$ (答)

(3) $$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x^2-3x+1)dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 6 + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 1\right) = \boldsymbol{\frac{3}{2}} \quad (答)\end{aligned}$$

(4) $$\int_1^2 y(y+3)dy = \int_1^2 (y^2+3y)dy$$
$$= \left[\frac{y^3}{3}+\frac{3}{2}y^2\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{8}{3}+6\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right) = \mathbf{\frac{41}{6}} \qquad \text{(答)}$$

(5) $$\int_0^3 (x+3)^2 dx = \int_0^3 (x^2+6x+9)dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}+3x^2+9x\right]_0^3$$
$$= (9+27+27)-(0+0+0) = \mathbf{63} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$$\{(x+3)^3\}' = 3\cdot 1\cdot (x+3)^2 = 3(x+3)^2$$
$$\therefore\ (x+3)^2 = \frac{1}{3}\{(x+3)^3\}'$$

$$\therefore\ \int_0^3 (x+3)^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \{(x+3)^3\}' dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x+3)^3\right]_0^3$$
$$= \frac{6^3-3^3}{3} = \mathbf{63} \qquad \text{(答)}$$

(6) $$\int_{-2}^3 (x+1)(x-2)dx = \int_{-2}^3 (x^2-x-2)dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^3$$
$$= \left(9-\frac{9}{2}-6\right)-\left(-\frac{8}{3}-2+4\right) = \mathbf{-\frac{5}{6}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1)
$$\int_{-2}^{-1}(3x^2-2x-1)dx - \int_{-1}^{1}(1+2x-3x^2)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(3x^2-2x-1)dx + \int_{-1}^{1}(3x^2-2x-1)dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(3x^2-2x-1)dx$$
$$=\left[x^3-x^2-x\right]_{-2}^{1} = (1-1-1)-(-8-4+2) = \mathbf{9} \qquad \text{(答)}$$

(2)
$$\int_{-3}^{-2}(-x^2+x+5)dx-\int_{1}^{-2}(-x^2+x+5)dx$$
$$=\int_{-3}^{-2}(-x^2+x+5)dx+\int_{-2}^{1}(-x^2+x+5)dx$$
$$=\int_{-3}^{1}(-x^2+x+5)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-3}^{1}=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+5\right)-\left(9+\frac{9}{2}-15\right)=\boldsymbol{\frac{20}{3}}\qquad\text{(答)}$$

【4】(1) $|x+1|=\begin{cases}-(x+1) & (-2\leqq x\leqq -1)\\ x+1 & (-1\leqq x\leqq 1)\end{cases}$ より

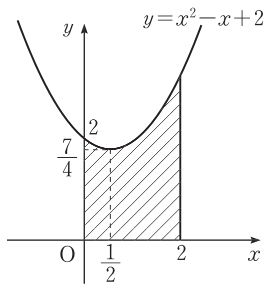
$$\int_{-2}^{1}|x+1|dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}\{-(x+1)\}dx+\int_{-1}^{1}(x+1)dx$$
$$=-\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}$$
$$=-\left\{\left(\frac{1}{2}-1\right)-(2-2)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{2}}\qquad\text{(答)}$$

(2) $|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & (-3\leqq x\leqq -1,\ 1\leqq x\leqq 3)\\ -(x^2-1) & (-1\leqq x\leqq 1)\end{cases}$ より

$$\int_{-3}^{3}|x^2-1|dx$$
$$=\int_{-3}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}-(x^2-1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-1)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-3}^{-1}-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{3}$$
$$=\left\{\left(-\frac{1}{3}+1\right)-(-9+3)\right\}-\left\{\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right\}+\left\{(9-3)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+7\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)+\left(7-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{44}{3}}\qquad\text{(答)}$$

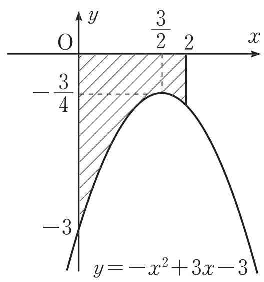
## 問題

【1】(1) 右図より



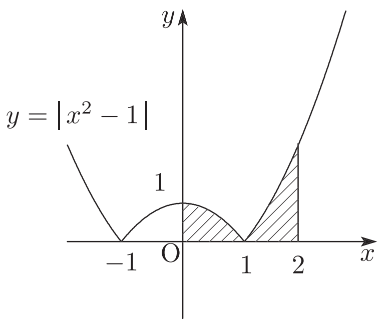

$$\int_0^2 (x^2-x+2)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2$$
$$=\left(\frac{8}{3}-2+4\right)$$
$$=\mathbf{\frac{14}{3}}$$ (答)

(2) 右図より



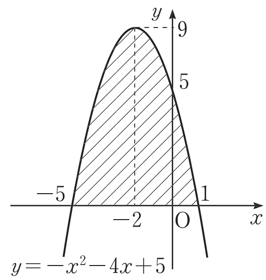

$$\int_0^2 \left\{0-(-x^2+3x-3)\right\}dx$$
$$=-\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-3x\right]_0^2$$
$$=-\left(-\frac{8}{3}+6-6\right)$$
$$=\mathbf{\frac{8}{3}}$$ (答)

(3) 右図より




$$\int_0^1 (-x^2+1)dx+\int_1^2 (x^2-1)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+1\right)+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$
$$=\mathbf{2}$$ (答)

【2】(1) 右図より

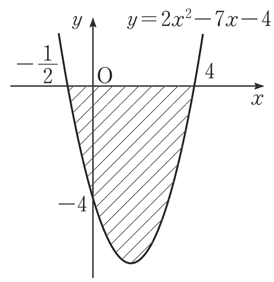



$$\int_{-5}^{1}(-x^2-4x+5)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_{-5}^{1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}-2+5\right)-\left(\frac{125}{3}-50-25\right)$$
$$=\mathbf{36} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$$\int_{-5}^{1}(-x^2-4x+5)dx=-\int_{-5}^{1}(x+5)(x-1)dx$$
$$=\frac{\{1-(-5)\}^3}{6}$$
$$=\mathbf{36} \qquad \text{(答)}$$

(2) 右図より

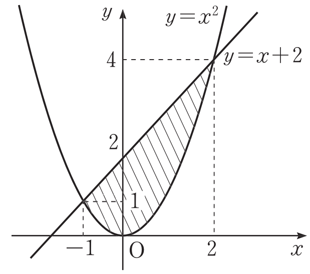



$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\{0-(2x^2-7x-4)\}dx$$
$$=-\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-4x\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}$$
$$=-\left(\frac{128}{3}-56-16\right)+\left(-\frac{1}{12}-\frac{7}{8}+2\right)$$
$$=\mathbf{\frac{243}{8}} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\{0-(2x^2-7x-4)\}dx=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)dx$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left\{4-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3$$
$$=\mathbf{\frac{243}{8}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 右図より

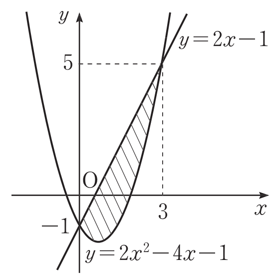



$$\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$
$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$ (答)

＜別解＞

$$\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$
$$=\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}$$
$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$ (答)

(2) 右図より



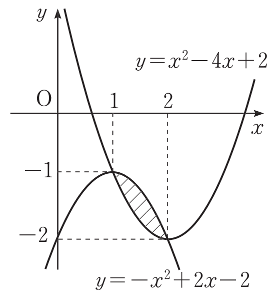

$$\int_{0}^{3}\{(2x-1)-(2x^2-4x-1)\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=(-18+27)$$
$$=\mathbf{9}$$ (答)

＜別解＞

$$\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)dx=-2\int_{0}^{3}x(x-3)dx$$
$$=2\cdot\frac{(3-0)^3}{6}$$
$$=\mathbf{9}$$ (答)

(3) 右図より

$$\int_1^2 \{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$
$$=\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \text{(答)}$$




＜別解＞

$$\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx=-2\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$$
$$=2\cdot\frac{(2-1)^3}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \text{(答)}$$

**コメント**

多くの面積計算においては，公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

をうまく使うことにより，計算が大幅に簡単になる.

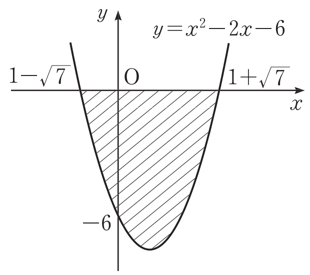
【4】(1) 2 次方程式

$$x^2-2x-6=0$$

を解くと

$$x=1\pm\sqrt{7}$$

ゆえに右図より




$$\int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}}\{0-(x^2-2x-6)\}dx$$

$$=-\int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}}\left\{x-(1-\sqrt{7})\right\}\left\{x-(1+\sqrt{7})\right\}dx$$

$$=\frac{\left\{(1+\sqrt{7})-(1-\sqrt{7})\right\}^3}{6}$$

$$=\boldsymbol{\frac{28\sqrt{7}}{3}}\qquad\text{(答)}$$

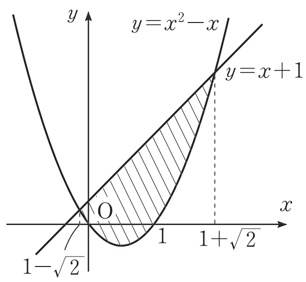
(2) 2 次方程式

$$x^2-x=x+1$$

を解くと

$$x=1\pm\sqrt{2}$$

ゆえに右図より




$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\{(x+1)-(x^2-x)\}dx$$

$$=-\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\left\{x-(1-\sqrt{2})\right\}\left\{x-(1+\sqrt{2})\right\}dx$$

$$=\frac{\left\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\right\}^3}{6}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}}\qquad\text{(答)}$$

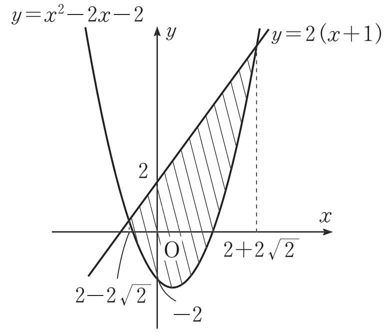
(3) 2 次方程式

$$x^2-2x-2=2(x+1)$$

を解くと

$$x=2\pm2\sqrt{2}$$

ゆえに右図より



$$\int_{2-2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{2}}\{2(x+1)-(x^2-2x-2)\}dx$$
$$=-\int_{2-2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{2}}\{x-(2-2\sqrt{2})\}\{x-(2+2\sqrt{2})\}$$
$$=\frac{\{(2+2\sqrt{2})-(2-2\sqrt{2})\}^3}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{64\sqrt{2}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(4) 2 次方程式

$$x^2-2x-3=0$$

を解いて

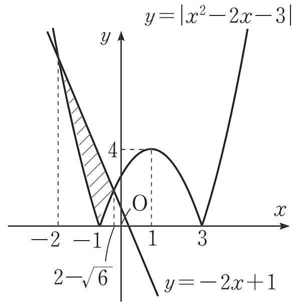
$$x=-1,\ 3$$

また

$$x^2-2x-3=-2x+1$$

を解いて

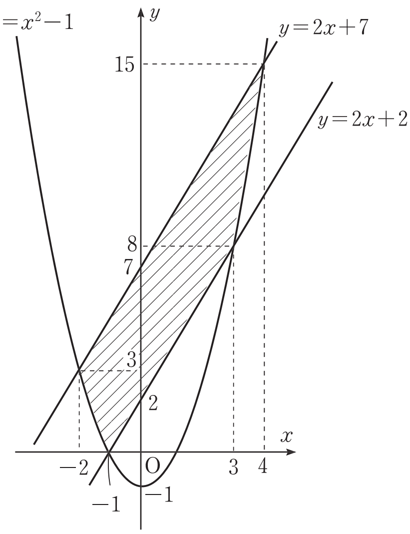
$$x=\pm 2$$




問題の曲線と直線は $x<0$ において，上図のように交わるから

$$\int_{-2}^{-1}\{(-2x+1)-(x^2-2x-3)\}dx$$
$$+\int_{-1}^{2-\sqrt{6}}\{(-2x+1)-(-x^2+2x+3)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+4)dx+\int_{-1}^{2-\sqrt{6}}(x^2-4x-2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-2x\right]_{-1}^{2-\sqrt{6}}$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{3}-4\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right\}$$
$$+\left[\left\{\frac{(2-\sqrt{6})^3}{3}-2(2-\sqrt{6})^2-2(2-\sqrt{6})\right\}-\left(-\frac{1}{3}-2+2\right)\right]$$
$$=\boldsymbol{\frac{12\sqrt{6}-22}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 右図より




$$\int_{-2}^{-1}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx$$
$$+\int_{-1}^{3}\{(2x+7)-(2x+2)\}dx$$
$$+\int_{3}^{4}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+2x+8)dx$$
$$+\int_{-1}^{3}5dx+\int_{3}^{4}(-x^2+2x+8)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{-2}^{-1}+\left[5x\right]_{-1}^{3}$$
$$+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{3}^{4}$$
$$=\left(\frac{1}{3}+1-8\right)-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)+15-(-5)$$
$$+\left(-\frac{64}{3}+16+32\right)-(-9+9+24)$$
$$=\mathbf{\frac{76}{3}}\qquad\text{(答)}$$

＜別解＞

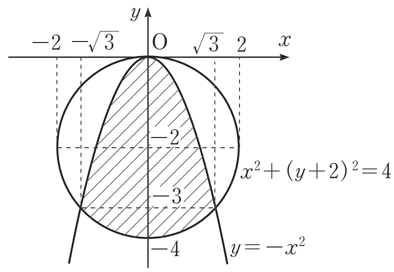
公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いると,

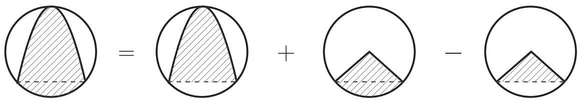
$$\int_{-2}^{4}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx-\int_{-1}^{3}\{(2x+2)-(x^2-1)\}dx$$
$$=-\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)dx+\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$$
$$=\frac{\{4-(-2)\}^3}{6}-\frac{\{3-(-1)\}^3}{6}$$
$$=\mathbf{\frac{76}{3}}\qquad\text{(答)}$$

(2) $y=-x^2$ と $x^2+(y+2)^2=4$ の交点の $x$ 座標は

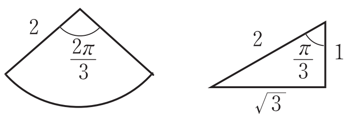



$$
\begin{aligned}
x^2+(-x^2+2)^2&=4\\
x^2+x^4-4x^2+4&=4\\
x^4-3x^2&=0\\
\therefore\ x&=0,\ \pm\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

ゆえに




であり，



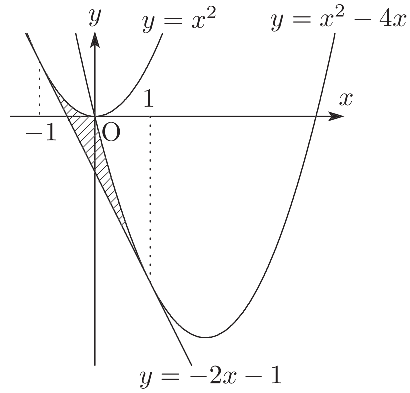

より，求める面積は

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left\{(-x^2)-(-3)\right\}dx+\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1\right)\\
&=-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)dx+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\\
&=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right\}^3+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\\
&=\boldsymbol{3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}\qquad\text{(答)}
\end{aligned}
$$

【6】

$C$ : $y=x^2$
$C'$ : $y=x^2-4x$

とする.




$y=x^2$ 上の点 $(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線の方程式は

$$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$$
$$\therefore\ y=2\alpha x-\alpha^2$$

また，$y=x^2-4x$ 上の点 $\left(\beta,\ \beta^2-4\beta\right)$ における接線の方程式は

$$y=(2\beta-4)(x-\beta)+\beta^2-4\beta$$
$$\therefore\ y=(2\beta-4)x-\beta^2$$

これらが一致するから

$$\begin{cases} 2\alpha=2\beta-4 & \cdots① \\ \alpha^2=\beta^2 & \cdots② \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=1 \end{cases}$$

ゆえに $l$ の方程式は

$\boldsymbol{y=-2x-1}$ (答)

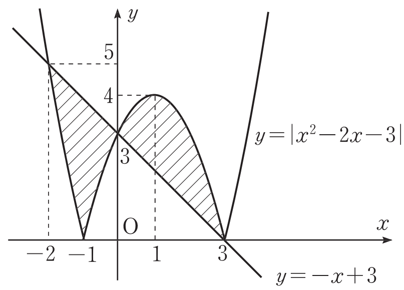
また，$l$ と $C$，$C'$ の接点の $x$ 座標はそれぞれ $x=-1$，$x=1$ であるから，求める面積は右上図より

$$\int_{-1}^{0}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{0}^{1}\{(x^2-4x)-(-2x-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3$$
$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\qquad \text{(答)}$$

【7】

$$y=|x^2-2x-3|$$
$$=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x \leqq -1,\ 3 \leqq x \text{ のとき}) \\ -x^2+2x+3 & (-1 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり，これらを図示すると右のようになる．

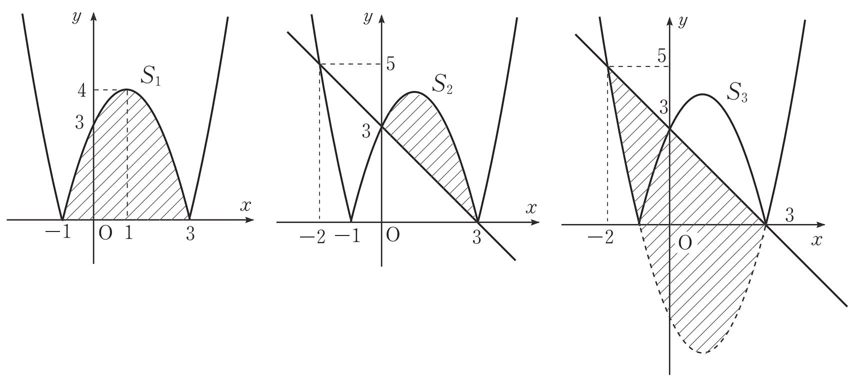



ここで求める面積を $S$，下図の 3 つの面積をそれぞれ $S_1$，$S_2$，$S_3$ とすると

$$S_1=\int_{-1}^{3}\{-(x+1)(x-3)\}dx$$
$$=\frac{\{3-(-1)\}^3}{6}=\frac{32}{3}$$

$$S_2=\int_{0}^{3}\{(-x^2+2x+3)-(-x+3)\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}\{-x(x-3)\}dx$$
$$=\frac{(3-0)^3}{6}=\frac{9}{2}$$

$$S_3=\int_{-2}^{3}\{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{3}\{-(x+2)(x-3)\}dx=\frac{\{3-(-2)\}^3}{6}=\frac{125}{6}$$




ゆえに求める面積は

$$S=S_3-2S_1+2S_2$$
$$=\frac{125}{6}-\frac{64}{3}+9=\boldsymbol{\frac{17}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【8】2 次方程式

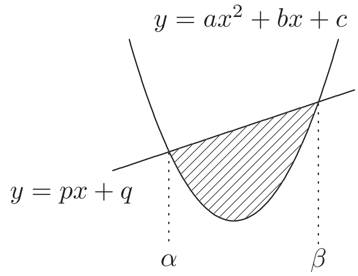
$$ax^2+bx+c=px+q \iff ax^2+(b-p)x+(c-q)=0$$

の 2 解が $x=\alpha,\ \beta \quad (\alpha<\beta)$ であるから

$$ax^2+(b-p)x+(c-q)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

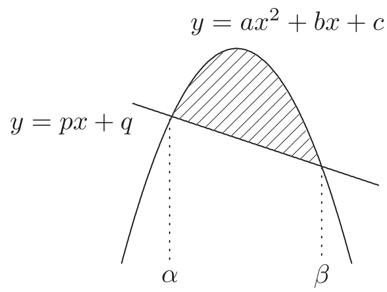
これを用いる.

(i) $a>0$ のとき




$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta \{(px+q)-(ax^2+bx+c)\}dx\\
=&-\int_\alpha^\beta \{ax^2+(b-p)x+(c-q)\}dx\\
=&-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\\
=&a\cdot\left\{-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx\right\}\\
=&a\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}
\end{aligned}$$

(ii) $a<0$ のとき




$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta \{(ax^2+bx+c)-(px+q)\}dx\\
=&\int_\alpha^\beta \{ax^2+(b-p)x+(c-q)\}dx\\
=&\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\\
=&-a\cdot\left\{-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx\right\}\\
=&-a\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}
\end{aligned}$$

以上より，求める面積は

$$\boldsymbol{\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3} \qquad (答)$$

【9】(1) $f(x)$ は 3 次式であるから $f'(x)$ は 2 次式.

$f(x)$ が $x=1,\ 3$ で極値をとるから,

$$f'(x)=a(x-1)(x-3) \quad \cdots(*)$$

とおける．また，$x=2$ における曲線 $y=f(x)$ の接線は

$$y=-3x+8$$

より，$x=2$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(2)=-3$ である．$(*)$ より,

$$f'(2)=a(2-1)(2-3)=-3 \qquad \therefore\ a=3$$

よって

$$f'(x)=3(x-1)(x-3)=3x^2-12x+9$$

ここで

$$f(x)=\int f'(x)dx=x^3-6x^2+9x+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

であり，条件より $f(2)=2$ であるから上式に代入して

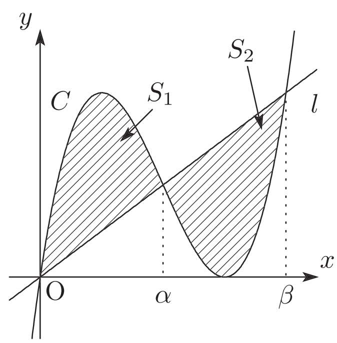
$$f(2)=2^3-6\cdot 2^2+9\cdot 2+C=2 \qquad \therefore\ C=0$$

ゆえに求める関数 $f(x)$ は

$$\boldsymbol{f(x)=x^3-6x^2+9x} \qquad \text{(答)}$$

(2) $l\ :\ y=ax$ とおく.

$f(1)=1-6+9=4$，$f(3)=27-54+27=0$ より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．$C$ と $l$ との共有点のうち原点と異なるものの座標を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと




$$S_1=\int_0^{\alpha}\{f(x)-ax\}dx$$
$$S_2=\int_{\alpha}^{\beta}\{ax-f(x)\}dx$$

$S_1=S_2$ より

$$\int_0^{\alpha}\{f(x)-ax\}dx-\int_{\alpha}^{\beta}\{ax-f(x)\}dx=0$$
$$\int_0^{\alpha}\{f(x)-ax\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-ax\}dx=0$$
$$\int_0^{\beta}\{f(x)-ax\}dx=0$$
$$\int_0^{\beta}\{x^3-6x^2+(9-a)x\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{1}{2}(9-a)x^2\right]_0^{\beta}=0$$
$$\frac{1}{4}\beta^4-2\beta^3+\frac{1}{2}(9-a)\beta^2=0$$

$\beta \fallingdotseq 0$ であるから上式は

$$\beta^2-8\beta+2(9-a)=0 \quad \cdots ①$$

ここで $\beta$ は方程式 $f(x)-ax=0$，つまり

$$x^3-6x^2+(9-a)x=0$$

の実数解であるから

$$\beta^3-6\beta+(9-a)\beta=0$$
$$\beta^2-6\beta+(9-a)=0$$
$$\therefore\ 9-a=-\beta^2+6\beta \quad \cdots ②$$

② を ① に代入して

$$\beta^2-8\beta+2\left(-\beta^2+6\beta\right)=0 \qquad \therefore\ \beta=4 \quad (\beta \fallingdotseq 0)$$

② に代入して

$$9-a=-4^2+6\cdot 4 \qquad \therefore\ a=1$$

$f(x)-x=0$ を解くと

$$x^3-6x^2+8x=0$$
$$\therefore\ x=0,\ 2\ (=\alpha),\ 4(=\beta)$$

ゆえに求める面積は

$$\begin{aligned} S_1+S_2 &= 2\int_0^2 \{x^3-6x^2+8x\}dx \\ &= 2\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_0^2 \\ &= 2(4-16+16) \\ &= \mathbf{8} \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

【10】(1) 与えられた関数を微分すると

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax$$
$$g'(x) = -2x + b$$

$y = f(x)$，$y = g(x)$ が $x = 1$ で接線を共有するから

$$\begin{cases} f(1) = g(1) & \cdots ① \\ f'(1) = g'(1) & \cdots ② \end{cases}$$

② より

$$-3 + 2a = -2 + b \iff b = 2a - 1 \quad \cdots ②'$$

このとき ① は成立．ここで 2 曲線は点 (1, 7) を通るから，②′ を用いて

$$g(1) = -1^2 + (2a-1)\cdot 1 + a = 7 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a = 3} \qquad (答)$$

このとき ②′ より

$$\boldsymbol{b} = 6 - 1 = \boldsymbol{5} \qquad (答)$$

(2) $g'(x) = -2x + 5$ より，$g'(1) = 3$
ゆえに求める接線の方程式は

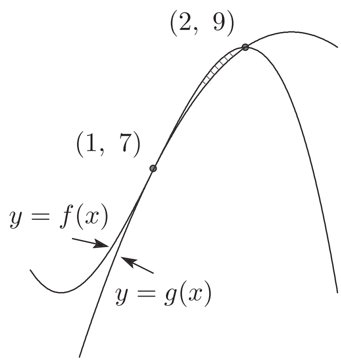
$$y - 7 = 3(x-1) \qquad \boldsymbol{y = 3x + 4} \qquad (答)$$

(3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$ より，$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$
ゆえに

$$\begin{cases} \textbf{極小値} & \boldsymbol{f(0) = 5} \\ \textbf{極大値} & \boldsymbol{f(2) = 9} \end{cases} \qquad (答)$$

(4) 方程式 $f(x) = g(x)$ を解くと，$x = 1$ を重解にもつことに注意して

$$-x^3 + 3x^2 + 5 = -x^2 + 5x + 3$$
$$(x-1)^2(x-2) = 0$$
$$\therefore\ x = 1,\ 2$$




$$\begin{aligned}
\therefore\ \int_1^2 \{g(x) - f(x)\}dx &= \int_1^2 \{-(x-1)^2(x-2)\}dx \\
&= -\int_1^2 \{(x-1)^2(x-1-1)\}dx \\
&= -\int_1^2 \{(x-1)^3 - (x-1)^2\}dx \\
&= -\left[\frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2 \\
&= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{12}} \qquad (答)
\end{aligned}$$

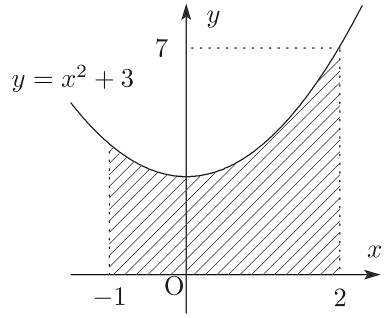
## 添削課題

【1】(1) 右図より

$$\int_{-1}^{2}(x^2+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{8}{3}+6\right)-\left(-\frac{1}{3}-3\right)$$

$$=\mathbf{12}\qquad\text{(答)}$$




(2) 右図より

$$\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx$$

$$+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx$$

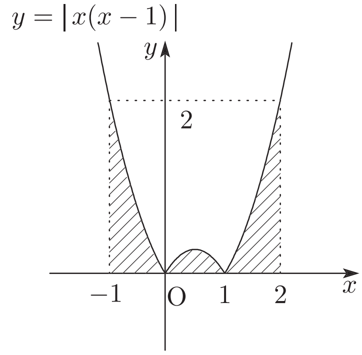
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$=0-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-0$$

$$+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{11}{6}}\qquad\text{(答)}$$




【2】(1) 右図より

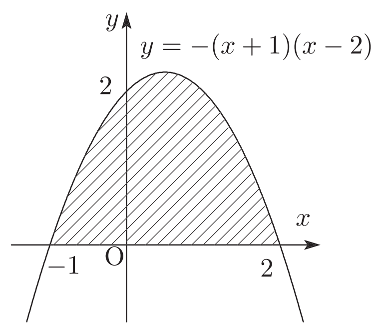
$$\int_{-1}^{2}-(x+1)(x-2)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$

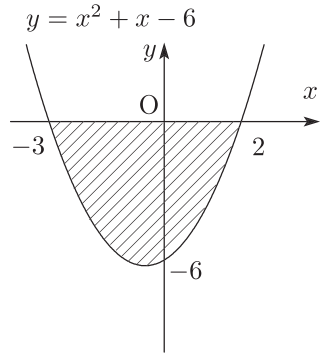
$$=\mathbf{\frac{9}{2}}\qquad\text{(答)}$$




＜別解＞

$$\int_{-1}^{2}-(x+1)(x-2)dx=\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}=\mathbf{\frac{9}{2}}\qquad\text{(答)}$$

(2) 右図より

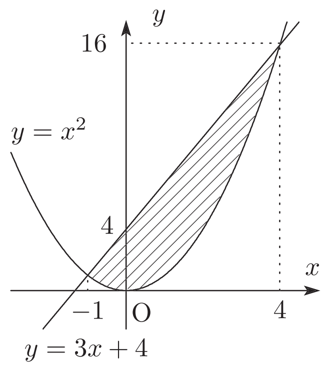



$$
\begin{aligned}
&-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx \\
&=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-3}^{2} \\
&=-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)+\left(-9+\frac{9}{2}+18\right) \\
&=\boldsymbol{\frac{125}{6}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

＜別解＞

$$
\begin{aligned}
-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx &= -\int_{-3}^{2}(x-2)(x+3)dx \\
&= \frac{\{2-(-3)\}^3}{6} \\
&= \boldsymbol{\frac{125}{6}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

**【3】** (1) 右図より

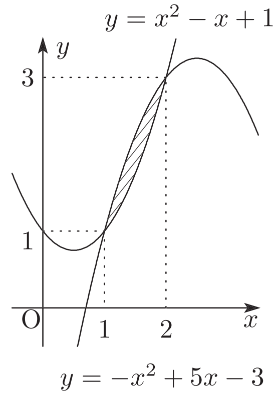



$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{4}\{(3x+4)-x^2\}dx \\
&=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4} \\
&=\left(-\frac{64}{3}+24+16\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right) \\
&=\boldsymbol{\frac{125}{6}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

＜別解＞

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{4}\{(3x+4)-x^2\}dx &= -\int_{-1}^{4}(x+1)(x-4)dx \\
&= \frac{\{4-(-1)\}^3}{6} \\
&= \boldsymbol{\frac{125}{6}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2) 右図より




$$\int_1^2\{(-x^2+5x-3)-(x^2-x+1)\}dx$$
$$=\int_1^2(-2x^2+6x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$$\int_1^2\{(-x^2+5x-3)-(x^2-x+1)\}dx$$
$$=-2\int_1^2(x-1)(x-2)dx=2\cdot\frac{(2-1)^3}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-x+2$ とおく．このとき，$f'(x)=\dfrac{1}{2}x-1$ である．

$C$ 上の点 $(p,\ f(p))$ における $C$ の接線の方程式は

$$y=\left(\frac{1}{2}p-1\right)(x-p)+f(p)$$
$$\therefore\quad y=\left(\frac{1}{2}p-1\right)x-\frac{1}{4}p^2+2$$

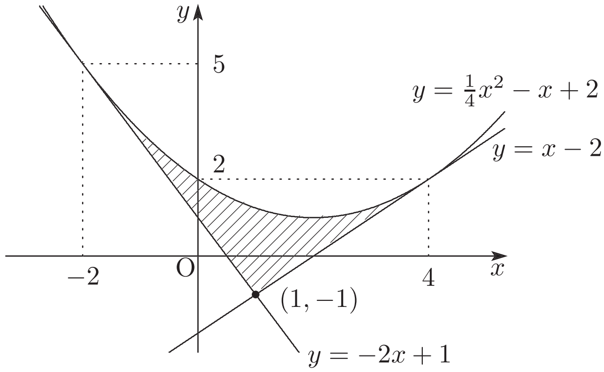
と表せる．これが点 $(1,\ -1)$ を通るので

$$-1=-\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+1$$
$$p^2-2p-8=0$$
$$(p+2)(p-4)=0$$
$$\therefore\quad p=-2,\ 4$$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-2x+1,\quad y=x-2}\quad \text{(答)}$$

(2) $C$ と (1) で求めた 2 接線の位置関係は下の図のようになる．




求める面積は図の斜線部分であるから

$$
\begin{aligned}
&\int_{-2}^{1}\{f(x)-(-2x+1)\}\,dx+\int_{1}^{4}\{f(x)-(x-2)\}\,dx\\
&=\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)dx+\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{4}x^2-2x+4\right)dx\\
&=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{1}{12}x^3-x^2+4x\right]_{1}^{4}\\
&=\frac{1}{12}(1+8)+\frac{1}{2}(1-4)+(1+2)+\frac{1}{12}(64-1)-(16-1)+4(4-1)\\
&=\frac{72}{12}-\frac{3}{2}\\
&=\boldsymbol{\frac{9}{2}}\quad(\text{答})
\end{aligned}
$$

## 問題

【1】(1) $f'(x)=-2x+3$ より

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=-x^2+3x+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

ここで $f(0)=2$ であるから，

$$f(0)=C=2$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f(x)=-x^2+3x+2} \qquad (\text{答})$$

(2) $f'(x)=3(x+2)(x-4)=3x^2-6x-24$ より

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=x^3-3x^2-24x+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

ここで $f(-1)=0$ であるから

$$f(-1)=-1-3+24+C=0$$
$$\therefore\ C=-20$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f(x)=x^3-3x^2-24x-20} \qquad (\text{答})$$

【2】$g(x)=px+q$　($p,\ q$ は実数の定数) とおくと，条件 (i) より

$$\int_0^1 f(x)(px+q)dx=0$$
$$\therefore\ p\int_0^1 xf(x)dx+q\int_0^1 f(x)dx=0$$

これが任意の $p,\ q$ に対して成り立つので

$$\int_0^1 xf(x)dx=0 \quad \cdots①$$
$$\int_0^1 f(x)dx=0 \quad \cdots②$$

ここで，$f(x)=ax^2+bx+c$　($a,\ b,\ c$ は実数の定数，$a\neq 0$) とおくと，

①, ② より

$$\int_0^1 (ax^3+bx^2+cx)dx = \left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0$$

$$\int_0^1 (ax^2+bx+c)dx = \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^1 = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0$$

また，条件 (ii) から

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}a+2c=-1$$

ゆえに

$$\begin{cases} \dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{2}=0 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c=0 \\ \dfrac{2}{3}a+2c=-1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

よって求める関数 $f(x)$ は

$$\boldsymbol{f(x)=-x^2+x-\frac{1}{6}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 与式の両辺を $x$ で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(x^2-2x-3) \qquad \therefore\ f(x)=\boldsymbol{2x-2} \qquad \text{(答)}$$

また与式で $x=a$ として

$$\int_a^a f(t)dt = a^2-2a-3=0$$

$$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a=-1,\ 3} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式の両辺を $x$ で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = \frac{d}{dx}(x^3+2x^2+a)$$

$$\therefore\ xf(x)=3x^2+4x$$

これが $x$ の恒等式であるから，両辺を $x$ で割って

$$\boldsymbol{f(x)=3x+4} \qquad \text{(答)}$$

また与式で $x=0$ として

$$\int_0^0 tf(t)dt = \boldsymbol{a=0} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1)
$$a=\int_0^2 f(t)dt \quad (a\text{ は実数の定数}) \quad \cdots(*)$$
とおくと，与式は $f(x)=x+a$ であるから，$(*)$ に代入して
$$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (t+a)dt=\left[\frac{t^2}{2}+at\right]_0^2$$
$$a=2a+2$$
$$\therefore\ a=-2$$
よって求める関数は

$\boldsymbol{f(x)=x-2}$　　(答)

(2) 与えられた式は
$$\begin{aligned}f(x)&=\int_2^4\{3x-f(t)\}dt\\&=3x\int_2^4 dt-\int_2^4 f(t)dt\\&=3x\cdot\Big[t\Big]_2^4-\int_2^4 f(t)dt\\&=6x-\int_2^4 f(t)dt\end{aligned}$$
であるから
$$a=\int_2^4 f(t)dt \quad (a\text{ は実数の定数}) \quad \cdots(*)$$
とおくと，$f(x)=6x-a$ となる．$(*)$ に代入して
$$a=\int_2^4(6t-a)dt=\Big[3t^2-at\Big]_2^4=(48-4a)-(12-2a)$$
$$a=-2a+36$$
$$\therefore\ a=12$$
よって求める関数は

$\boldsymbol{f(x)=6x-12}$　　(答)

(3) 与えられた関数は
$$\begin{aligned}f(x)&=x^2+\int_1^2 xf(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt\\&=x^2+x\int_1^2 f(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt\end{aligned}$$
となるから，
$$a=\int_1^2 f(t)dt,\quad b=\int_0^2 f(t)dt \quad (a,\ b\text{ は実数の定数}) \quad \cdots(*)$$

とおくと $f(x)=x^2+ax-2b$ であるから，$(*)$ より

$$a=\int_1^2(t^2+at-2b)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-2bt\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}(8-1)+\frac{a}{2}(4-1)-2b(2-1)$$
$$a=\frac{3}{2}a-2b+\frac{7}{3}$$
$$\therefore 3a-12b=-14 \quad \cdots ①$$

また，

$$b=\int_0^2(t^2+at-2b)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-2bt\right]_0^2=\frac{8}{3}+2a-4b$$
$$\therefore 6a-15b=-8 \quad \cdots ②$$

①，② を連立して解くと，$a=\dfrac{38}{9}$，$b=\dfrac{20}{9}$

よって求める関数は

$$\boldsymbol{f(x)=x^2+\frac{38}{9}x-\frac{40}{9}} \qquad (答)$$

【5】与えられた条件は

$$\begin{cases} f(1)=-2 & \cdots ① \\ f'(0)=-1 & \cdots ② \\ \displaystyle\int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{6} & \cdots ③ \end{cases}$$

である．$f'(x)=2ax+b$ であるから，② より $b=-1$ とわかる．

よって，

$$f(x)=ax^2-x+c$$

① より

$$f(1)=a-1+c=-2 \qquad \therefore\ c=-a-1 \qquad \cdots ①'$$

③ に代入して

$$\int_0^1(ax^2-x-a-1)dx=\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-ax-x\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{3}-\frac{1}{2}-a-1=-\frac{1}{6}$$
$$\therefore\quad a=-2$$

①$'$ より，$c=1$

$$\therefore\ \boldsymbol{a=-2,\ \ b=-1,\ \ c=1} \qquad (答)$$

【6】(1) $f(x)=ax^2+bx+c$ 　($a,\ b,\ c$ は実数の定数で，$a \neq 0$) とおくと，
$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx=4$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-1}^{1}=4 \qquad \therefore\ \frac{2}{3}a+2c=4 \quad \cdots①$$

また，$\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)dx=6$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{0}^{2}=6 \qquad \therefore\ \frac{8}{3}a+2b+2c=6 \quad \cdots②$$

さらに，$\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)dx=-\frac{4}{3}$ より

$$\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_{-1}^{1}=-\frac{4}{3} \qquad \therefore\ \frac{2}{3}b=-\frac{4}{3} \quad \cdots③$$

①，②，③ を連立させて解くと，$a=3,\ b=-2,\ c=1$
よって

$$\boldsymbol{f(x)=3x^2-2x+1} \qquad \text{(答)}$$

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ 　($a,\ b,\ c$ は実数の定数で，$a \neq 0$) とおくと
$\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)dx=-\frac{2}{3}$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{0}^{2}=-\frac{2}{3} \qquad \therefore\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-\frac{2}{3} \quad \cdots①$$

また，$\displaystyle\int_{0}^{2} xf(x)dx=\frac{2}{3}$ より

$$\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_{0}^{2}=\frac{2}{3} \qquad \therefore\ 4a+\frac{8}{3}b+2c=\frac{2}{3} \quad \cdots②$$

さらに，$\displaystyle\int_{0}^{2} x^2f(x)dx=\frac{8}{5}$ より

$$\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{b}{4}x^4+\frac{c}{3}x^3\right]_{0}^{2}=\frac{8}{5} \qquad \therefore\ \frac{32}{5}a+4b+\frac{8}{3}c=\frac{8}{5} \quad \cdots③$$

①，②，③ を連立して解くと，$a=-1,\ b=4,\ c=-3$
よって

$$\boldsymbol{f(x)=-x^2+4x-3} \qquad \text{(答)}$$

【7】$Q(x)=px^2+qx+r \quad (p,\ q,\ r$ は実数の定数) とおくと，条件 (i) より

$$\int_{-2}^{2} P(x)(px^2+qx+r)dx = p\int_{-2}^{2} x^2P(x)dx + q\int_{-2}^{2} xP(x)dx + r\int_{-2}^{2} P(x)dx = 0$$

これが任意の実数 $p,\ q,\ r$ について成り立つので

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-2}^{2} x^2P(x)dx = 0 \\ \displaystyle\int_{-2}^{2} xP(x)dx = 0 \\ \displaystyle\int_{-2}^{2} P(x)dx = 0 \end{cases}$$

ここで，

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は実数の定数で，} a \fallingdotseq 0)$$

とすると

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} x^2P(x)dx &= \int_{-2}^{2} x^2(ax^3+bx^2+cx+d)dx = 2\cdot\left[\frac{b}{5}x^5+\frac{d}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= 2\cdot\left(\frac{32}{5}b+\frac{8}{3}d\right)=0 \quad \cdots ① \\ \int_{-2}^{2} xP(x)dx &= \int_{-2}^{2} x(ax^3+bx^2+cx+d)dx = 2\cdot\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{c}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= 2\cdot\left(\frac{32}{5}a+\frac{8}{3}c\right)=0 \quad \cdots ② \\ \int_{-2}^{2} P(x)dx &= \int_{-2}^{2} (ax^3+bx^2+cx+d)dx = 2\cdot\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^2 \\ &= 2\cdot\left(\frac{8}{3}b+2d\right)=0 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

また，条件 (ii) より

$$P(1)=a+b+c+d=7 \quad \cdots ④$$

①，②，③，④ を連立して解くと

$$a=-5,\ b=0,\ c=12,\ d=0$$

ゆえに求める整式 $P(x)$ は

$$\boldsymbol{P(x)=-5x^3+12x} \qquad \text{(答)}$$

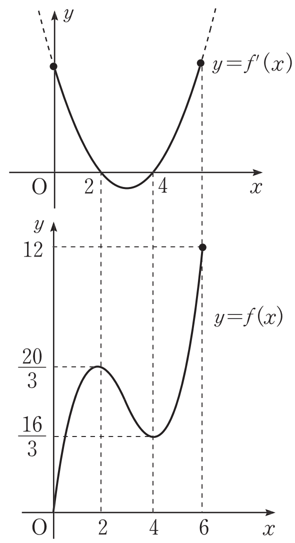
【8】 $f(x)=\int_0^x (t-2)(t-4)dt$ とおくと

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x (t-2)(t-4)dt=(x-2)(x-4)$$

ゆえに $f(x)$ は $x=2$ で極大，$x=4$ で極小となる．ここで

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_0^x \left(t^2-6t+8\right)dt \\ &=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^x \\ &=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x \end{aligned}$$

であるから，$y=f'(x)$，$y=f(x)$ のグラフは右図.
また $f(x)$ の増減表は下のようになる.



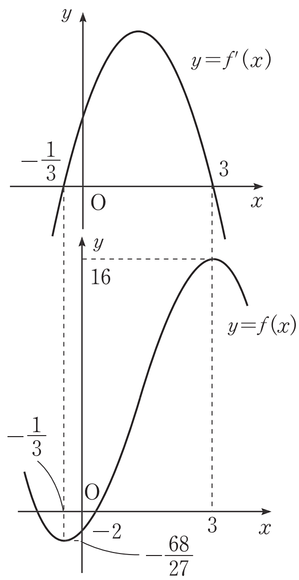

| $x$ | 0 | …… | 2 | …… | 4 | …… | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\frac{20}{3}$ | ↘ | $\frac{16}{3}$ | ↗ | 12 |

よって，求める最大値と最小値は，

$$\begin{cases} \textbf{最大値 } \mathbf{12} \quad (\boldsymbol{x=6} \textbf{ のとき}) \\ \textbf{最小値 } \mathbf{0} \quad (\boldsymbol{x=0} \textbf{ のとき}) \end{cases}$$ （答）

【9】(1)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(-3t^2+8t+3)dt$$
$$= -3x^2+8x+3$$
$$= -(3x+1)(x-3)$$




また

$$f(x) = \int_{-1}^{x}(-3t^2+8t+3)dt$$
$$= \Big[-t^3+4t^2+3t\Big]_{-1}^{x}$$
$$= (-x^3+4x^2+3x)-(1+4-3)$$
$$= -x^3+4x^2+3x-2$$

ゆえに $y=f'(x)$, $y=f(x)$ のグラフは右図.
また, 増減表は下のようになる.

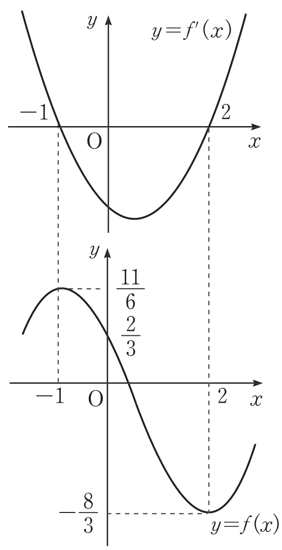
| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{3}$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-\frac{68}{27}$ | $\nearrow$ | $16$ | $\searrow$ |

ゆえに求める極値は

$$\begin{cases} \textbf{極大値 16} & \boldsymbol{(x=3\ \text{のとき})} \\ \textbf{極小値}\ -\boldsymbol{\frac{68}{27}} & \boldsymbol{\left(x=-\frac{1}{3}\ \text{のとき}\right)} \end{cases}$$ (答)

(2)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-2}^{x}(t^2-t-2)dt$$
$$= x^2-x-2$$
$$= (x+1)(x-2)$$




また

$$f(x) = \int_{-2}^{x}(t^2-t-2)dt$$
$$= \Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-2t\Big]_{-2}^{x}$$
$$= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$$
$$-\left(-\frac{8}{3}-2+4\right)$$
$$= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$$

ゆえに $y=f'(x)$, $y=f(x)$ のグラフは右図. また増減表は次のようになる.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{11}{6}$ | $\searrow$ | $-\frac{8}{3}$ | $\nearrow$ |

よって，求める極値は

$$\begin{cases} \textbf{極大値}\ \boldsymbol{\frac{11}{6}} & \boldsymbol{(x=-1\ \text{のとき})} \\ \textbf{極小値}\ \boldsymbol{-\frac{8}{3}} & \boldsymbol{(x=2\ \text{のとき})} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【10】 $$f(a)=\int_0^1(6ax^2-a^2x)dx=\left[2ax^3-\frac{1}{2}a^2x^2\right]_0^1=\boldsymbol{-\frac{1}{2}a^2+2a} \qquad \text{(答)}$$

これは $a$ についての 2 次関数であるから，平方完成すると

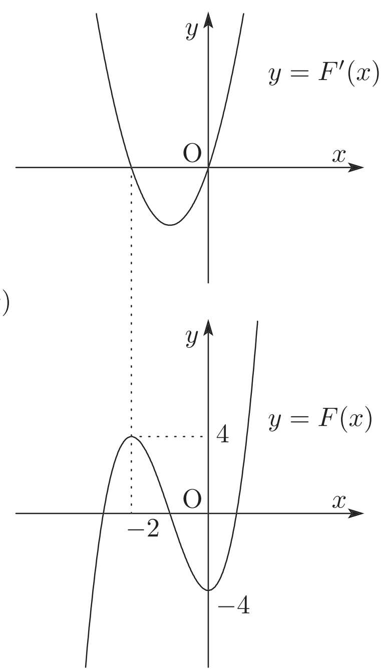
$$f(a)=-\frac{1}{2}a^2+2a=-\frac{1}{2}(a^2-4a)=-\frac{1}{2}(a-2)^2+2$$

したがって，$f(a)$ の最大値は

**2　($a=2$ のとき)**　(答)

【11】(1)

$$\begin{aligned} F(x)&=\int_x^{x+2}(t^3-4t)dt \\ &=\int_0^{x+2}(t^3-4t)dt+\int_x^0(t^3-4t)dt \\ &=\int_0^{x+2}(t^3-4t)dt-\int_0^x(t^3-4t)dt \end{aligned}$$




ここで

$$\begin{aligned} F'(x)&=\left\{(x+2)^3-4(x+2)\right\}-(x^3-4x) \\ &=6x^2+12x \\ &=6x(x+2) \end{aligned}$$

より，$y=F'(x)$，$y=F(x)$ のグラフは右図．また増減表は下のようになる．

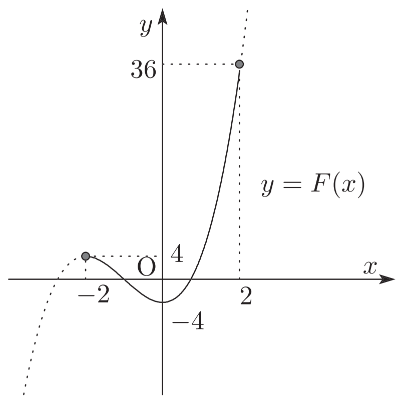
| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $F(x)$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ |

$$F(-2) = \int_{-2}^{0} (t^3 - 4t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - 2t^2\right]_{-2}^{0} = -\left\{\frac{1}{4}(-2)^4 - 2(-2)^2\right\} = 4$$
$$F(0) = \int_{0}^{2} (t^3 - 4t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - 2t^2\right]_{0}^{2} = -4$$

よって，極値は

$$\begin{cases} \textbf{極大値 } \mathbf{4} \quad (\boldsymbol{x = -2} \textbf{ のとき}) \\ \textbf{極小値 } \mathbf{-4} \quad (\boldsymbol{x = 0} \textbf{ のとき}) \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(2) (1) より，$-2 \leqq x \leqq 2$ における $y = F(x)$ のグラフは右図.



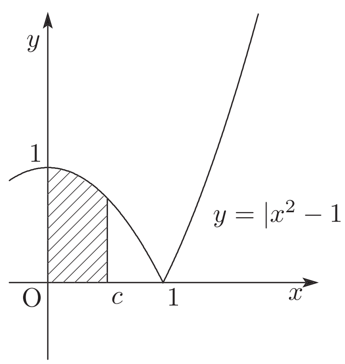

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_{2}^{4} (t^3 - 4t)dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - 2t^2\right]_{2}^{4} \\ &= \frac{1}{4}(4^4 - 2^4) - 2(4^2 - 2^2) \\ &= 64 - 4 - 2 \cdot 12 \\ &= 36 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases} \textbf{最大値 } \mathbf{36} \quad (\boldsymbol{x = 2} \textbf{ のとき}) \\ \textbf{最小値 } \mathbf{-4} \quad (\boldsymbol{x = 0} \textbf{ のとき}) \end{cases} \quad \text{(答)}$$

【12】 $y = \left|x^2 - 1\right|$ のグラフは $y$ 軸に関して対称であるから，$c \geqq 0$ で考えて十分.

(i) $0 \leqq c \leqq 1$ のとき．$\displaystyle\int_0^c \left|x^2 - 1\right| dx$ は，右図の斜線部の面積に等しい.

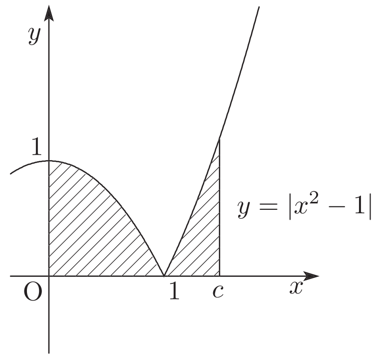



$$\begin{aligned} \int_0^c \left|x^2 - 1\right| dx &= \int_0^c (-x^2 + 1)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^c \\ &= -\frac{1}{3}c^3 + c \end{aligned}$$

これが $c$ に等しいから

$$-\frac{1}{3}c^3 + c = c$$
$$\therefore\ c = 0$$

(ii) $1<c$ のとき．$\displaystyle\int_0^c |x^2-1|dx$ は，右図の斜線部の面積に等しい．




$$\int_0^c |x^2-1|dx$$
$$= \int_0^1 (-x^2+1)dx + \int_1^c (x^2-1)dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^c$$
$$= \frac{1}{3}c^3 - c + \frac{4}{3}$$

これが $c$ に等しいから

$$\frac{1}{3}c^3 - c + \frac{4}{3} = c$$
$$c^3 - 6c + 4 = 0$$
$$\therefore\ (c-2)(c^2+2c-2) = 0$$

$c>1$ に注意して

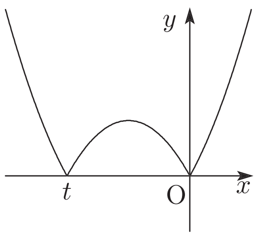
$$\therefore\ c = 2$$

以上より，求める $c$ の値は，$c<0$ の場合もあわせて

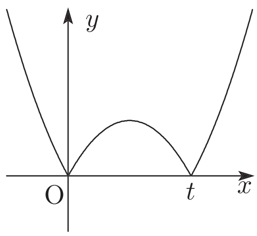
$\boldsymbol{c = \pm 2,\ 0}$　　(答)

【13】　$f(x) = |x(x-t)|$ のグラフは，0 と $t$ の大小によって

$t \leqq 0$ のとき



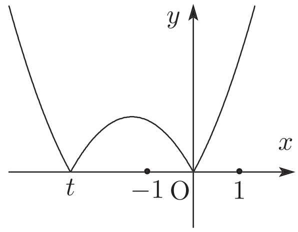

$t \geqq 0$ のとき




のいずれかになる．ここでそれぞれの場合において，$t$ と $-1$，$t$ と 1 の大小によって場合分けして考える．

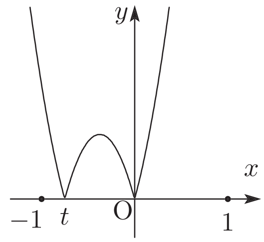
各場合における $y=|x(x-t)|$ のグラフはそれぞれ右図のようになる.

(i) $t<-1$ のとき



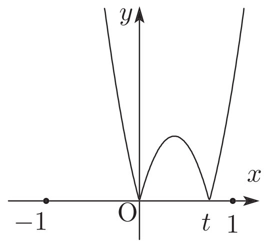

$$P=\int_{-1}^{0}-x(x-t)dx+\int_{0}^{1}x(x-t)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=-t$$

(ii) $-1\leqq t<0$ のとき



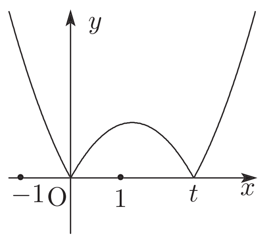

$$P=\int_{-1}^{t}x(x-t)dx+\int_{t}^{0}-x(x-t)dx+\int_{0}^{1}x(x-t)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_{-1}^{t}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_{t}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=-\frac{t^3}{3}+\frac{2}{3}$$

(iii) $0\leqq t<1$ のとき




$$P=\int_{-1}^{0}x(x-t)dx+\int_{0}^{t}-x(x-t)dx+\int_{t}^{1}x(x-t)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_{0}^{t}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_{t}^{1}$$
$$=\frac{t^3}{3}+\frac{2}{3}$$

(iv) $1\leqq t$ のとき




$$P=\int_{-1}^{0}x(x-t)dx+\int_{0}^{1}-x(x-t)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=t$$

以上より

$$\boldsymbol{P=\begin{cases}-t & (t<-1)\\ -\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{2}{3} & (-1\leqq t<0)\\ \dfrac{t^3}{3}+\dfrac{2}{3} & (0\leqq t<1)\\ t & (1\leqq t)\end{cases}}$$ (答)

## 添削課題

【1】　両辺を $x$ で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(x^2+4x-5)$$

$$\therefore\ f(x) = \mathbf{2x+4} \qquad (\text{答})$$

このとき，与式の左辺は

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x (2t+4)dt = \Big[t^2+4t\Big]_a^x = x^2+4x-(a^2+4a)$$

であるから，これが与式の右辺と等しくなるためには

$$-(a^2+4a) = -5 \qquad \therefore\ a^2+4a-5=0$$

$$\therefore\ (a+5)(a-1)=0$$

したがって，$a = \mathbf{-5,\ 1}$　(答)

【2】(1)

$$\int_0^3 f(t)dt = a \qquad (a\ \text{は実数の定数})$$

とおくと

$$f(x) = x^2+2x+a$$

であるから

$$a = \int_0^3 f(t)dt = \int_0^3 (t^2+2t+a)dt = \left[\frac{t^3}{3}+t^2+at\right]_0^3$$

$$= (9+9+3a)-(0+0+0) = 3a+18$$

$$\therefore\ a = -9$$

したがって，求める関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \boldsymbol{x^2+2x-9} \qquad (\text{答})$$

(2)

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{6} + x\int_0^2 f(t)dt$$

より

$$\int_0^2 f(t)dt = a \qquad (a\ \text{は実数の定数})$$

とおくと

$$f(x) = x^2+ax+\frac{1}{6}$$

であるから

$$a = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \left(t^2+at+\frac{1}{6}\right)dt = \left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2+\frac{1}{6}t\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}+2a+\frac{1}{3} = 2a+3$$

$$\therefore\ a = -3$$

したがって，求める関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \boldsymbol{x^2-3x+\frac{1}{6}} \qquad (\text{答})$$

【3】(1)

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^2+ax+b)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^2$$
$$= \frac{8}{3}+2a+2b$$
$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (x^2+ax+b)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_1^3$$
$$= \frac{26}{3}+4a+2b$$

であるから，条件より

$$\begin{cases} \dfrac{8}{3}+2a+2b = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{26}{3}+4a+2b = \dfrac{11}{3} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} 2a+2b=-3 \\ 4a+2b=-5 \end{cases}$$

これを解いて，$a = \mathbf{-1}$, $b = \mathbf{-\frac{1}{2}}$　　(答)

(2)

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 (x^2+ax+b)dx = 2\int_0^1 (x^2+b)dx$$
$$= 2\cdot\left[\frac{x^3}{3}+bx\right]_0^1 = 2\cdot\left(\frac{1}{3}+b\right)$$
$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 (x^3+ax^2+bx)dx = 2\int_0^1 ax^2dx$$
$$= 2\cdot\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}a$$

であるから，条件より

$$\begin{cases} 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}+b\right)=2 \\ \dfrac{2}{3}a=2 \end{cases}$$

これを解いて，$a = \mathbf{3}$, $b = \mathbf{\frac{2}{3}}$　　(答)

【4】

$$\begin{cases} f(x) = 3x\displaystyle\int_0^1 g(t)dt & \cdots ① \\ g(x) = -\displaystyle\int_0^x f(t)dt + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\int_0^1 g(t)dt = a \quad \cdots ③$$

とおくと，①，③ より

$$f(x) = 3ax$$

となるから，② は

$$\begin{aligned} g(x) &= -\int_0^x 3atdt + 1 \\ &= -\left[\frac{3}{2}at^2\right]_0^x + 1 \\ &= -\frac{3}{2}ax^2 + 1 \end{aligned}$$

となり，これを ③ に代入すると

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}at^2 + 1\right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}at^3 + t\right]_0^1 \\ &= -\frac{a}{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore\ a = \frac{2}{3}$$

したがって

$$\boldsymbol{f(x) = 2x,\quad g(x) = -x^2 + 1} \qquad \text{(答)}$$

M1JS/M1J
高 1 選抜東大数学
高 1 東大数学

Z-KAI

| 会員番号 | | 氏　名 | |
|---|---|---|---|