P3J

本科 2 期 12 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

東大物理

２４章　物質粒子の波動性

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) eV

(2) (1) のエネルギーすべてが 1 個の光子のエネルギーとして放出されるとき，

$$h \cdot \frac{c}{\lambda_{\min}} = eV \qquad \therefore \quad \lambda_{\min} = \frac{ch}{eV}$$

(3) 電子の速さを v とすると，電子の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{k_0 Z e^2}{r^2} \qquad \therefore \quad mv^2 = \frac{k_0 Z e^2}{r} \qquad \cdots (*)$$

また，量子条件は，

$$2\pi r = \frac{h}{mv} \cdot n \qquad \therefore \quad v = \frac{nh}{2\pi r m}$$

上式と $(*)$ より，v を消去すると，

$$m\left(\frac{nh}{2\pi r m}\right)^2 = \frac{k_0 Z e^2}{r} \qquad \therefore \quad r = \frac{h^2}{4\pi^2 k_0 Z e^2 m} \cdot n^2$$

(4) $(*)$ と③より，電子の運動エネルギーは，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= \frac{k_0 Z e^2}{2r}\\ &= \frac{k_0 Z e^2}{2} \cdot \frac{4\pi^2 k_0 Z e^2 m}{n^2 h^2}\\ &= \frac{2\pi^2 {k_0}^2 Z^2 e^4 m}{n^2 h^2}\end{aligned}$$

また，電子の位置エネルギーは，

$$\begin{aligned}(-e) \cdot \frac{k_0 \cdot Ze}{r} &= -k_0 Z e^2 \cdot \frac{4\pi^2 k_0 Z e^2 m}{n^2 h^2}\\ &= -\frac{4\pi^2 {k_0}^2 Z^2 e^4 m}{n^2 h^2}\end{aligned}$$

電子の全エネルギーを E とすると，

$$\begin{aligned}E &= \frac{2\pi^2 {k_0}^2 Z^2 e^4 m}{n^2 h^2} + \left(-\frac{4\pi^2 {k_0}^2 Z^2 e^4 m}{n^2 h^2}\right)\\ &= -\frac{2\pi^2 {k_0}^2 e^4 m}{h^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2}\end{aligned}$$

(5) $n=2$ の軌道から $n=1$ の軌道に電子が移るときに発生する光子のエネルギーを ε とすると，

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left(-\frac{2\pi^2{k_0}^2e^4m}{h^2}\cdot\frac{Z^2}{2^2}\right)-\left(-\frac{2\pi^2{k_0}^2e^4m}{h^2}\cdot\frac{Z^2}{1^2}\right)\\ &= \frac{3Z^2}{4}\cdot\frac{2\pi^2{k_0}^2e^4m}{h^2}\end{aligned}$$

この X 線光子の波長が $1.5\times10^{-10}\,\mathrm{m}$ 以下となるとすると，

$$\varepsilon \geqq h\cdot\frac{c}{1.5\times10^{-10}\,\mathrm{m}} \qquad \therefore\quad \frac{3Z^2}{4}\cdot\frac{2\pi^2{k_0}^2e^4m}{h^2} \geqq \frac{ch}{1.5\times10^{-10}\,\mathrm{m}} \qquad \cdots①$$

水素原子で，$n=3$ の軌道から $n=2$ の軌道に電子が移るときに発生する光子のエネルギーを ε_0 とすると，

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \left(-\frac{2\pi^2{k_0}^2e^4m}{h^2}\cdot\frac{1}{3^2}\right)-\left(-\frac{2\pi^2{k_0}^2e^4m}{h^2}\cdot\frac{1}{2^2}\right)\\ &= \frac{5}{36}\cdot\frac{2\pi^2{k_0}^2e^4m}{h^2}\end{aligned}$$

この光子の波長は $656.3\times10^{-9}\,\mathrm{m}$ なので，

$$\varepsilon_0 = h\cdot\frac{c}{656.3\times10^{-9}\,\mathrm{m}} \qquad \therefore\quad \frac{5}{36}\cdot\frac{2\pi^2{k_0}^2e^4m}{h^2} = \frac{ch}{656.3\times10^{-9}\,\mathrm{m}} \qquad \cdots②$$

①，②より，

$$\frac{3Z^2}{4}\cdot\left(\frac{36}{5}\cdot\frac{ch}{656.3\times10^{-9}\,\mathrm{m}}\right) \geqq \frac{ch}{1.5\times10^{-10}\,\mathrm{m}} \qquad \therefore\quad Z^2 \geqq 810.\cdots$$

Z は $Z \geqq 9\sqrt{10}$ を満たす正の整数なので，$Z \geqq 29$ と求まる．

【2】
《解答》

(ア) 量子数

(イ) 基底状態

(ウ) ボーア半径

(エ) $n = n_2$ の軌道から $n = n_1$ の軌道に電子が移って光子が発生する過程について，エネルギーの保存より，

$$h\nu = \left(-\frac{2\pi^2 {k_0}^2 m e^4}{h^2}\cdot\frac{1}{{n_2}^2}\right) - \left(-\frac{2\pi^2 {k_0}^2 m e^4}{h^2}\cdot\frac{1}{{n_1}^2}\right)$$
$$\therefore\quad \nu = \frac{2\pi^2 {k_0}^2 m e^4}{h^3}\left(\frac{1}{{n_1}^2} - \frac{1}{{n_2}^2}\right)$$

(オ) (エ) より，

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{c}\cdot\frac{2\pi^2 {k_0}^2 m e^4}{h^3}\left(\frac{1}{{n_1}^2} - \frac{1}{{n_2}^2}\right) \qquad \therefore\quad R = \frac{2\pi^2 {k_0}^2 m e^4}{ch^3}$$

(カ) 3

(キ) $n = 10^5$ のとき，②より，

$$\begin{aligned} r_n &= (5.3\times 10^{-11}\,\mathrm{m})\times(10^5)^2 \\ &= 0.53\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

(ク) $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}\times(2n+1) \quad \cdots(*)$

(ケ) $(*)$ で n が十分大きいとすると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} &\fallingdotseq \frac{1}{n^2\cdot n^2}\times 2n \\ &= \frac{2}{n^3} \end{aligned}$$

このとき (エ) より，

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{2\pi^2 {k_0}^2 m e^4}{h^3}\cdot\frac{2}{n^3} \\ &= \frac{4\pi^2 {k_0}^2 m e^4}{h^3}\cdot\frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

(コ) 電子の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{r} = \left|k_0\cdot\frac{e\cdot(-e)}{r^2}\right| \qquad \therefore\quad v = e\sqrt{\frac{k_0}{mr}}$$

(サ) 円運動の周期を T とすると，

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{e}\sqrt{\frac{mr}{k_0}}$$

単位時間当たりの回転数を f とすると，

$$f = \frac{1}{T} = \frac{e}{2\pi r}\sqrt{\frac{k_0}{mr}}$$

《解説》

(サ) に②を代入すると，

$$\begin{aligned} f &= \frac{e}{2\pi} \cdot \frac{4\pi^2 k_0 m e^2}{n^2 h^2}\sqrt{\frac{k_0}{m} \cdot \frac{4\pi^2 k_0 m e^2}{n^2 h^2}} \\ &= \frac{4\pi^2 {k_0}^2 m e^4}{h^3} \cdot \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

これは量子数 n が大きい場合について (ケ) で求めた光の ν と一致している．このように「量子論の結果で n が大きくなると，古典論の結果と一致する」ということを，ボーアは「対応原理」と呼び，研究を進める際の指導原理としてこれを重要視した．

【3】

《解答》

I (1) $2d\sin\theta$

(2) $2d\sin\theta = \lambda\cdot n$

(3) (2) より，

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta}\cdot n$$

$0 < \sin\theta \leqq 1$ かつ n は正の整数なので，

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2\cdot 1}\cdot 1 = \frac{\lambda}{2}$$

(4) (2) より，

$$2d_1\sin\theta_1 = \lambda_1\cdot 1 \qquad \therefore \quad \lambda_1 = 2d_1\sin\theta_1$$

(5) (2) より，

$$2d_2\sin\theta_2 = \lambda_1\cdot 1$$

これと (4) より，

$$2d_2\sin\theta_2 = 2d_1\sin\theta_1 \qquad \therefore \quad d_2 = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}d_1$$

II (1) 光子 (または光量子)

(2) 物質 (またはド・ブロイ)

(3) $\lambda = \dfrac{h}{Mv}$

(4) エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

このとき $mv = \sqrt{2meV}$ と表すことができ，これと (3) より，

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

(5) 短く

(6) ブラッグ

(7) $2d\sin\theta = \lambda\cdot n$

(8) (4)，(7) より，

$$2d\sin\theta = \frac{h}{\sqrt{2meV}}\cdot n \qquad \therefore \quad V = \frac{n^2h^2}{8me(d\sin\theta)^2}$$

【4】

《解答》

［1］ ① $m\dfrac{v^2}{r}$

② $\dfrac{m}{2}v^2$

③ $-k_0\dfrac{e^2}{r}$

④ 式 (1) より，

$$m\frac{v^2}{r} = k_0\frac{e^2}{r^2}$$

$$\therefore \quad mv^2 = \frac{k_0e^2}{r} \quad \cdots\cdots(1)'$$

だから，

$$E = \frac{m}{2}v^2 - k_0\frac{e^2}{r} = \frac{1}{2}\frac{k_0e^2}{r} - k_0\frac{e^2}{r} = -\frac{k_0e^2}{2r}$$

⑤ 式 $(1)'$ より，

$$(mv)^2 = \frac{mk_0e^2}{r}$$

式 (3) より，

$$(mv)^2 = \left(\frac{nh}{2\pi r}\right)^2$$

$$\therefore \quad r = \frac{1}{mk_0e^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 n^2$$

⑥ 式 (2)，(4) より，

$$E_n = -\frac{k_0e^2}{2r} = -\frac{m}{2}\left(k_0e^2\frac{2\pi}{h}\right)^2\frac{1}{n^2}$$

［2］$E_1 = -13.6\,\mathrm{eV}$ を用いて，

$$E_n = -\frac{|E_1|}{n^2}$$

だから式 (6) より，

$$\frac{hc}{\lambda_{j2}} = E_j - E_2 = |E_1|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{j^2}\right) \quad \cdots\cdots(6)'$$

⑦ 式 $(6)'$ で $j = 3,\ 4$ とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{hc}{\lambda_{32}} = |E_1|\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{5}{36}|E_1| \quad \cdots\cdots(6)'' \\ \dfrac{hc}{\lambda_{42}} = |E_1|\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{16}\right) = \dfrac{3}{16}|E_1| \end{cases}$$

$$\therefore \quad \lambda_{42} = \frac{20}{27} \times 656\mathrm{nm} \fallingdotseq 486\,\mathrm{nm}$$

⑧ 式 $(6)'$ で $j=5$ として

$$
\begin{aligned}
E_5 - E_2 &= |E_1|\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{25}\right) = \frac{21}{100}|E_1| = \frac{21}{100}\times 13.6\,\mathrm{eV} \\
&= 2.86\,\mathrm{eV}
\end{aligned}
$$

[3] $i=1$ に対応する光の波長は，

$$
\frac{hc}{\lambda} = |E_1|\left(1-\frac{1}{j^2}\right)
$$

であるので，その λ の最大値は $j=2$ の場合の値

$$
\begin{aligned}
\frac{hc}{\lambda} &= |E_1|\left(1-\frac{1}{4}\right) \\
\therefore \quad \lambda_{\mathrm{max}} &= \frac{4hc}{3|E_1|}
\end{aligned}
$$

である．ここで式 $(6)''$ より，

$$
\frac{hc}{|E_1|} = \frac{5}{36}\lambda_{32}
$$

だから，

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\mathrm{max}} &= \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{36}\lambda_{32} \\
&= \frac{5}{27}\times 656\,\mathrm{nm} \\
&= 121\,\mathrm{nm}
\end{aligned}
$$

よってスペクトル群の最大波長でさえ，可視光の波長領域の下限より小さく肉眼では見えない．結局，$i=1$ のスペクトル群は肉眼では見えない．

添削課題

《解答》

(1) $F = qvB$ で 4 の向き

(2) 粒子の軌道は C_4 で，粒子の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \qquad \therefore \quad r = \frac{mv}{qB}$$

これを書き換えて，

$$v = r \cdot \frac{qB}{m} \qquad \therefore \quad \omega = \frac{qB}{m}$$

(3) $\lambda = \dfrac{h}{mv}$

(4) $2\pi r = \lambda \cdot n$

(5) (2)，(3)，(4) より，

$$2\pi \cdot \frac{mv_n}{qB} = \frac{h}{mv_n} \cdot n \qquad \therefore \quad v_n = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{qBh}{2\pi} \cdot n}$$

(6) (2)，(5) より，

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{m}{qB} \cdot \frac{1}{m}\sqrt{\frac{qBh}{2\pi} \cdot n} \\ &= \sqrt{\frac{h}{2\pi qB} \cdot n} \end{aligned}$$

(7) ω が n に依存しないので，T_n も n に依存せず，

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

(8) (5)，(2) をふまえると，

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{1}{m^2} \cdot \frac{qBh}{2\pi} \cdot n\right) \\ &= \frac{h}{4\pi} \cdot \frac{qB}{m} \cdot n \\ &= \frac{h\omega}{4\pi} \cdot n \end{aligned}$$

(9) (6) をふまえると，

$$\begin{aligned} \text{磁束 } \phi &= B \cdot \pi {r_n}^2 \\ &= \pi B \cdot \frac{h}{2\pi qB} \cdot n \\ &= \frac{h}{2q} \cdot n \end{aligned}$$

配点

100 点

(1)5 点 × 2

(2)5 点 × 3

(3)，(4) 各 10 点

(5)15 点

(6)10 点

(7)5 点 × 2

(8)，(9) 各 10 点

２５章　原子核の崩壊

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) (ア) 陽子

(イ) $A-Z$

(ウ) 中性子

(エ) 核力

(オ) $m\dfrac{v^2}{r}=kr \quad \cdots(*)$

(カ) $\lambda=\dfrac{h}{mv}$

(キ) 量子数

(ク) 量子条件は,

$$2\pi r=\frac{h}{mv}\cdot n \qquad \therefore \quad v=\frac{nh}{2\pi rm}$$

これと $(*)$ より,

$$\frac{m}{r}\cdot\left(\frac{nh}{2\pi rm}\right)^2=kr \qquad \therefore \quad r^2=\frac{nh}{2\pi\sqrt{km}}$$

(ケ) $(*)$ より，核子の運動エネルギーは,

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kr^2$$

また，原子核の中心を基準とした位置エネルギーは $\dfrac{1}{2}kr^2$ と表せるので，核子のエネルギーは,

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kr^2\\&=\frac{1}{2}kr^2\times 2\\&=kr^2\end{aligned}$$

これと (ク) より,

$$\begin{aligned}E_n&=k\cdot\frac{nh}{2\pi\sqrt{km}}\\&=n\cdot\frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\end{aligned}$$

(コ) 基底状態

(2) (ク) で，$n = l$ のとき $r = R$ なので，

$$R^2 = \frac{lh}{2\pi\sqrt{km}} \qquad \therefore \quad \sqrt{k} = \frac{lh}{2\pi R^2\sqrt{m}}$$

これと (ケ) より，

$$\begin{aligned} E_n &= n \cdot \frac{h}{2\pi\sqrt{m}} \cdot \frac{lh}{2\pi R^2\sqrt{m}} \\ &= \frac{lh^2}{4\pi^2 R^2 m} \cdot n \end{aligned}$$

$n = l + 1$ の状態から $n = l$ の状態に核子が遷移して γ 線光子を発生する過程について，エネルギーの保存より，

$$\begin{aligned} E &= \frac{lh^2}{4\pi^2 R^2 m} \cdot (l+1) - \frac{lh^2}{4\pi^2 R^2 m} \cdot l \\ &= \frac{lh^2}{4\pi^2 R^2 m} \end{aligned}$$

(3) 与えられた数値を代入しやすい形に (2) を整理して，数値を代入すると，

$$\begin{aligned} E &= \frac{l}{R^2 m}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{2}{(3.0\times10^{-15}\,\mathrm{m})^2 \times (1.7\times10^{-27}\,\mathrm{kg})} \times (1.1\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})^2 \\ &\fallingdotseq 1.58\times10^{-12}\,\mathrm{J} \\ &= \frac{1.58\times10^{-12}}{1.6\times10^{-19}}\,\mathrm{eV} \\ &\fallingdotseq 9.9\times10^{6}\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

【2】

《解答》

(1) ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ $\cdots$ 陽子 6 個，中性子 6 個

${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ $\cdots$ 陽子 6 個，中性子 8 個

${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ $\cdots$ 陽子 7 個，中性子 7 個

(2) 陽子 7 個，中性子 7 個の窒素 ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$

(3) 放射能の強さは ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ の数に比例しているので，放射能の強さが半分に減少するのにかかる時間は ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ の数が半分になる時間と等しい．よって，かかる時間は 5.7×10^3 年となる．$3\times(5.7\times10^3\,\text{年})$ が経つと，${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ の数は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=12.5\,\%$ になっているので，放射能の強さも 12.5％ に減少する．

(4) 遺跡 A から出土した炭について，経過した時間を t_A とすると，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_\mathrm{A}}{5.7\times10^3\,\text{年}}}=\frac{1}{3}\qquad\therefore\quad 2^{\frac{t_\mathrm{A}}{5.7\times10^3\,\text{年}}}=3$$

対数をとると，

$$\frac{t_\mathrm{A}}{5.7\times10^3\,\text{年}}=\log_2 3\qquad\therefore\quad t_\mathrm{A}=\log_2 3\times(5.7\times10^3\,\text{年})$$

与えられた近似値を代入すると，

$$\begin{aligned}t_\mathrm{A}&\fallingdotseq 1.58\times(5.7\times10^3\,\text{年})\\&\fallingdotseq 9.0\times10^3\,\text{年}\end{aligned}$$

遺跡 B から出土した牙について，経過した時間を t_B とすると，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_\mathrm{B}}{5.7\times10^3\,\text{年}}}=\frac{3}{5}\qquad\therefore\quad 2^{\frac{t_\mathrm{B}}{5.7\times10^3\,\text{年}}}=\frac{5}{3}$$

対数をとると，

$$\frac{t_\mathrm{B}}{5.7\times10^3\,\text{年}}=\log_2 5-\log_2 3\qquad\therefore\quad t_\mathrm{B}=(\log_2 5-\log_2 3)\times(5.7\times10^3\,\text{年})$$

与えられた近似値を代入すると，

$$\begin{aligned}t_\mathrm{B}&\fallingdotseq (2.32-1.58)\times(5.7\times10^3\,\text{年})\\&\fallingdotseq 4.2\times10^3\,\text{年}\end{aligned}$$

【3】

《解答》

(ア) $p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{e}} = 0 \quad \cdots (1)$

(イ) $\dfrac{{p_{\mathrm{A}}}^2}{2m_{\mathrm{A}}} + \dfrac{{p_{\mathrm{e}}}^2}{2m_{\mathrm{e}}} = Q \quad \cdots (2)$

(ウ) (1) をふまえて，${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ 原子核の運動エネルギーを書き換えると，

$$\begin{aligned}\frac{{p_{\mathrm{A}}}^2}{2m_{\mathrm{A}}} &= \frac{{p_{\mathrm{e}}}^2}{2m_{\mathrm{A}}} \\ &= \frac{{p_{\mathrm{e}}}^2}{2m_{\mathrm{e}}} \cdot \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{A}}}\end{aligned}$$

これと (2) より，

$$\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{A}}} T_{\mathrm{e}} + T_{\mathrm{e}} = Q \qquad \therefore \quad T_{\mathrm{e}} = \frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{e}}} Q$$

(エ) $p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{e}} \cos\theta + p_{\nu} \cos\phi = 0$

(オ) $p_{\mathrm{e}} \sin\theta - p_{\nu} \sin\phi = 0$

(カ) $\dfrac{{p_{\mathrm{A}}}^2}{2m_{\mathrm{A}}} + \dfrac{{p_{\mathrm{e}}}^2}{2m_{\mathrm{e}}} + \dfrac{{p_{\nu}}^2}{2m_{\nu}} = Q$

(キ) $p_{\nu} = p_{\mathrm{A}}$ のとき，(4) より，

$$\begin{cases} p_{\mathrm{e}} \cos\theta = -p_{\mathrm{A}}(1 + \cos\phi) \quad \cdots ① \\ p_{\mathrm{e}} \sin\theta = p_{\mathrm{A}} \sin\phi \quad \cdots ② \end{cases}$$

$①^2 + ②^2$ より，

$$\begin{aligned}{p_{\mathrm{e}}}^2 &= {p_{\mathrm{A}}}^2 (1 + \cos\phi)^2 + {p_{\mathrm{A}}}^2 \sin^2\phi \\ &= {p_{\mathrm{A}}}^2 (1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi) \\ &= 2{p_{\mathrm{A}}}^2 (1 + \cos\phi)\end{aligned}$$

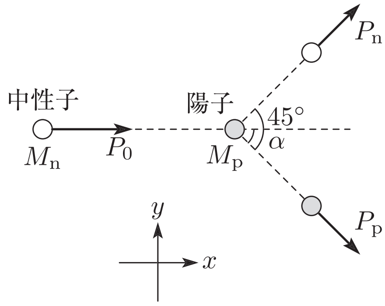
これと f の定義式より，

$$(f p_{\mathrm{A}})^2 = 2{p_{\mathrm{A}}}^2 (1 + \cos\phi) \qquad \therefore \quad f = \sqrt{2(1 + \cos\phi)}$$

【4】

《解答》

あ. 衝突前後の中性子 (質量 M_n) の運動量の大きさを P_0 および P_n，衝突後の陽子 (質量を M_p とする) の運動量の大きさを P_p，陽子の進行方向を右図のように α とすると，運動量保存則より，

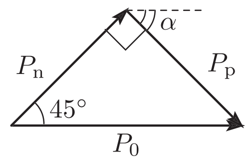


$$\begin{cases} x\text{ 成分：}P_0 = P_\mathrm{n}\cos 45° + P_\mathrm{p}\cos\alpha & \cdots ① \\ y\text{ 成分：}0 = P_\mathrm{n}\sin 45° - P_\mathrm{p}\sin\alpha & \cdots ② \end{cases}$$

エネルギー保存則より，

$$\frac{{P_0}^2}{2M_\mathrm{n}} = \frac{{P_\mathrm{n}}^2}{2M_\mathrm{n}} + \frac{{P_\mathrm{p}}^2}{2M_\mathrm{p}} \quad \cdots ③$$

③と $M_\mathrm{n} \fallingdotseq M_\mathrm{p}$ より右の直角三角形を得るので，



$$P_\mathrm{n} = P_\mathrm{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}P_0, \quad \alpha = 45°$$

よって，衝突前後の中性子の運動エネルギーの比は，

$$\frac{\dfrac{{P_\mathrm{n}}^2}{2M_\mathrm{n}}}{\dfrac{{P_0}^2}{2M_\mathrm{n}}} = \left(\frac{P_\mathrm{n}}{P_0}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

い. $\dfrac{3}{2}kT$

う. 中性子の運動量の大きさを p_n とすると，

$$\frac{{p_\mathrm{n}}^2}{2M_\mathrm{n}} = \frac{3}{2}kT \qquad \therefore \quad p_\mathrm{n} = \sqrt{3M_\mathrm{n}kT}$$

求めるド・ブロイ波長を λ_n とすると，

$$\lambda_\mathrm{n} = \frac{h}{p_\mathrm{n}} = \frac{h}{\sqrt{3M_\mathrm{n}kT}}$$

え. う. の結果に数値を代入すると，

$$\begin{aligned} \lambda_\mathrm{n} &= \frac{6.6\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{\sqrt{3\cdot(1.7\times10^{-27}\,\mathrm{kg})\cdot(1.4\times10^{-23}\,\mathrm{J/K})\cdot 350\,\mathrm{K}}} \\ &\fallingdotseq 1.3\times10^{-10}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

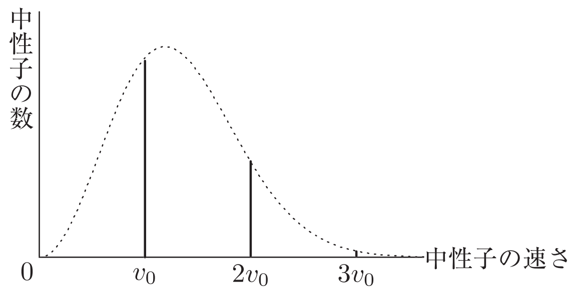
お.

$$2d\sin\varphi = n\lambda_\mathrm{n} \qquad \therefore \quad \lambda_\mathrm{n} = \frac{2d\sin\varphi}{n}$$

問 1 中性子の速さを v_n とすると,

$$p_\mathrm{n} = M_\mathrm{n} v_\mathrm{n} \qquad \therefore \quad \lambda_\mathrm{n} = \frac{h}{M_\mathrm{n} v_\mathrm{n}} = \frac{2d\sin\varphi}{n} \qquad \therefore \quad v_\mathrm{n} = n\frac{h}{2M_\mathrm{n} d\sin\varphi}$$

よって,強く反射される中性子の反射後の速さは,$v_0 = \dfrac{h}{2M_\mathrm{n} d\sin\varphi}$ の整数倍に限られる.したがって,速度分布は下図のように表される.



か. $\overline{\nu}$ の質量を 0 とする近似より,崩壊後の全運動エネルギーを K とすると,

$$\begin{aligned} K &= M_\mathrm{a}c^2 - (M_\mathrm{b}c^2 + m_\mathrm{e}c^2) \\ &= (M_\mathrm{a} - M_\mathrm{b} - m_\mathrm{e})c^2 \end{aligned}$$

き. (B) に従う反応を仮定して,運動量保存則より,$P_\mathrm{b} = P_\mathrm{e}$.${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ と e^- の全運動エネルギーは K とみなせるので,e^- の運動エネルギーは

$$\frac{\dfrac{{P_\mathrm{e}}^2}{2m_\mathrm{e}}}{\dfrac{{P_\mathrm{b}}^2}{2M_\mathrm{b}} + \dfrac{{P_\mathrm{e}}^2}{2m_\mathrm{e}}} \times K = \frac{M_\mathrm{b}}{m_\mathrm{e} + M_\mathrm{b}}(M_\mathrm{a} - M_\mathrm{b} - m_\mathrm{e})c^2 \quad (= [\text{一定}])$$

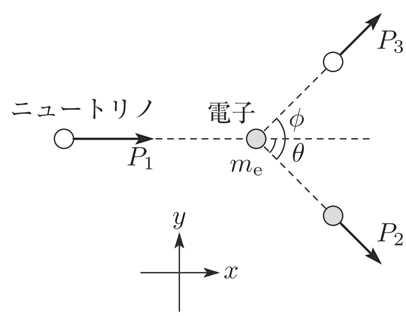
く,け. 運動量保存則より,

$$P_\mathrm{b} + P_\nu - P_\mathrm{e} = 0$$

エネルギー保存則より,

$$\frac{{P_\mathrm{b}}^2}{2M_\mathrm{b}} + \frac{{P_\mathrm{e}}^2}{2m_\mathrm{e}} + cP_\nu = (M_\mathrm{a} - M_\mathrm{b} - m_\mathrm{e})c^2$$

こ. 衝突後のニュートリノの運動量の大きさを P_3,進行方向を右図のように ϕ とすると,運動量保存則より,



$$\begin{cases} x \text{ 成分}:P_1 = P_3\cos\phi + P_2\cos\theta & \cdots ④ \\ y \text{ 成分}:0 = P_3\sin\phi - P_2\sin\theta & \cdots ⑤ \end{cases}$$

エネルギー保存則より,

$$cP_1 = cP_3 + \frac{{P_2}^2}{2m_\mathrm{e}} \quad \cdots ⑥$$

④，⑤より ϕ を消去すると，

$$(P_3\cos\phi)^2+(P_3\sin\phi)^2=(P_1-P_2\cos\theta)^2+(P_2\sin\theta)^2$$

$$\therefore\quad {P_3}^2={P_1}^2+{P_2}^2-2P_1P_2\cos\theta \qquad \therefore\quad \cos\theta=\frac{{P_1}^2+{P_2}^2-{P_3}^2}{2P_1P_2} \quad \cdots ⑦$$

⑥から得られる $P_3=P_1-\dfrac{{P_2}^2}{2m_{\mathrm{e}}c}$ と⑦より P_3 を消去すると，

$$\cos\theta=\frac{P_2}{2P_1}\left(1+\frac{P_1}{m_{\mathrm{e}}c}-\frac{{P_2}^2}{4{m_{\mathrm{e}}}^2c^2}\right)$$

問 2 (a) ニュートリノ・反ニュートリノが水分子中の電子と衝突する確率を上げて検出しやすくするため.

(b) 電子密度が気体より高く，チェレンコフ光が光電子増倍管に到達できる透明な物質として適するため.

添削課題

《解答》

(ア) $N = N_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

(イ) λ を用いた N の表式と，T を用いた N の表式より，

$$N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-\frac{t}{T}} \qquad \therefore \quad e^{\lambda t} = 2^{\frac{t}{T}}$$

対数をとると，

$$\lambda t = \frac{t}{T}\log_e 2 \qquad \therefore \quad \lambda T = \log_e 2 \quad \cdots (*)$$

(ウ) 核子

(エ) 陽子

(オ) 中性子

(カ) β 崩壊

(キ) $^{239}\mathrm{U}$　(より丁寧に $^{239}_{92}\mathrm{U}$ と書いてもよい．)

(ク) $^{239}\mathrm{Np}$　(より丁寧に $^{239}_{93}\mathrm{Np}$ と書いてもよい．)

(ケ) $^{234}\mathrm{Th}$　(より丁寧に $^{234}_{90}\mathrm{Th}$ と書いてもよい．)

(コ) $^{234}\mathrm{Pa}$　(より丁寧に $^{234}_{91}\mathrm{Pa}$ と書いてもよい．)

(サ) $\lambda_{238} N_{238}$

(シ) $\lambda_{234} N_{234}$

(ス) $(*)$ をふまえると，

$$\lambda_{234} T_{234} = \lambda_{238} T_{238} \qquad \therefore \quad T_{234} = \frac{\lambda_{238}}{\lambda_{234}} T_{238}$$

(セ) (サ)，(シ) の原子数が等しいので，

$$\lambda_{234} N_{234} = \lambda_{238} N_{238} \qquad \therefore \quad \frac{\lambda_{238}}{\lambda_{234}} = \frac{N_{234}}{N_{238}}$$

これと (ス) より，

$$T_{234} = \frac{N_{234}}{N_{238}} T_{238}$$

(ソ) ウランの総数を N_{U} と置き，(セ) に数値を代入すると，

$$\begin{aligned} T_{234} &= \frac{N_{\mathrm{U}} \times 0.0055\,\%}{N_{\mathrm{U}} \times 99.27\,\%} \times (4.47 \times 10^9\ \text{年}) \\ &\fallingdotseq 2.5 \times 10^5\ \text{年} \end{aligned}$$

《解説》

放射性原子核の崩壊は本質的に確率的な現象であり，放射性原子核が 1 つだけ存在している場合に「この原子核がいつ崩壊するのか」を事前に知ることはできない。しかし，放射性原子

核が十分に多く存在している場合には，本問の文章 A で述べられていた特徴・法則性が現れる．すなわち「単位時間あたりに崩壊する数がこの時刻での残存数 N に比例していて λN と表せる」のである．このことを式で書くと次のようになる．

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| = \lambda N \\ \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} < 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N \quad \cdots (*)'$$

この微分方程式の一般解は次式で与えられる．

$$N_{(t)} = (\text{定数}\ A) \times e^{-\lambda t}$$

$t = 0$ のとき $N = N_0$ とすると，$A = N_0$ と定まり，

$$N_{(t)} = N_0 e^{-\lambda t}$$

本問の文章 A で与えられていたのは，このようにして決定した最終的な表式である．

ところで，崩壊定数 λ にはどのような利用価値があるのだろうか．これを知るためには，$^{235}\mathrm{U}$ や $^{238}\mathrm{U}$ のように半減期 T がとても長い放射性原子核を考えるのがよい．これらの原子核では T があまりにも長すぎて，T そのものを測定することは不可能である．しかし，この場合にも残存数 N と単位時間当たりの崩壊数 $\left|\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|$ は測定でき，これらの測定値を $(*)'$ に代入することで λ を求めることができる．さらに，λ と T の間には $\lambda T = \log_e 2$ という関係があるので，λ から T を求めることができるのである．

このように，T が長すぎてそれ自体を測定できない場合には，λ を介して T を求めることが行われており，ここに λ の利用価値がある．

配点

100 点

(ア)，(イ)，(ス)，(セ)，(ソ) 各 10 点

(ウ)〜(シ) 各 5 点

２６章　質量・エネルギーの等価性

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 無限遠を基準にとると，原点 O からの距離が r のとき，陽子がもつ位置エネルギーは $U = \dfrac{k_0 qQ}{r}$ と表せる．これをふまえて，エネルギーの保存より，

$$0 + \frac{k_0 qQ}{a} = K + 0 \qquad \therefore \quad K = \frac{k_0 qQ}{a}$$

(2) 陽子が原子核の表面に到達できる限界のとき $a = R$ なので，

$$\begin{aligned}
K_{\min} &= \frac{k_0 \cdot e \cdot 79e}{R} \\
&= \frac{(9.0 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}) \times 79 \times (1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{6.5 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}} \\
&\fallingdotseq 2.8 \times 10^{-12}\,\mathrm{J} \\
&= \frac{2.8 \times 10^{-12}}{1.60 \times 10^{-13}}\,\mathrm{MeV} \\
&\fallingdotseq 18\,\mathrm{MeV}
\end{aligned}$$

(3) (a) 陽子，中性子ともに 2 個

(b) この反応でエネルギーに変わった質量を $\varDelta m$ とすると，

$$\begin{aligned}
\varDelta m &= (1.00783\,\mathrm{u} + 196.96656\,\mathrm{u}) - (4.00260\,\mathrm{u} + 193.96268\,\mathrm{u}) \\
&= 197.97439\,\mathrm{u} - 197.96528\,\mathrm{u} \\
&= 0.00911\,\mathrm{u} \\
&= 0.00911 \times (1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}) \\
&= 1.51 \times 10^{-29}\,\mathrm{kg}
\end{aligned}$$

よって，放出されたエネルギーは，

$$\begin{aligned}
\varDelta m \cdot c^2 &= (1.51 \times 10^{-29}\,\mathrm{kg}) \times (3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s})^2 \\
&\fallingdotseq 1.36 \times 10^{-12}\,\mathrm{J} \\
&= \frac{1.36 \times 10^{-12}}{1.60 \times 10^{-13}}\,\mathrm{MeV} \\
&= 8.5\,\mathrm{MeV}
\end{aligned}$$

【2】

《解答》

I (a) $\dfrac{1}{2}m{v_1}^2+\dfrac{1}{2}Mv^2=\dfrac{1}{2}m{v_0}^2 \quad \cdots ①$

(b) $\begin{cases} mv_1\cos\theta+Mv\cos\alpha=mv_0\cdots ② \\ mv_1\sin\theta-Mv\sin\alpha=0\cdots ③ \end{cases}$

(c) ②，③より，

$$\begin{cases} Mv\cos\alpha=m(v_0-v_1\cos\theta)\cdots ②' \\ Mv\sin\alpha=mv_1\sin\theta\cdots ③' \end{cases}$$

${②'}^2+{③'}^2$ より，

$$\begin{aligned}(Mv)^2&=m^2(v_0-v_1\cos\theta)^2+(mv_1\sin\theta)^2\\&=m^2({v_0}^2-2v_0v_1\cos\theta+{v_1}^2\cos^2\theta+{v_1}^2\sin^2\theta)\\&=m^2({v_0}^2+{v_1}^2-2v_0v_1\cos\theta)\end{aligned}$$

また，①より，

$$Mv^2=m({v_0}^2-{v_1}^2) \qquad \therefore \quad (Mv)^2=Mm({v_0}^2-{v_1}^2)$$

これらより，

$$Mm({v_0}^2-{v_1}^2)=m^2({v_0}^2+{v_1}^2-2v_0v_1\cos\theta)$$

$$\therefore \quad M\left\{1-\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\right\}=m\left\{1+\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2-2\cdot\frac{v_1}{v_0}\cos\theta\right\}$$

$\dfrac{v_1}{v_0}=x$ と置き，整理すると，

$$(M+m)x^2-2m\cos\theta\cdot x+(m-M)=0$$

これを解いて正の解をとると，

$$\begin{aligned}x&=\frac{m\cos\theta+\sqrt{(-m\cos\theta)^2-(M+m)(m-M)}}{M+m}\\&=\frac{m\cos\theta+\sqrt{m^2\cos^2\theta-(m^2-M^2)}}{M+m}\\&=\frac{m\cos\theta+\sqrt{M^2-m^2\sin^2\theta}}{M+m}\end{aligned}$$

(d) $\theta=180^\circ$ のとき，(c) より，

$$\begin{aligned}\frac{v_1}{v_0}&=\frac{m\cdot(-1)+\sqrt{M^2-m^2\cdot 0}}{M+m}\\&=\frac{M-m}{M+m}\end{aligned}$$

このとき，運動エネルギーの比は，

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2}m{v_1}^2}{\frac{1}{2}m{v_0}^2} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$$

(e) 衝突するたびに (d) の比で運動エネルギーが減少するので，

$$\begin{aligned}\frac{E_n}{E_0} &= \frac{E_n}{E_{n-1}} \times \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \times \cdots \times \frac{E_2}{E_1} \times \frac{E_1}{E_0} \\ &= \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{2n}\end{aligned}$$

(f) (e) に数値を代入すると，

$$\frac{0.025\,\mathrm{eV}}{2.0 \times 10^6\,\mathrm{eV}} = \left(\frac{12\,\mathrm{u} - 1\,\mathrm{u}}{12\,\mathrm{u} + 1\,\mathrm{u}}\right)^{2n} \qquad \therefore \quad \left(\frac{11}{13}\right)^{2n} = \frac{1}{8} \times 10^{-7}$$

対数をとると，

$$2n \log_{10} \frac{11}{13} = \log_{10} 2^{-3} - 7 \qquad \therefore \quad n = \frac{-3 \log_{10} 2 - 7}{2(\log_{10} 11 - \log_{10} 13)}$$

与えられた近似値を代入すると，

$$\begin{aligned} n &= \frac{-3 \times 0.3010 - 7}{2(1.041 - 1.114)} \\ &\fallingdotseq 54.1 \end{aligned}$$

54 回の衝突では運動エネルギーが 0.025 eV よりも大きく，55 回の衝突をすると運動エネルギーが 0.025 eV よりも小さくなる．

II (1) (ア) 同位体

(イ) 92

(ウ) $235 - 92 = 143$

(エ) $(235 + 1) - (141 + 92) = 3$

(オ) 連鎖反応

(2) 反応前と反応後の全質量をそれぞれ求めると，

$$\begin{aligned} \text{反応前の質量} &= 390.4079 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} + 1.6755 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \\ &= 392.0834 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \\ \text{反応後の質量} &= 234.0580 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} + 152.6409 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} + (1.6755 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}) \times 3 \\ &= 391.7254 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

反応による質量の減少を $\varDelta m$ とすると，

$$\begin{aligned} \varDelta m &= 392.0834 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} - 391.7254 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \\ &= 0.358 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \\ &= 3.58 \times 10^{-28}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

(3) (2) より，反応で放出されたエネルギーは，

$$
\begin{aligned}
\varDelta m \cdot c^2 &= (3.58 \times 10^{-28}\,\mathrm{kg}) \times (2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2 \\
&= 3.22 \times 10^{-11}\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

(4) 放出される全エネルギーを E とすると，

$$
\begin{aligned}
E &= (3.22 \times 10^{-11}\,\mathrm{J}) \times (6.025 \times 10^{23}\,\text{個}) \\
&\fallingdotseq 2 \times 10^{13}\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

これと等しいエネルギーを放出する TNT 火薬の質量を M とすると，

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{2 \times 10^{13}\,\mathrm{J}}{4 \times 10^{6}\,\mathrm{J/kg}} \\
&= 5 \times 10^{6}\,\mathrm{kg} \\
&= 5 \times 10^{3}\,\mathrm{ton}
\end{aligned}
$$

【3】

《解答》

(1) 陽電子と電子のペアが孤立して対消滅するので，運動量は変化しない。また，図 1(a) では粒子がともに静止していたので，対消滅で発生する光子全体としては運動量が 0 となる．このため，光子 2 個が発生する場合では，等しい大きさの運動量を持って互いに逆向きに放出される．

(2) 運動量の保存より

$$\frac{h\nu_1}{c} - \frac{h\nu_2}{c} = 0 \qquad \therefore \quad \nu_2 = \nu_1$$

対消滅した粒子の静止エネルギーが γ 線光子 2 個のエネルギーとして放出されたので，

$$h\nu_1 + h\nu_2 = mc^2 \cdot 2$$

これらより，

$$h\nu_1 \cdot 2 = 2mc^2 \qquad \therefore \quad \nu_1 = \frac{mc^2}{h}$$

この γ 線光子の運動量の大きさは，

$$p_1 = \frac{h\nu_1}{c} = mc$$

(3) 運動量の保存より，

$$\begin{cases} P_x = p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}} \cos\theta \\ P_y = p_{\mathrm{B}} \sin\theta \end{cases}$$

(4) 対消滅する前に電子がもっていた運動エネルギーが静止エネルギーと比べて無視できるとき，γ 線光子 2 個のエネルギーは対消滅した粒子の静止エネルギーと等しいとみなせるので，

$$h\nu_{\mathrm{A}} + h\nu_{\mathrm{B}} = mc^2 \cdot 2 \qquad \therefore \quad cp_{\mathrm{A}} + cp_{\mathrm{B}} = 2mc^2$$

また，(3) で θ を微小とみなすと，

$$P_x \fallingdotseq p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}} \cdot 1$$

これらより，

$$\begin{cases} p_{\mathrm{A}} = mc + \dfrac{1}{2} P_x \\ p_{\mathrm{B}} = mc - \dfrac{1}{2} P_x \end{cases}$$

(5) (2)，(4) をふまえると，

$$\frac{h\nu_{\mathrm{A}}}{c} = \frac{h\nu_1}{c} + \frac{1}{2} P_x \qquad \therefore \quad P_x = \frac{2h(\nu_{\mathrm{A}} - \nu_1)}{c}$$

【4】

《解答》

(ア) 4

(イ) 2

(ウ)，(エ)　P の質量数を A，原子番号を Z とすると，

$$\begin{cases} \text{質量数保存：} \quad 27+4=A+1 \qquad \therefore \quad A=30 \quad \cdots(\text{ウ}) \\ \text{電荷保存：} \quad 13+2=Z+0 \qquad \therefore \quad Z=15 \quad \cdots(\text{エ}) \end{cases}$$

(オ)，(カ)　Si の質量数を A'，原子番号を Z' とすると，

$$\begin{cases} \text{質量数保存：} \quad 30=A'+0 \qquad \therefore \quad A'=30 \quad \cdots(\text{オ}) \\ \text{電荷保存：} \quad 15=Z'+1 \qquad \therefore \quad Z'=14 \quad \cdots(\text{カ}) \end{cases}$$

(キ) 電子と陽電子の質量はともに m_{e} であるから，対消滅によって失われた質量は，$2m_{\mathrm{e}}$.

(ク)

$$\begin{aligned} 2E_\gamma &= 2\times m_{\mathrm{e}}c^2 \\ \therefore \quad E_\gamma &= m_{\mathrm{e}}c^2 \\ &= (9\times10^{-31}\,\mathrm{kg})\times(3\times10^{8}\,\mathrm{m/s})^2 \fallingdotseq 8\times10^{-14}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

(ケ)

$$\begin{aligned} p_\gamma &= \frac{E_\gamma}{c} = m_{\mathrm{e}}c \\ &= (9\times10^{-31}\,\mathrm{kg})\times(3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}) \fallingdotseq 3\times10^{-22}\,\mathrm{kg\cdot m/s} \end{aligned}$$

(コ) $+x$ 側に放出されたガンマ線光子のエネルギーを $E_{\gamma1}$，$-x$ 側に放出されたガンマ線光子のエネルギーを $E_{\gamma2}$ とすると，運動量保存則より，

$$\begin{cases} x\,\text{成分：} \quad \dfrac{E_{\gamma1}}{c}\cos\theta+\left(-\dfrac{E_{\gamma2}}{c}\cos\theta\right)=0 \quad \cdots① \\ y\,\text{成分：} \quad \dfrac{E_{\gamma1}}{c}\sin\theta+\dfrac{E_{\gamma2}}{c}\sin\theta=p_{\mathrm{e}} \quad \cdots② \end{cases}$$

エネルギー保存則より，

$$E_{\gamma1}+E_{\gamma2}=2\times m_{\mathrm{e}}c^2+\frac{{p_{\mathrm{e}}}^2}{2m_{\mathrm{e}}} \quad \cdots③$$

①，③より，$E_{\gamma1}=E_{\gamma2}=m_{\mathrm{e}}c^2+\dfrac{{p_{\mathrm{e}}}^2}{4m_{\mathrm{e}}}$．さらに②より，

$$\sin\theta=\frac{cp_{\mathrm{e}}}{2E_{\gamma1}}=\frac{2m_{\mathrm{e}}cp_{\mathrm{e}}}{4{m_{\mathrm{e}}}^2c^2+{p_{\mathrm{e}}}^2}$$

Z-KAI

会員番号		氏　名	