M2JD

本科２期12月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２東大理系数学Ⅲ

Lecture 11　積分法(8)　区分求積法 - 解答

演習問題 11 − 1

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+3k}{n}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{4n}$

解答・解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$　(答)

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3=\int_0^1 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$　(答)

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\cdot\frac{k}{n}}=\int_0^1 e^{2x}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2}$　(答)

(4) (与式) $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+3\cdot\frac{k}{n}\right)=3\int_0^1(1+3x)\,dx=3\cdot\left[\frac{1}{6}(1+3x)^2\right]_0^1=\frac{15}{2}$　(答)

(5) (与式) $\displaystyle=\int_0^1\sin^2\frac{\pi x}{4}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\pi-2}{2\pi}$　(答)

演習問題 11 − 2

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+2n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{4n}{2n}+\frac{4n+1}{2n}+\frac{4n+2}{2n}+\cdots\cdots+\frac{6n-1}{2n}\right)$

解答・解説

(1) $\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$

ここで，$x=\tan t$ と置換する．$dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$ より

$$(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}\qquad(\text{答})$$

(2) $\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^2\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^2=\log 3\qquad(\text{答})$

(3) $\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\left(2+\frac{k}{2n}\right)=\int_0^1(2+x)\,dx=\left[2x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{5}{2}\qquad(\text{答})$

演習問題 11 − 3

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!}}$ を求めよ．

解答・解説

$a_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(2n)!}}$ とする．$a_n>0$ であることから，自然対数をとると

$$\begin{aligned}\log a_n&=\log\left\{\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!}}\right\}\\&=\log\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\log\frac{(3n)!}{(2n)!}\\&=-\log n+\frac{1}{n}\log 3n(3n-1)(3n-2)\cdots(2n+2)(2n+1)\\&=\frac{1}{n}\{\log 3n+\log(3n-1)+\cdots+\log(2n+1)-n\log n\}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log(2n+k)-\log n\}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(2+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log a_n&=\int_0^1\log(2+x)\,dx\\&=\Big[(2+x)\log(2+x)\Big]_0^1-\int_0^1 dx\\&=3\log 3-2\log 2-1\\&=\log 27-\log 4-\log e\\&=\log\frac{27}{4e}\end{aligned}$$

従って

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{27}{4e}\qquad(\text{答})$$

演習問題 11 − 4

長さが 2 の線分 AB を直径とする半円の弧 AB を n 等分する点を，A に近い方から順に $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_{n-1}$ とする．点 $\mathrm{P}_k\ (k = 1, 2, \cdots n-1)$ から線分 AB に下した垂線の長さを L_k とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} L_k$ を求めよ．

解答・解説

半円の中心を O とすれば，$k = 1, 2, 3, \cdots, n-2$ について

$$\angle \mathrm{AOP}_1 = \angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = \angle \mathrm{P}_2\mathrm{OP}_3 = \cdots = \angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{OB} = \frac{\pi}{n}$$

ゆえに

$$L_k = \sin\frac{\pi k}{n} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

従って

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} L_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}\\ &= \int_0^1 \sin\pi x\,dx\\ &= \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1\\ &= \frac{2}{\pi} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

別解 11.1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} L_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi} \qquad \text{(答)}$$

添削課題 11 − 1

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}e^{\frac{k}{n}+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4n^2-k^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\log k-\log n}{k}$

解答・解説

(1) (与式) $\displaystyle=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$ (答)

(2) (与式) $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$ (答)

(3) (与式) $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}+1}=\int_0^1 xe^{x+1}\,dx=\left[xe^{x+1}\right]_0^1-\int_0^1 e^{x+1}\,dx=e$ (答)

(4) 与式は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4n^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k-1}^{n}\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\,\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$$

ここで，$x=2\sin\theta$ とおくと，

$$dx=2\cos\theta\,d\theta,\qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{6}\end{array}$$

よって

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\,2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2\theta\,d\theta$$

半角公式を使って次数を下げると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2\theta\,d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\&=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\&=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(5) 与式を変形すると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\\ &= [\log(1+x)]_0^1\\ &= \log 2 \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(6) 与式を変形すると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\log k-\log n}{k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\cdot\log\frac{k}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{n}\frac{1}{\frac{k}{n}}\cdot\log\frac{k}{n}\\ &= \int_1^2 \frac{\log x}{x}\,dx\\ &= \int_1^2 (\log x)'\log x\,dx\\ &= \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^2\\ &= \frac{1}{2}(\log 2)^2 \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

添削課題 **11 − 2**

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}}$ を求めよ．

解答・解説

$a_n=\displaystyle\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}}$ とする．$a_n>0$ であることから，自然対数をとると

$$\begin{aligned}\log a_n&=\log\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}}\\&=\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}\\&=\frac{1}{n}\{\log 2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)-n\log n\}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log(n+k)-\log n\}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log a_n&=\int_0^1\log(1+x)\,dx\\&=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1 dx\\&=2\log 2-1\\&=\log 4-\log e\\&=\log\frac{4}{e}\end{aligned}$$

従って

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{e}\qquad\text{(答)}$$

添削課題 11 − 3

n を正の整数とする．$k = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ に対して，$\triangle \mathrm{AOB}_k$ を

$$\angle \mathrm{AOB}_k = \frac{k}{2n}\pi, \quad \mathrm{OA} = 1, \quad \mathrm{OB}_k = k$$

であるような三角形とし，その面積を S_k とする．

(1) S_k を k と n を用いて表せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ．

解答・解説

n を正の整数とする．$k = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ に対して，$\triangle \mathrm{AOB}_k$ を

$$\angle \mathrm{AOB}_k = \frac{k}{2n}\pi, \quad \mathrm{OA} = 1, \quad \mathrm{OB}_k = k$$

であるような三角形とし，その面積を S_k とする．

(1) $S_k = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}_k\cdot\sin\angle \mathrm{AOB}_k = \dfrac{k}{2}\sin\dfrac{k}{2n}\pi$ (答)

(2) 区分求積法，部分積分法により

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} S_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2}\sin\frac{k}{2n}\pi \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n}\sin\frac{k}{2n}\pi \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{2}x\,dx \\
&= \left[\frac{x}{2}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}x\,dx \\
&= \frac{2}{\pi^2} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

Lecture 12 積分法(9) 定積分と方程式 - 解答

演習問題 $12-1$

次の問いにそれぞれ答えよ．

(1) $f(x)=\cos x-\sin x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt$ をみたす $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)=e^x+\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$ とするとき，$f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^1 (t+x)f(t)\,dt$ とするとき，$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$，$\displaystyle\int_0^1 tf(t)dt$ の値を求めよ．また，$f(x)$ を求めよ．

解答・解説

(1) $f(x)=\cos x-\sin x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$ において，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$ は定数であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=k\ (\text{定数})\quad\cdots①$$

とおける．このとき

$$f(x)=\cos x-k\sin x$$

であるから，これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}k&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-k\sin t)dt\\&=\Big[\sin t+k\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-k\end{aligned}$$

したがって

$$k=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad f(x)=\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt=a\cdots①$ とおく．このとき

$$f(x)=e^x+a\qquad\cdots②$$

と表される．すなわち，①② から

$$a=\int_0^1 t(e^t+a)\,dt=\int_0^1 (te^t+at)\,dt$$

ここで

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t + C$$

なので

$$\begin{aligned} a &= \left[te^t - e^t + \frac{a}{2}t^2\right]_0^1 \\ &= \left(e - e + \frac{a}{2}\right) - (-1) \\ &= \frac{a}{2} + 1 \end{aligned}$$

ゆえに

$$a = \frac{a}{2} + 1 \qquad \therefore \quad a = 2$$

従って，② より

$$f(x) = e^x + 2 \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \int_0^1 \{tf(t) + xf(t)\}dt \\ &= x^2 + \int_0^1 tf(t)dt + x\int_0^1 f(t)dt \quad \cdots ① \end{aligned}$$

① において，$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$，$\displaystyle\int_0^1 tf(t)dt$ はともに定数であるから

$$\int_0^1 f(t)dt = a \ \text{(定数)} \quad \cdots ②, \qquad \int_0^1 tf(t)dt = b \ \text{(定数)} \quad \cdots ③$$

とおける．このとき ① より

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

であるから，これを ② に代入すると

$$a = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t^2 + at + b)dt = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b$$

$$\therefore \quad \frac{a}{2} - b = \frac{1}{3} \quad \cdots ④$$

同様に，③ に代入すると

$$b = \int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 (t^3 + at^2 + bt)dt = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = -\frac{1}{4} \quad \cdots ⑤$$

④，⑤ を解いて

$$a = -5,\ b = -\frac{17}{6}$$

$$\therefore\quad \int_0^1 f(t)dt = -5,\ \int_0^1 tf(t)dt = -\frac{17}{6} \qquad \text{(答)}$$

従って，$f(x)$ は

$$f(x) = x^2 - 5x - \frac{17}{6} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 12 − 2

1 次の問いにそれぞれ答えよ．

(1) $f(x)=\int_1^x (t-1)e^{2t}\,dt$ のとき，$f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)=\int_{2x}^{3x} \sin t\,dt$ のとき，$f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)=\int_0^x (x-t)\sin^2 t\,dt$ のとき，$f''(x)$ を求めよ．

2 $x>0$ で定義される関数

$$f(x)=\int_x^{2x} (t\log t-t)\,dt$$

について，$f(x)$ の最小値と最小値を与える x を求めよ．

解答・解説

1

(1) $f(x)=\int_1^x g(t)\,dt,\ \dfrac{d}{dx}G(x)=g(x)$ とする．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}[G(t)]_1^x=\frac{d}{dx}\{G(x)-G(1)\}=g(x)=(x-1)e^{2x} \qquad (答)$$

(2) $f(x)=\int_{2x}^{3x} g(t)\,dt,\ \dfrac{d}{dx}G(x)=g(x)$ とする．

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{d}{dx}[G(t)]_{2x}^{3x}\\ &=\frac{d}{dx}\{G(3x)-G(2x)\}\\ &=3g(3x)-2g(2x)\\ &=3\sin 3x-2\sin 2x \qquad (答) \end{aligned}$$

(3)

$$f(x)=\int_0^x (x-t)\sin^2 t dt = x\int_0^x \sin^2 t dt - \int_0^x t\sin^2 t dt$$

として，両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'\int_0^x \sin^2 t dt + x\left(\int_0^x \sin^2 t dt\right)' - \left(\int_0^x t\sin^2 t dt\right)' \\ &= \int_0^x \sin^2 t dt + x\sin^2 x - x\sin^2 x \\ &= \int_0^x \sin^2 t dt \end{aligned}$$

さらに，この両辺を x で微分して

$$f''(x)=\left(\int_0^x \sin^2 t dt\right)' = \sin^2 x \qquad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$

$g(t) = t\log t - t$，$G(t) = \displaystyle\int g(t)\,dt$ とおく．

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\{G(2x) - G(x)\} \\
&= 2g(2x) - g(x) \\
&= 2(2x\log 2x - 2x) - (x\log x - x) \\
&= 4x\log 2x - 4x - x\log x + x \\
&= 4x\log 2x - x\log x - 3x \\
&= x(4\log 2x - \log x - 3) \\
&= x\log\frac{16x^3}{e^3}
\end{aligned}$$

すなわち，$f'(x) = 0$ となるのは

$$\frac{16x^3}{e^3} = 1 \qquad \therefore \quad x = \frac{e}{2\sqrt[3]{2}} \qquad \text{(答)}$$

であり，このとき，$f(x)$ は極小かつ最小である．また

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_x^{2x} (t\log t - t)\,dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2\log t\right]_x^{2x} - \frac{1}{2}\int_x^{2x} t\,dt - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_x^{2x} \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2\log t - \frac{3}{4}t^2\right]_x^{2x} \\
&= \left\{\frac{1}{2}\cdot(2x)^2\log 2x - \frac{3}{4}\cdot(2x)^2\right\} - \left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{3}{4}x^2\right) \\
&= 2x^2\log 2x - \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{9}{4}x^2 \\
&= \frac{x^2}{2}\log\frac{(2x)^4}{x} - \frac{9}{4}x^2 \\
&= \frac{x^2}{2}\log 16x^3 - \frac{9}{4}x^2
\end{aligned}$$

ゆえに，最小値は

$$f\left(\frac{e}{2\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{e^2}{8\sqrt[3]{4}}\log\left(16\cdot\frac{e^3}{16}\right) - \frac{9}{4}\cdot\frac{e^2}{4\sqrt[3]{4}} = -\frac{3e^2}{16\sqrt[3]{4}} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 12 − 3

$f(x)$ を連続関数とする．すべての x に対して

$$f(x) = 1 + \int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt$$

が成り立つような $f(x)$ を求めよ．

解答・解説

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt \\ &= 1 + \int_0^{\pi} f(t)(\sin x\cos t - \cos x\sin t)\,dt \\ &= 1 + \sin x\int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt - \cos x\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt \end{aligned}$$

ここで

$$a = \int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt \quad \cdots ①, \quad b = \int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt \quad \cdots ②$$

とおく．

$$f(x) = 1 + a\sin x - b\cos x \quad \cdots ③$$

と表される．ゆえに，①, ③ より

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{\pi} (1 + a\sin t - b\cos t)\cos t\,dt \\ &= \int_0^{\pi} (\cos t + a\sin t\cos t - b\cos^2 t)\,dt \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

また，②, ③ より

$$\begin{aligned} b &= \int_0^{\pi} (1 + a\sin t - b\cos t)\sin t\,dt \\ &= \int_0^{\pi} (\sin t + a\sin^2 t - b\sin t\cos t)\,dt \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\pi} \cos t\, dt = 0$$
$$\int_0^{\pi} \sin t\, dt = 2$$
$$\int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2t)\, dt = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\pi} \sin t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2t\, dt = 0$$

である．ゆえに，④, ⑤ から

$$a = -\frac{\pi}{2}b, \qquad b = 2 + \frac{\pi}{2}a$$

これを解いて

$$(a,\, b) = \left(-\frac{4\pi}{4+\pi^2},\, \frac{8}{4+\pi^2}\right)$$

ゆえに，求める関数 $f(x)$ は

$$f(x) = 1 - \frac{4\pi}{4+\pi^2}\sin x - \frac{8}{4+\pi^2}\cos x \qquad \text{(答)}$$

演習問題 12 − 4

k を定数とする．

$$f(x) = (2x-k)e^x + e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$$

が成り立つ連続関数 $f(x)$ を求めよ．

解答・解説

$$f(x) = (2x-k)e^x + e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,dt \qquad \cdots ①$$

を x で微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^x + (2x-k)e^x - e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,dt + e^{-x}\cdot f(x)e^x \\ &= (2x-k+2)e^x + f(x) - e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,dt \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

①, ② より

$$f'(x) = (2x-k+2)e^x + (2x-k)e^x = 2(2x-k+1)e^x$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= 2\int (2x-k+1)e^x\,dx \\ &= 2(2x-k+1)e^x - 4\int e^x\,dx \\ &= 2(2x-k+1)e^x - 4e^x + C \\ &= 2(2x-k-1)e^x + C \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

ここで，① で $x=0$ とすると

$$f(0) = -k + 0 = -k \qquad \cdots ④$$

また，③ において $x=0$ とすると

$$f(0) = -2k - 2 + C \qquad \cdots ⑤$$

④, ⑤ より

$$C = k + 2$$

ゆえに，③ より

$$f(x) = 2(2x-k-1)e^x + k + 2 \qquad \text{(答)}$$

添削課題 **12 − 1**

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = e^x - \int_0^1 f(t)\,dt$　　(2) $f(x) = x^2 + \int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$

解答・解説

(1) $a = \int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと

$$f(x) = e^x - a \quad \cdots ①$$

ゆえに

$$a = \int_0^1 (e^t - a)\,dt = \Big[e^t - at\Big]_0^1 = e - 1 - a \qquad \therefore \quad a = \frac{e-1}{2}$$

ゆえに, ① から

$$f(x) = e^x - \frac{e-1}{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a = \int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$ とおくと

$$f(x) = x^2 + a \qquad \cdots ①$$

ゆえに

$$\begin{aligned} a &= \int_0^\pi (t^2 + a)\sin t\,dt \\ &= \int_0^\pi (t^2+a)(-\cos t)'\,dt \\ &= \Big[-(t^2+a)\cos t\Big]_0^\pi + \int_0^\pi 2t\cos t\,dt \\ &= (\pi^2 + a) - (-a) + 2\left\{\Big[t\sin t\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\,dt\right\} \\ &= \pi^2 + 2a + 2\left\{0 - \Big[-\cos t\Big]_0^\pi\right\} \\ &= \pi^2 + 2a - 4 \end{aligned}$$

ゆえに

$$a = 4 - \pi^2 \qquad \cdots ②$$

①, ② より

$$f(x) = x^2 + 4 - \pi^2 \qquad \text{(答)}$$

添削課題 12 − 2

次の問いにそれぞれ答えよ．

(1) $f(x) = x^2 + \int_0^x t^2 f'(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義される関数

$$f(x) = \int_0^x (1 + 2\cos t)\sin t\,dt$$

について，最大値と，それを与える x を求めよ．

解答・解説

(1) $f(x) = x^2 + \int_0^x t^2 f'(t)\,dt \qquad \cdots ①$ とする．x で微分して

$$f'(x) = 2x + x^2 f'(x) \qquad \therefore \quad (1 - x^2)f'(x) = 2x$$

すなわち，$x \neq 1$ なる x に対して等式を満たす $f'(x)$ は，$f'(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$．
ゆえに，C を積分定数として

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int \frac{2x}{(1-x)(1+x)}\,dx \\ &= \int \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= -\log|1-x| - \log|1+x| + C \\ &= \log\left|\frac{1}{1-x^2}\right| + C \quad \cdots ② \end{aligned}$$

また，① について，$x = 0$ のとき

$$f(0) = 0$$

ゆえに，$C = 0$．すなわち，② より

$$f(x) = \log\left|\frac{1}{1-x^2}\right| \qquad (\text{答})$$

(2)

$$f'(x) = (1 + 2\cos x)\sin x$$

ゆえに，$f(x)$ の増減は次の通り．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
y'	0	$+$	0	$-$	0
y		$\nearrow$		$\searrow$	

また

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\pi\right) &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (1 + 2\cos t)\sin t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin t + 2\cos t \sin t)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin t + \sin 2t)\, dt \\ &= \left[-\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

ゆえに，$f(x)$ は $x = \dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$ をとる．　(答)

添削課題 **12 − 3**

関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \cos x + \int_0^{2\pi} f(y)\sin(x-y)\,dy$$

を満たすものとする．$f(x)$ を求めよ．

解答・解説

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \int_0^{2\pi} f(y)\sin(x-y)\,dy \\ &= \cos x + \int_0^{2\pi} f(y)(\sin x\cos y - \cos x\sin y)\,dy \\ &= \cos x + \sin x\int_0^{2\pi} f(y)\cos y\,dy - \cos x\int_0^{2\pi} f(y)\sin y\,dy \end{aligned}$$

ゆえに

$$a = \int_0^{2\pi} f(y)\cos y\,dy \quad \cdots ①, \quad b = \int_0^{2\pi} f(y)\sin y\,dy \quad \cdots ②$$

とおくと

$$f(x) = \cos x + a\sin x - b\cos x = a\sin x + (1-b)\cos x \quad \cdots ③$$

①, ③ より

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{2\pi} \{a\sin y + (1-b)\cos y\}\cos y\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{a\sin y\cos y + (1-b)\cos^2 y\right\}\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{\frac{a}{2}\sin 2y + \frac{1-b}{2}(1+\cos 2y)\right\}\,dy \\ &= \left[-\frac{a}{4}\cos 2y + \frac{1-b}{2}\left(y + \frac{1}{2}\sin 2y\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= (1-b)\pi \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

また，②, ③ より

$$
\begin{aligned}
b &= \int_0^{2\pi} \{a\sin y + (1-b)\cos y\}\sin y\,dy \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{a\sin^2 y + (1-b)\cos y\sin y\right\}\,dy \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{\frac{a}{2}(1-\cos 2y) + \frac{1-b}{2}\sin 2y\right\}\,dy \\
&= \left[\frac{a}{2}\left(y - \frac{1}{2}\sin 2y\right) - \frac{1-b}{4}\cos 2y\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi a \quad \cdots⑤
\end{aligned}
$$

ゆえに，④, ⑤ より

$$
(a,\,b) = \left(\frac{\pi}{1+\pi^2},\,\frac{\pi^2}{1+\pi^2}\right)
$$

ゆえに，③ より

$$
f(x) = \frac{1}{1+\pi^2}(\pi\sin x + \cos x) \qquad \text{(答)}
$$

Lecture 13　積分法 (10)　定積分と評価 - 解答

演習問題 $13-1$

次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を求めよ．

(2) n を 2 以上の自然数とする．次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \leqq \frac{\pi}{4}$$

解答・解説

(1)　$x = \sin\theta$ とおくと，$dx = \cos\theta d\theta$ より

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(答)}$$

(2)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$ より，$0 \leqq x^n \leqq x^2$ なので

$$1 - x^2 \leqq 1 - x^n \leqq 1 \qquad \therefore \quad 1 \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ゆえに，$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で定積分して

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \leqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \leqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

(1) の結果と，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \leqq \frac{\pi}{4}$$

が成り立つ．〔証明終〕

演習問題 13 − 2

次の (1), (2) が成り立つことを証明せよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$1 - \dfrac{x}{2} \leqq e^{-\frac{x}{2}} \leqq 1 - \dfrac{x}{3}$

(2) $\dfrac{5}{3} \leqq \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leqq \dfrac{16}{9}$

解答・解説

(1) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{x}{2} - 1$ とおく.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{x}{2}}) \geqq 0$$

ゆえに，$0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x)$ は単調に増加する．従って

$$f(x) \geqq f(0) = 0$$

ゆえに，$e^{-\frac{x}{2}} \geqq 1 - \dfrac{x}{2} \quad \cdots①$ が成り立つ.
また，$g(x) = 1 - \dfrac{x}{3} - e^{-\frac{x}{2}}$ とおく.

$$g'(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{x}{2}} - \frac{2}{3}\right)$$

ゆえに，$g(x)$ の増減は次の通り.

x	0	$\cdots$	$\log\frac{9}{4}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(0)$	$\nearrow$		$\searrow$	$g(1)$

ここで

$$g(0) = 0$$
$$g(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{2\sqrt{e} - 3}{3\sqrt{e}}$$

であり，$1.5^2 = 2.25 < e = 2.71\cdots$ より

$$g(1) > \frac{2 \cdot 1.5 - 3}{3\sqrt{e}} = 0$$

ゆえに，$g(x) \geqq 0$ から $e^{-\frac{x}{2}} \leqq 1 - \dfrac{x}{3} \quad \cdots②$.
①, ② より，$0 \leqq x \leqq 1$ で $1 - \dfrac{x}{2} \leqq e^{-\frac{x}{2}} \leqq 1 - \dfrac{x}{3}$ が成り立つ.　〔証明終〕

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x^2 \leqq 1$ である．(1) の不等式について，x を x^2 と置き換えると

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqq e^{-\frac{x^2}{2}} \leqq 1 - \frac{x^2}{3}$$

辺々，$-1 \leqq x \leqq 1$ で定積分する．等号はこの区間で常には成り立たないので

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx < \int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx < \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) dx$$

ここで

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{5}{3}$$
$$\int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{9}$$

ゆえに

$$\frac{5}{3} \leqq \int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leqq \frac{16}{9}$$ 〔証明終〕

演習問題 13 − 3

次の問いに答えよ．

(1) すべての正の実数 x に対して不等式 $\dfrac{a}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x}$ が成立するような実数 a のうちで最大となるものを求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ．

(3) 円周率 π と $\log 27$ の大小を判定せよ．ただし，$\log$ は自然対数とする．

解答・解説

(1) $x^2+1>0$ より

$$\frac{a}{x^2+1} \leqq \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad a \leqq x+\frac{1}{x} \quad \cdots ①$$

ゆえに，① が成り立つ a の最大値を調べる．相加平均，相乗平均の不等式より

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

であり，等号は $x=1$ のときに成り立つ．

従って，求める値は　$a=2$　　(答)

(2) $x=\tan t$ と置換すると，$dx=\dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt$ より

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 t}\,\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi}{12} \qquad \text{(答)}$$

(3) (1) より $\dfrac{2}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x}$．両辺，$1 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ で定積分する．等号は常には成り立たないことより

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{x^2+1}\,dx < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x}\,dx \quad \cdots ②$$

ここで，(2) より

$$(②\text{の左辺}) = 2\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

また

$$(②\text{の右辺}) = \Big[\log x\Big]_1^{\sqrt{3}} = \log\sqrt{3} = \frac{1}{2}\log 3$$

ゆえに，② より

$$\frac{\pi}{6} < \frac{1}{2}\log 3 \quad \Leftrightarrow \quad \pi < 3\log 3 = \log 27 \qquad \text{(答)}$$

演習問題 13 − 4

次の問いに答えよ．log は自然対数とする．

(1) 不等式 $\sin^2 x \geqq \sin^3 x \geqq \sin^4 x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を示せ．

(2) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\}$ を微分せよ．

(3) 不等式 $1 \leqq \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^3 x}\, dx \leqq \dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{2} + \log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$ を示せ．

解答・解説

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $0 \leqq \sin x \leqq 1$ なので

$$\sin^2 x \geqq \sin^3 x \geqq \sin^4 x$$

が成り立つ．　〔証明終〕

(2)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\} \\
=&\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2} + x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\
=&\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}\right) \\
=&\sqrt{1+x^2} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3) (1) より

$$\begin{aligned}
1-\sin^2 x \leqq 1-\sin^3 x &\leqq 1-\sin^4 x \\
\cos^2 x \leqq 1-\sin^3 x &\leqq \cos^2 x(1+\sin^2 x)
\end{aligned}$$

ゆえに，区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定積分をすると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^3 x}\, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\, dx$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

であり，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$ について，$t=\sin x$ とおくと，(2) の結果とあわせて

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\\
=&\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt\\
=&\left[\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}\right]_0^1\\
=&\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right\}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$1 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^3 x}\,dx \leqq \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$$

は成り立つ．〔証明終〕

演習問題 13 − 5

k は自然数とする．定積分 $I_k = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < I_k < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ が成り立つことを示せ．

(2) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{\sqrt{100}}$ の整数部分を求めよ．

解答・解説

(1) $x > 0$ において $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ とする．$f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} < 0$ より，$f(x)$ は $x > 0$ で単調に減少する．従って

$$f(k+1) \leqq f(x) \leqq f(k) \qquad \therefore \quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x}} \leqq \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \cdots ①$$

① の等号は常には成り立たない．ゆえに，区間 $k \leqq x \leqq k+1$ で定積分すると

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\,dx$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} < I_k < \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \cdots ② \qquad \text{〔証明終〕}$$

(2) $T = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{100}}$ とする．

② について，$k = 1, 2, 3, \cdots, 99$ まで，辺々の和をとると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}} < \int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}}$$

$$T - 1 < \int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < T - \frac{1}{10} \qquad \cdots ③$$

ここで

$$\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100} = 18$$

である．ゆえに，③ より

$$T - 1 < 18 < T - \frac{1}{10} \qquad \therefore \quad 18 + \frac{1}{10} < T < 19$$

すなわち，T の整数部分は 18　　(答)

演習問題 13 − 6

次の不等式を証明せよ．

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n \qquad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

解答・解説

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ とおくと，$f(x)$ は $x > 0$ において減少関数であるから

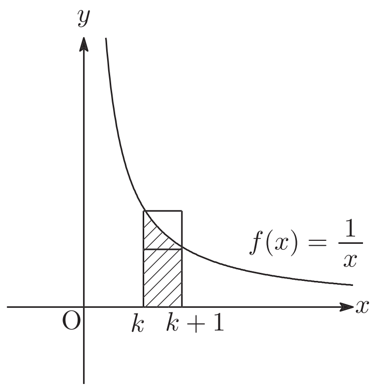
$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{k} \quad (k < x < k+1)$$

が成立する．よって

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx$$

であるから

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx < \frac{1}{k} \quad \cdots ①$$



さて，① の左側の不等式において，$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ として辺々加えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} &< \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_2^3 \frac{1}{x}dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x}dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{x}dx = \Big[\log x\Big]_1^n = \log n \end{aligned}$$

$$\therefore\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n \quad \cdots ②$$

同様に，① の右側の不等式において，$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として辺々加えると

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\therefore\quad \log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \cdots ③$$

したがって，②，③ より，与えられた不等式が証明された． 〔証明終〕

M2JD
高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号		氏　名	