M2JS/M2J

本科 2 期 12 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 選抜東大数学

高 2 東大数学

問題

【1】　(I) $n=1$ のとき，(左辺) $=2$, (右辺) $=2$ より与不等式は成り立つ．

(II) $n=k$ のとき与不等式が成り立つ，すなわち

$$2^k \geqq k^2-k+2$$

が成り立つと仮定する．すると

$$\begin{aligned}&2^{k+1}-\left\{(k+1)^2-(k+1)+2\right\}\\&=2\cdot 2^k-(k^2+k+2)\\&\geqq 2(k^2-k+2)-(k^2+k+2)\\&=k^2-3k+2\\&=(k-1)(k-2)\geqq 0 \quad (\because k \text{ は自然数})\end{aligned}$$

であるから，$n=k+1$ のとき与不等式は成り立つ．

以上 (I)，(II) より，すべての自然数 n に対して与不等式は成り立つ．

（証明終）

【2】与等式において，$n=1$ とすると

$$a_1{}^3=a_1{}^2 \iff a_1=1 \quad (\because \quad a_1>0)$$

また，与等式において $n=2$ とすると

$$\begin{aligned}&a_1{}^3+a_2{}^3=(a_1+a_2)^2\\\iff\ &1+a_2{}^3=(1+a_2)^2\\\iff\ &a_2{}^3-a_2{}^2-2a_2=0\\\iff\ &a_2(a_2+1)(a_2-2)=0\\\iff\ &a_2=2 \quad (\because \quad a_2>0)\end{aligned}$$

さらに，与等式おいて $n=3$ とすると

$$\begin{aligned}&a_1{}^3+a_2{}^3+a_3{}^3=(a_1+a_2+a_3)^2\\\iff\ &1+8+a_3{}^3=(1+2+a_3)^2\\\iff\ &a_3{}^3-a_3{}^2-6a_3=0\\\iff\ &a_3(a_3+2)(a_3-3)=0\\\iff\ &a_3=3 \quad (\because \quad a_3>0)\end{aligned}$$

以上より

$$a_n=n\ (n=1,\ 2,\ 3,\dots)\ \cdots ①$$

であることが予想される．これを数学的帰納法によって示す．

(I) $n=1$ のとき，先の計算より，①は成り立つ．

(II) $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$ のとき①が成り立つと仮定する．

このとき，与等式において $n=k+1$ とすると

$$\begin{aligned}
& {a_1}^3+{a_2}^3+\cdots\cdots+{a_k}^3+{a_{k+1}}^3=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k+a_{k+1})^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3+{a_{k+1}}^3=(1+2+\cdots\cdots+k+a_{k+1})^2 \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+{a_{k+1}}^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}+a_{k+1}\right\}^2 \\
\Longleftrightarrow\ & {a_{k+1}}^3-{a_{k+1}}^2-k(k+1)a_{k+1}=0 \\
\Longleftrightarrow\ & a_{k+1}(a_{k+1}+k)(a_{k+1}-k-1)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & a_{k+1}=k+1 \quad (\because\ \ a_{k+1}>0)
\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

以上，(I)，(II) より，任意の自然数 n に対して①が成り立つので

$$a_n=n \qquad \text{(答)}$$

【3】 (I) $n=1$ のとき，$x^n+y^n=x+y$ で整数であり，

$n=2$ のとき，$x^n+y^n=(x+y)^2-2xy$ で整数である．

(II) $n=k,\ n=k+1$ (k は自然数) のとき，x^n+y^n が整数であると仮定すると

$$x^{k+2}+y^{k+2}=(x^{k+1}+y^{k+1})(x+y)-xy(x^k+y^k)$$

であるので，$x^{k+2}+y^{k+2}$ は整数である．

(I)，(II) から，すべての自然数 n に対して x^n+y^n は整数である．

（証明終）

【4】 (I) $n=0$ のとき，(左辺) $=1$，(右辺) $=1$ となり，与等式は成り立つ.

(II) $n=k\ (k \geqq 0)$ のとき与等式が成り立つと仮定すると

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

このとき

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta \quad (\because \text{加法定理})\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも成り立つので，数学的帰納法により，与等式は 0 以上の整数 n で成り立つ.

(III) $n=k\ (k \leqq 0)$ のとき与等式が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k-1} &= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^k}{\cos\theta + i\sin\theta}\\ &= \frac{\cos k\theta + i\sin k\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}\\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)\\ &= \cos k\theta\cos\theta + \sin k\theta\sin\theta + i(\sin k\theta\cos\theta - \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k-1)\theta + i\sin(k-1)\theta \quad (\because \text{加法定理})\end{aligned}$$

したがって，$n=k-1$ のときも成り立つので，数学的帰納法により，与等式は 0 以下の整数 n で成り立つ.

以上より，任意の整数 n に対して与等式は成り立つ. （証明終）

【5】(1) $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について

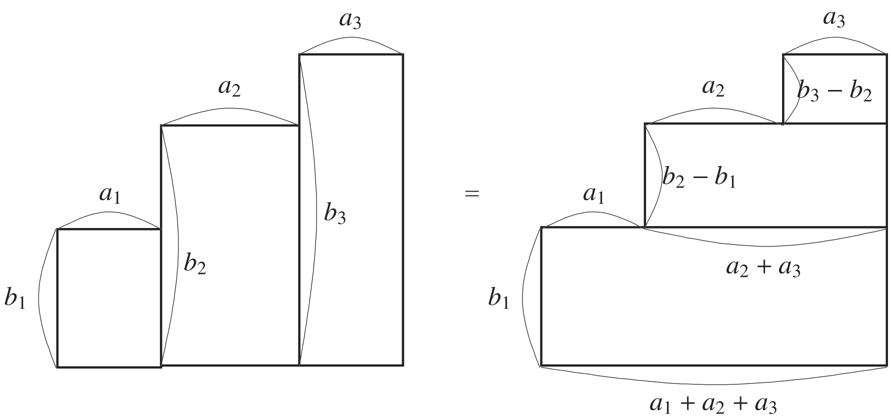
$$a_1b_1 + a_2b_2 = (a_1 + a_2)b_1 + a_2(b_2 - b_1)$$

と類似の等式は

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = (a_1 + a_2 + a_3)b_1 + (a_2 + a_3)(b_2 - b_1) + a_3(b_3 - b_2) \qquad \text{(答)}$$

また，この式は，図 24.1 のように適切に隣接させた３つの長方形を合わせた図形を別の３つの長方形に分けることによって，２通りの方法でその図形の面積を求めたものと解釈できる． (答)

図 24.1



(2) $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ について

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)b_1 + \sum_{k=2}^{n}\left\{\left(\sum_{i=k}^{n} a_i\right)(b_k - b_{k-1})\right\} \quad \cdots\cdots(\sharp)$$

が成り立つと推定できる．以下，数学的帰納法により，$n \geqq 2$ のとき $(\sharp)$ が成り立つことを示す．

(i) $n = 2$ のとき

$$\text{左辺} = a_1b_1 + a_2b_2$$
$$\text{右辺} = (a_1 + a_2)b_1 + a_2(b_2 - b_1) = a_1b_1 + a_2b_2$$

より，$(\sharp)$ が成り立つ．

(ii) $n = m$ のとき，$(\sharp)$ すなわち

$$\sum_{i=1}^{m} a_ib_i = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)b_1 + \sum_{k=2}^{m}\left\{\left(\sum_{i=k}^{m} a_i\right)(b_k - b_{k-1})\right\} \quad \cdots\cdots(\sharp)'$$

が成り立つと仮定する．このとき

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i\right) b_1 + \sum_{k=2}^{m+1} \left\{\left(\sum_{i=k}^{m+1} a_i\right)(b_k - b_{k-1})\right\} \\
&= \left(a_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} a_i\right) b_1 + a_{m+1}(b_{m+1} - b_m) + \sum_{k=2}^{m} \left\{\left(\sum_{i=k}^{m+1} a_i\right)(b_k - b_{k-1})\right\} \\
&= a_{m+1} b_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) b_1 + a_{m+1}(b_{m+1} - b_m) \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{m} \left\{\left(a_{m+1} + \sum_{i=k}^{m} a_i\right)(b_k - b_{k-1})\right\} \\
&= a_{m+1}\{b_1 + (b_{m+1} - b_m) + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_m - b_{m-1})\} \\
&\qquad + \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) b_1 + \sum_{k=2}^{m} \left\{\left(\sum_{i=k}^{m} a_i\right)(b_k - b_{k-1})\right\} \\
&= a_{m+1} b_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} a_i b_i \qquad (\because \quad (\sharp)') \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} a_i b_i
\end{aligned}
$$

よって，$n = m + 1$ のときも $(\sharp)$ が成り立つ．

したがって，数学的帰納法より示された． （証明終）

添削課題

【1】 (I) $n=1$ のとき，$1<2$ となり与不等式は成り立つ.

(II) $n=k$ のとき，与不等式が成り立つと仮定すると

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}\ \cdots①$$

このとき，①の両辺に $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ を加えて

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

ここで

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{k+1}\right)-\left(2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)&=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left\{2(k+1)-2\sqrt{k(k+1)}-1\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(2k+1-2\sqrt{k(k+1)}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2>0\end{aligned}$$

より

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$$

であり

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$$

が成立する．したがって，$n=k+1$ のときも与不等式は成り立つ.

(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して与不等式が成り立つ. （証明終）

問題

【1】(1) $f(x)$ を x について微分して

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax - 24a^2 = 3(x-4a)(x+2a)$$

ここで

$$f(-2a) = -8a^3 - 12a^3 + 48a^3 + b = 28a^3 + b$$
$$f(4a) = 64a^3 - 48a^3 - 96a^3 + b = -80a^3 + b$$

よって, 極大値と極小値の差が 4 だから

$$|f(4a) - f(-2a)| = \left|-108a^3\right| = 4$$
$$\therefore \left|a^3\right| = \frac{1}{27} \qquad \therefore \quad a = \pm\frac{1}{3} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a = \dfrac{1}{3}$ のとき

$$x = -2a = -\frac{2}{3} \quad \text{で極大}$$
$$x = 4a = \frac{4}{3} \quad \text{で極小}$$

となるから

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 28 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + b > 0$$
$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -80 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + b < 0$$

より

$$-\frac{28}{27} < b < \frac{80}{27} \qquad \text{(答)}$$

同様に $a = -\dfrac{1}{3}$ のとき

$$-\frac{80}{27} < b < \frac{28}{27} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $y' = 3x^2 - 1$ より

$$y = (3t^2-1)(x-t) + t^3 - t + 6$$
$$\therefore \quad y = (3t^2-1)x - 2t^3 + 6 \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の式が $(x,\ y) = (-2,\ 0)$ をみたすので

$$0 = (3t^2-1)\cdot(-2) - 2t^3 + 6 \quad \therefore \quad 2t^3 + 6t^2 - 8 = 0$$

これより

$$(t-1)(t^2+4t+4) = (t-1)(t+2)^2 = 0 \qquad \therefore \quad t = 1,\ -2$$

$$\left.\begin{array}{lll} t = 1 & \text{のとき} & y = 2x+4 \\ t = -2 & \text{のとき} & y = 11x+22 \end{array}\right. \qquad \text{(答)}$$

(3) $y = 2x + 4$ と C との共有点は

$$x^3 - x + 6 - (2x + 4) = (x - 1)^2(x + 2) = 0$$

より

$$(1,\ 6),\ (-2,\ 0) \qquad \text{(答)}$$

$y = 11x + 22$ と C との共有点は

$$x^3 - x + 6 - (11x + 22) = (x + 2)^2(x - 4) = 0$$

より

$$(4,\ 66),\ (-2,\ 0) \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $f(x) = x^3 - 3x - a$ とおく

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$$

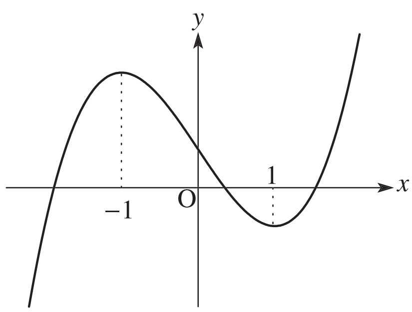
より，$f(x)$ は $x = -1$ で極大値，$x = 1$ で極小値をとる.
ここで，$f(x) = 0$ が異なる 3 実数解をもつための条件は

$$f(-1)f(1) < 0$$

であるから，求める a の値の範囲は

$$(2 - a)(-2 - a) < 0$$
$$\therefore \quad -2 < a < 2 \qquad \text{(答)}$$

図 25.1



(2) (1) より，$y = f(x)$ のグラフは図 25.1 のようになるから，題意をみたすためには，(1) の条件の下で $f(0) > 0$ となることが条件となる.

$$f(0) > 0 \iff a < 0$$

より，(1) の条件とあわせて

$$-2 < a < 0 \qquad \text{(答)}$$

【4】$f(x)$ を x について微分すると

$$f'(x) = \frac{3}{4}\left\{x^2 - (a-2)x - 2a\right\} = \frac{3}{4}(x+2)(x-a)$$

(i) $a = -2$ のとき，$f'(x) = \dfrac{3}{4}(x+2)^2$ となり，つねに $f'(x) \geqq 0$ だから $f(x)$ は増加関数であり，極大値は存在しない．

(ii) $a < -2$ のとき，$\alpha = a,\ \beta = -2$ とおくと，$f(x)$ の増減は次のようになり，$x = \alpha = a$ のときに極大になるから，

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$M(a) = f(a) = -\frac{1}{8}(a^3 + 6a^2)$$

(iii) $a > -2$ のとき，$\alpha = -2,\ \beta = a$ とおくと，$f(x)$ の増減は上の表のようになり，$x = \alpha = -2$ のとき極大になるから

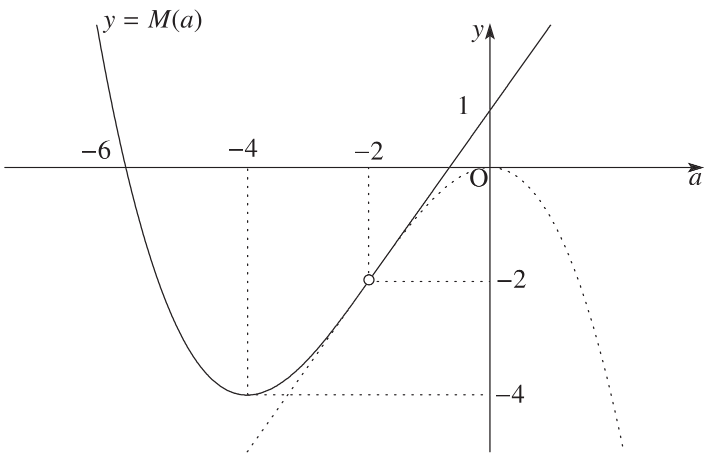
$$M(a) = f(-2) = \frac{3}{2}a + 1$$

ここで，$a < -2$ のときの $M(a)$ については

$$\begin{aligned} M'(a) &= -\frac{1}{8}(3a^2 + 12a) \\ &= -\frac{3}{8}a(a+4) \\ M(-4) &= -4 \end{aligned}$$

であることに注意すると，$y = M(a)$ のグラフは図 25.2 のようになる．ただし，点 $(-2,\ -2)$ は除く．　　(答)

図 25.2



【5】(1) $f'(x) = x^2 - 4$ より，求める接線の方程式は

$$y - f(p) = (p^2 - 4)(x - p)$$
$$\therefore\quad y = (p^2 - 4)x - \frac{2}{3}p^3 \ \cdots ① \qquad \text{(答)}$$

(2) 直線 ① が点 $(2,\ a)$ を通るとき

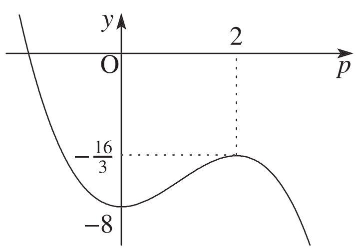
$$a = 2(p^2 - 4) - \frac{2}{3}p^3$$
$$a = -\frac{2}{3}p^3 + 2p^2 - 8 \ \cdots ②$$

ここで，p の方程式 ② の実数解の個数が点 $(2,\ a)$ から引くことの出来る接線の本数に一致する．② の右辺を $g(p)$ とおくと

$$g'(p) = -2p^2 + 4p = -2p(p - 2)$$

より，$y = g(p)$ のグラフは図 25.3 のようになる．

図 25.3



求める接線の本数は，曲線 $y = g(p)$ と直線 $y = a$ の共有点の個数を考えて

$$\begin{cases} a < -8,\ -\dfrac{16}{3} < a \text{ のとき} & 1\text{ 本} \\ a = -8,\ -\dfrac{16}{3} \text{ のとき} & 2\text{ 本} \\ -8 < a < -\dfrac{16}{3} \text{ のとき} & 3\text{ 本} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(3) ① が点 $(X,\ Y)$ を通るとき，(2) と同様に

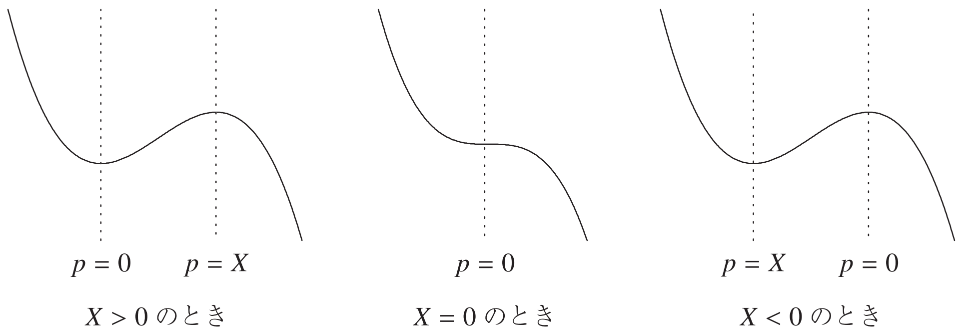
$$Y = -\frac{2}{3}p^3 + p^2X - 4X \ \cdots ③$$

ここで，p の方程式 ③ の実数解の個数が点 $(X,\ Y)$ から引くことのできる接線の本数に一致する．③ の右辺を $h(p)$ とおくと

$$h'(p) = -2p^2 + 2pX = -2p(p - X)$$

であり，$y = h(p)$ のグラフは 図 25.4 のようになるから，曲線 $y = h(p)$ と直線 $y = Y$ の共有点が 3 個となるための条件を求めると

図 25.4



(a) $X > 0$ のとき，X, Y のみたすべき条件は

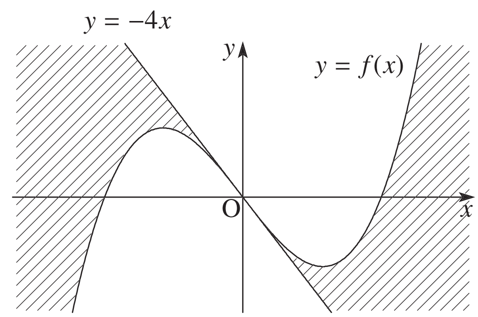
$$-4X < Y < \frac{X^3}{3} - 4X$$

(b) $X = 0$ のとき，すべての実数 Y について条件をみたさない．

(c) $X < 0$ のとき，X, Y のみたすべき条件は

$$\frac{X^3}{3} - 4X < Y < -4X$$

以上，図示すると求める (X, Y) の存在範囲は下図のようになる．ただし，境界線は含まない．　　(答)



添削課題

【1】$f(x) = x^3 - x - 5$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

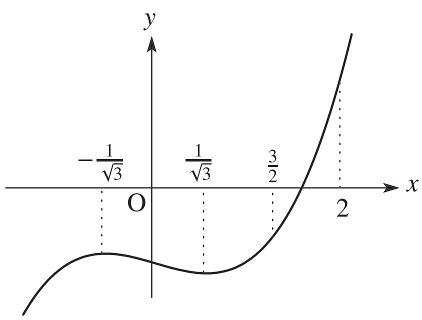
これより，増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 5 < 0$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - \frac{3}{2} - 5 = \frac{15}{8} - 5 < 0$$
$$f(2) = 8 - 2 - 5 = 1 > 0$$

以上より，$f(x)$ のグラフは次のようになる.

図 1.1



よって，ただ 1 つの実数解 a は $\frac{3}{2} < a < 2$ にある.　（証明終）

問題

【1】一般に

$$\int (x-\alpha)^n dx = \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1} + C \quad (\alpha\text{は実数の定数}, \ C\text{ は積分定数})$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx \\ &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2 dx - (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)dx \\ &= \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta - (\beta-\alpha)\left[\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

よって，与等式は成り立つ.　　　（証明終）

【2】(1) $2x^2-5x+3=x-1$ より

$$2x^2-6x+4=2(x-2)(x-1)=0$$

これより

$$\begin{aligned}\int_1^2 \{x-1-(2x^2-5x+3)\}\,dx &= \int_1^2 -2(x-2)(x-1)\,dx \\ &= \frac{2(2-1)^3}{6} \\ &= \frac{1}{3} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $x(x-1)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ より

$$2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)=0$$

これより

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^1 \left\{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-x(x-1)\right\} dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 -(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{9}{16} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

【3】$\int_0^1 f(t)dt = a, \ \int_1^2 f(t)dt = b$ とおくと

$$f(x)=x^2+ax+b$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t^2+at+b)dt &= \left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=a\\ \int_1^2 (t^2+at+b)dt &= \left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_1^2\\ &= \frac{7}{3}+\frac{3a}{2}+b=b\end{aligned}$$

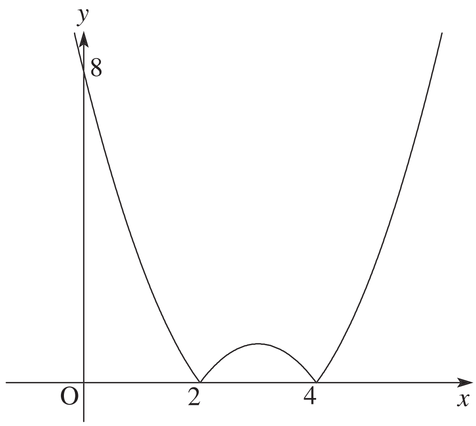
これより

$$b=-\frac{10}{9},\ a=-\frac{14}{9}$$

$$\therefore \quad f(x)=x^2-\frac{14}{9}x-\frac{10}{9} \qquad (\text{答})$$

【4】(1) $f(x) = |(x-3)^2 - 1|$ より，グラフは図 26.1 のようになる． (答)

図 26.1



(2) 2 次関数の軸に関する対称性より，$\dfrac{a + (a+1)}{2} \leqq 3 \iff a \leqq \dfrac{5}{2}$ の範囲で考える．

図 26.2

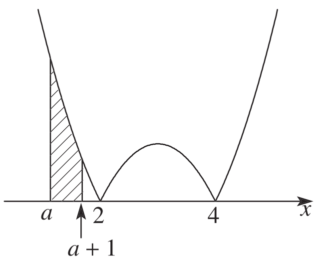


図 26.3

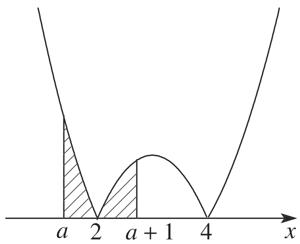
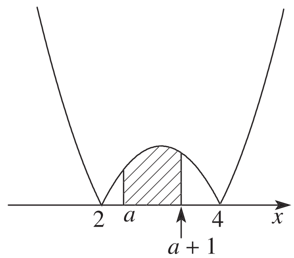


図 26.4



$\displaystyle\int_a^{a+1} |x^2 - 6x + 8| dx$ は a の関数であり，これを $g(a)$ とおくと

(i) $a + 1 \leqq 2 \iff a \leqq 1$ のとき (図 26.2 参照)

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_a^{a+1} (x^2 - 6x + 8) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_a^{a+1} \\ &= \frac{(a+1)^3 - a^3}{3} - 3\{(a+1)^2 - a^2\} + 8\{(a+1) - a\} \\ &= \frac{3a^2 + 3a + 1}{3} - 6a + 5 \\ &= a^2 - 5a + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

であるから

$$g'(a) = 2a - 5 < 0 \quad (\because\ a \leqq 1)$$

(ii) $a \leqq 2 < a+1 \iff 1 < a \leqq 2$ のとき (図 26.3 参照)

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_a^2 (x^2-6x+8)dx + \int_2^{a+1} -(x^2-6x+8)dx \\ &= 2\left(\frac{8}{3}-12+16\right) - \frac{a^3+(a+1)^3}{3} + 3(2a^2+2a+1) - 8(2a+1) \\ &= -\frac{2}{3}a^3 + 5a^2 - 11a + 8 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} g'(a) &= -2a^2 + 10a - 11 \\ &= -2\left(a - \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)\left(a - \frac{5+\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

であり

$$\begin{cases} 1 < a < \dfrac{5-\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} & g'(a) < 0 \\ a = \dfrac{5-\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} & g'(a) = 0 \\ \dfrac{5-\sqrt{3}}{2} < a \leqq 2 \text{ のとき} & g'(a) > 0 \end{cases}$$

(iii) $2 < a \leqq \dfrac{5}{2}$ のとき (図 26.4 参照)

$$g(a) = \int_a^{a+1} -(x^2-6x+8)dx = -a^2 + 5a - \frac{16}{3}$$

であるから

$$g'(a) = -2a + 5 \geqq 0 \quad \left(\because\ 2 < a \leqq \frac{5}{2}\right)$$

以上まとめると，$g(a)$ の増減は

$$\begin{cases} a < \dfrac{5-\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} & g'(a) < 0 \\ a = \dfrac{5-\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} & g'(a) = 0 \\ \dfrac{5-\sqrt{3}}{2} < a \leqq \dfrac{5}{2} \text{ のとき} & g'(a) \geqq 0 \end{cases}$$

となる．よって，$g(a)$ を最小にするような a の値は

$$a = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$$

また，$a \geqq \dfrac{5}{2}$ のとき，2 次関数の軸に関する対称性より，$g(a)$ は

$$a = 2\cdot\frac{5}{2} - \frac{5-\sqrt{3}}{2} = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$$

において最小値をとる．

以上から，$g(a)$ を最小にするような a の値は

$$a = \frac{5\pm\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(答)}$$

【5】$f(x)$ は n 次式であるとすると

$$(\text{左辺の次数}) = n + 1$$

である．また，$n \geqq 3$ であると仮定すると，$f'(x)$ は $n-1$ 次式だから $f(x)f'(x)$ は $2n-1$ 次式であり，$n \geqq 3$ より $2n-1 \geqq 5 > 1$ だから

$$(\text{右辺の次数}) = 2n - 1$$

である．ところが，$n \geqq 3$ のとき $n+1 < 2n-1$ だから，両辺の次数は一致しない．

よって，$n \leqq 2$ だから

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a,\ b,\ c\ \text{は定数})$$

とおくことができ，このとき

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (at^2 + bt + c)dt = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$$

$$f(x)f'(x) + \frac{2}{9}x + \frac{1}{6} = (ax^2 + bx + c)(2ax + b) + \frac{2}{9}x + \frac{1}{6}$$

だから，与えられた等式が成立するための条件は，両辺の係数を比較し

$$\frac{a}{3} = 2a^2 \ \cdots ①$$

$$\frac{b}{2} = 3ab \ \cdots ②$$

$$c = 2ac + b^2 + \frac{2}{9} \ \cdots ③$$

$$bc + \frac{1}{6} = 0 \ \cdots ④$$

① より $a(6a-1) = 0$ であるが，$a = 0$ とすると，② より $b = 0$ となり ④ が成立しないから $a \neq 0$ である．よって

$$a = \frac{1}{6}$$

であり，このとき，任意の b に対して ② が成立する．また，③ は

$$c = \frac{c}{3} + b^2 + \frac{2}{9} \qquad \therefore \quad c = \frac{3}{2}b^2 + \frac{1}{3} \ \cdots ⑤$$

となり，これを ④ に代入すると

$$9b^3 + 2b + 1 = 0 \qquad \therefore \quad (3b+1)(3b^2 - b + 1) = 0 \ \cdots ⑥$$

ここで，b は実数だから

$$3b^2 - b + 1 = 3\left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} \neq 0$$

よって，⑥ より $b = -\frac{1}{3}$ であり，これを ⑤ に代入すると，$c = \frac{1}{2}$.

以上より

$$a = \frac{1}{6},\ b = -\frac{1}{3},\ c = \frac{1}{2}$$

だから

$$f(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \qquad (\text{答})$$

添削課題

【1】(1) C と ℓ の方程式を連立して

$$\begin{aligned} & kx = x^3 - 6x^2 + 9x \\ \iff\ & x^3 - 6x^2 + (9-k)x = 0 \\ \iff\ & x(x^2 - 6x + 9 - k) = 0 \cdots ① \end{aligned}$$

ここで，C と ℓ が異なる 3 点で交わるための必要十分条件は，x の方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつことである．

さて，① は $x = 0$ を解にもつから，x の方程式

$$x^2 - 6x + 9 - k = 0 \cdots ②$$

が 0 と異なる 2 実数解をもつことが条件となる．

$$② \iff (x-3)^2 = k$$

より，求める条件は

$$k > 0,\ k \neq 9 \qquad \text{(答)}$$

(2) ② の 2 解を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 6$$

であるので，$\alpha < \beta$ とあわせて，$\beta > 0$.

また，$f(x) = x^3 - 6x^2 + (9-k)x$ とおく．

(i) $0 < \alpha < \beta$ のとき

条件より

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \iff \int_0^{\beta} f(x)dx = 0$$

であるから

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9-k}{2}x^2\right]_0^{\beta} = 0 \\ \frac{\beta^4}{4} - 2\beta^3 + \frac{9-k}{2}\beta^2 = 0 \\ \beta^2\{\beta^2 - 8\beta + 2(9-k)\} = 0 \end{aligned}$$

$\beta^2 - 6\beta + 9 - k = 0 \iff 9 - k = -\beta^2 + 6\beta$ より

$$\begin{aligned} & \beta^2\{\beta^2 - 8\beta + 2(-\beta^2 + 6\beta)\} = 0 \\ & \beta^3(\beta - 4) = 0 \\ \therefore\ & \beta = 4 \quad (\because\ \beta \neq 0) \end{aligned}$$

このとき

$$k = \beta^2 - 6\beta + 9 = 1$$

(ii) $\alpha < 0 < \beta$ のとき

条件より

$$\int_\alpha^0 f(x)dx = -\int_0^\beta f(x)dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$$

であるから，(i) と同様の処理により

$$\frac{\beta^4}{4} - 2\beta^3 + \frac{9-k}{2}\beta^2 - \left(\frac{\alpha^4}{4} - 2\alpha^3 + \frac{9-k}{2}\alpha^2\right) = 0$$
$$\beta^3(\beta - 4) - \alpha^3(\alpha - 4) = 0$$
$$(\beta^4 - \alpha^4) - 4(\beta^3 - \alpha^3) = 0$$

辺々 $\beta - \alpha$ $(\neq 0)$ で割って

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2) - 4(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = 0$$
$$(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\} - 4\{(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta\} = 0$$

$\alpha + \beta = 6$ より

$$6(36 - 2\alpha\beta) - 4(36 - \alpha\beta) = 0$$
$$\therefore \quad \alpha\beta = 9$$

これは，$\alpha < 0 < \beta$ に反する．

以上から，$k = 1$.　　(答)

M2JS/M2J

高２選抜東大数学

高２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	