M1T

本科2期12月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高1難関大数学

問題

【1】C は積分定数とする.

(1) $\displaystyle \int (-2)dx = \boldsymbol{-2x + C}$ (答)

(2) $\displaystyle \int (2x-3)dx = 2\int xdx - 3\int dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C = \boldsymbol{x^2 - 3x + C}$ (答)

(3) $\displaystyle \int 4(x-1)dx = \int (4x-4)dx = 4\int xdx - 4\int dx$

$\displaystyle = 4\cdot\frac{x^2}{2} - 4x + C = \boldsymbol{2x^2 - 4x + C}$ (答)

(4) $\displaystyle \int (6x^2+3)dx = 6\int x^2dx + 3\int dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} + 3x + C = \boldsymbol{2x^3 + 3x + C}$ (答)

(5) $\displaystyle \int (-1-x+2x^2)dx = -\int dx - \int xdx + 2\int x^2dx$

$\displaystyle = -x - \frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^3}{3} + C$

$\displaystyle = \boldsymbol{-x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + C}$ (答)

(6) $\displaystyle \int (3t^2-t)dt = 3\int t^2dt - \int tdt = 3\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + C = \boldsymbol{t^3 - \frac{t^2}{2} + C}$ (答)

【2】C は積分定数とする.

(1) $$\int x(x-3)dx = \int (x^2-3x)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C} \quad \text{(答)}$$

(2) $$\int (x-2)(x+1)dx = \int (x^2-x-2)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C} \quad \text{(答)}$$

(3) $$\int (t-2)(t+2)dt = \int (t^2-4)dt$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}t^3 - 4t + C} \quad \text{(答)}$$

(4) $$\int (3+2x)(3x+2)dx = \int (6x^2+13x+6)dx$$
$$= \boldsymbol{2x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 6x + C} \quad \text{(答)}$$

(5) $$\int (x-1)^2dx = \int (x^2-2x+1)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C} \quad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(x-1)^3\}' = 3\cdot1\cdot(x-1)^2 = 3(x-1)^2$ より, $(x-1)^2 = \frac{1}{3}\cdot\{(x-1)^3\}'$

$$\therefore \int (x-1)^2dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}(x-1)^3 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \quad \text{(答)}$$

ここで, $C_1 = C + \frac{1}{3}$ である.

(6) $$\int (3x-2)^2dx = \int (9x^2-12x+4)dx$$
$$= \boldsymbol{3x^3 - 6x^2 + 4x + C} \quad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(3x-2)^3\}' = 3\cdot3\cdot(3x-2)^2 = 9(3x-2)^2$ より, $(3x-2)^2 = \frac{1}{9}\cdot\{(3x-2)^3\}'$

$$\therefore \int (3x-2)^2dx = \boldsymbol{\frac{1}{9}(3x-2)^3 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)} \quad \text{(答)}$$

ここで, $C_1 = C + \frac{8}{9}$ である.

(7) $$\int (x-1)^3dx = \int (x^3-3x^2+3x-1)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C} \quad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(x-1)^4\}' = 4\cdot 1\cdot (x-1)^3 = 4(x-1)^3$ より，$(x-1)^3 = \dfrac{1}{4}\cdot\{(x-1)^4\}'$

$$\therefore\ \int (x-1)^3 dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}(x-1)^4 + C_1}\quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)}\qquad \text{(答)}$$

ここで，$C_1 = C - \dfrac{1}{4}$ である．

(8)
$$\int (2y+1)^3 dy = \int (8y^3+12y^2+6y+1)dy$$
$$= \boldsymbol{2y^4+4y^3+3y^2+y+C}\qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$\{(2y+1)^4\}' = 4\cdot 2\cdot (2y+1)^3 = 8(2y+1)^3$ より，$(2y+1)^3 = \dfrac{1}{8}\cdot\{(2y+1)^4\}'$

$$\therefore\ \int (2y+1)^3 dy = \boldsymbol{\frac{1}{8}(2y+1)^4 + C_1}\quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)}\qquad \text{(答)}$$

ここで，$C_1 = C - \dfrac{1}{8}$ である．

(9)
$$\int (x-1)^2(x+2)dx = \int (x^3-3x+2)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C}\qquad \text{(答)}$$

【3】(1)
$$\int_0^2 (-3)dx = \Big[-3x\Big]_0^2 = -3(2-0) = \boldsymbol{-6}\qquad \text{(答)}$$

(2)
$$\int_2^{-1} 2x dx = \Big[x^2\Big]_2^{-1} = 1-4 = \boldsymbol{-3}\qquad \text{(答)}$$

(3)
$$\int_{-1}^1 3x^2 dx = \Big[x^3\Big]_{-1}^1 = 1-(-1) = \boldsymbol{2}\qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$f(x) = 3x^2$ とおくと，$f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x)$ より $f(x)$ が偶関数なので

$$\int_{-1}^1 3x^2 dx = 2\int_0^1 3x^2 dx = 2\Big[x^3\Big]_0^1 = 2(1-0) = \boldsymbol{2}\qquad \text{(答)}$$

(4)
$$\int_{-1}^{-1} x^5 dx = \boldsymbol{0}\qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $$\int_1^2 (2x+1)dx = \left[x^2+x\right]_1^2 = (4+2)-(1+1) = \mathbf{4} \qquad \text{(答)}$$

(2) $$\int_0^2 2(x-1)dx = 2\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2 = 2\left\{\left(\frac{4}{2}-2\right)-(0-0)\right\} = \mathbf{0} \qquad \text{(答)}$$

(3) $$\int_0^1 (6x^2-3)dx = \left[2x^3-3x\right]_0^1 = (2-3)-(0-0) = \mathbf{-1} \qquad \text{(答)}$$

(4) $$\int_{-1}^1 (x^2-3x)dx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{2}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(5) $$\int_2^{-2} (3+x-x^2)dx = \int_{-2}^2 (x^2-x-3)dx = 2\int_0^2 (x^2-3)dx$$
$$= 2\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_0^2 = 2\left(\frac{8}{3}-6\right) = \mathbf{-\frac{20}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(6) $$\int_0^{-1} (9x^2+4x-1)dx = \left[3x^3+2x^2-x\right]_0^{-1}$$
$$= (-3+2+1)-(0+0-0) = \mathbf{0} \qquad \text{(答)}$$

(7) $$\int_{-2}^1 (3x^2-2x-1)dx = \left[x^3-x^2-x\right]_{-2}^1$$
$$= (1-1-1)-(-8-4+2) = \mathbf{9} \qquad \text{(答)}$$

(8) $$\int_{-1}^2 (x^2-2x-2)dx = \left[\frac{x^3}{3}-x^2-2x\right]_{-1}^2$$
$$= \frac{1}{3}\{8-(-1)\}-(4-1)-2\{2-(-1)\} = \mathbf{-6} \qquad \text{(答)}$$

(9) $$\int_3^2 (x^2-4x-3)dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x^2-3x\right]_3^2$$
$$= \frac{1}{3}(8-27)-2(4-9)-3(2-3) = \mathbf{\frac{20}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1)

$$\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3-x)dx=\mathbf{0}\qquad(答)$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}(x^2-1)dx+\int_{0}^{1}(x^2-1)dx&=\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx\\&=2\int_{0}^{1}(x^2-1)dx\\&=2\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1\\&=2\left(\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\qquad(答)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{1}(4x^3+3x^2-2x-2)dx-\int_{1}^{2}(2+2x-3x^2-4x^3)dx\\&=\int_{-2}^{1}(4x^3+3x^2-2x-2)dx+\int_{1}^{2}(4x^3+3x^2-2x-2)dx\\&=\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2-2x-2)dx\\&=2\int_{0}^{2}(3x^2-2)dx\\&=2\left[x^3-2x\right]_0^2=2\cdot\left(2^3-2\cdot2\right)=\mathbf{8}\qquad(答)\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&\int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx+\int_{a}^{c}(x-x^2-x^3)dx\\&=\int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx-\int_{a}^{c}(x^3+x^2-x)dx\\&=\int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx+\int_{c}^{a}(x^3+x^2-x)dx\\&=\int_{-a}^{a}(x^3+x^2-x)dx\\&=2\int_{0}^{a}x^2dx\\&=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{a^3}\qquad(答)\end{aligned}$$

【6】(1) $1 \leqq x \leqq 3$ において，$|x-3| = -(x-3)$ より

$$\int_1^3 |x-3|dx = \int_1^3 \{-(x-3)\}dx$$
$$= -\left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^3$$
$$= -\left\{\left(\frac{9}{2} - 9\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right)\right\} = \mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$|2x-4| = \begin{cases} -(2x-4) & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 2x-4 & (2 \leqq x \leqq 3) \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\int_0^3 |2x-4|dx = \int_0^2 \{-(2x-4)\}dx + \int_2^3 (2x-4)dx$$
$$= -\left[x^2 - 4x\right]_0^2 + \left[x^2 - 4x\right]_2^3$$
$$= -\{(4-8) - (0-0)\} + \{(9-12) - (4-8)\} = \mathbf{5} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$|x^2-1| = \begin{cases} -(x^2-1) & (0 \leqq x \leqq 1) \\ x^2-1 & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\int_0^2 |x^2-1|dx = \int_0^1 \{-(x^2-1)\}dx + \int_1^2 (x^2-1)dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2$$
$$= -\left\{\left(\frac{1}{3} - 1\right) - (0-0)\right\} + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$
$$= \mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

(4)

$$|x^2-2x-3| = \begin{cases} -(x^2-2x-3) & (0 \leqq x \leqq 3) \\ x^2-2x-3 & (3 \leqq x \leqq 4) \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\int_0^4 |x^2-2x-3|dx = \int_0^3 \{-(x^2-2x-3)\}dx + \int_3^4 (x^2-2x-3)dx$$

ここで

$$g(x) = -(x^2-2x-3)$$
$$G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \quad (g(x) \text{ の不定積分の 1 つ})$$

とおくと，上式の右辺は

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 g(x)dx + \int_3^4 \{-g(x)\}dx &= \int_0^3 g(x)dx + \int_4^3 g(x)dx \\
&= \Big[G(x)\Big]_0^3 + \Big[G(x)\Big]_4^3 \\
&= 2G(3) - G(0) - G(4) \\
&= 2(-9+9+9) - (0-0-0) \\
&\qquad\qquad - \left(-\frac{64}{3} + 16 + 12\right) \\
&= \mathbf{\frac{34}{3}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

コメント

本問のように被積分関数を $g(x)$ などとおくことで，計算の見通しが非常に良くなる．この方法は被積分関数が複雑になればなるほど有効である．

(5)

$$
\left|2x^2-3x-2\right| = \begin{cases} -(2x^2-3x-2) & \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2\right) \\ 2x^2-3x-2 & \left(-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{2},\ 2 \leqq x \leqq 3\right) \end{cases}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{3} \left|2x^2-3x-2\right| dx \\
&= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2x^2-3x-2)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{2} \{-(2x^2-3x-2)\}dx \\
&\qquad\qquad + \int_2^3 (2x^2-3x-2)dx
\end{aligned}
$$

ここで

$$g(x) = 2x^2-3x-2,$$

$$G(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x \quad (g(x) \text{ の不定積分の 1 つ})$$

とおくと，上式の右辺は

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{2} \{-g(x)\}dx + \int_{2}^{3} g(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{2}^{-\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{2}^{3} g(x)dx$$

$$= \Big[G(x)\Big]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \Big[G(x)\Big]_{2}^{-\frac{1}{2}} + \Big[G(x)\Big]_{2}^{3}$$

$$= 2G\left(-\frac{1}{2}\right) + G(3) - G(-1) - 2G(2)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{12} - \frac{3}{8} + 1\right) + \left(18 - \frac{27}{2} - 6\right)$$

$$- \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) - 2\left(\frac{16}{3} - 6 - 4\right)$$

$$= \mathbf{\frac{109}{12}} \qquad \text{(答)}$$

【7】 $I(a)=\int_0^1 \left|x^2-a^2\right|dx$ とおく.

$$\left|x^2-a^2\right|=\begin{cases}-(x^2-a^2) & (0<x<a)\\ x^2-a^2 & (a\leqq x)\end{cases}$$

であるから，a の値の範囲で場合に分ける.

(i) $0<a<1$ のとき

$$I(a)=\int_0^a\{-(x^2-a^2)\}dx+\int_a^1\left(x^2-a^2\right)dx \quad \cdots(*)$$

ここで

$$g(x)=-\left(x^2-a^2\right)$$
$$G(x)=-\frac{1}{3}x^3+a^2x \quad (g(x)\text{ の不定積分の 1 つ})$$

とおくと

$$\begin{aligned}(*)&=\int_0^a g(x)dx+\int_a^1\{-g(x)\}dx\\&=\int_0^a g(x)dx+\int_1^a g(x)dx\\&=\Big[G(x)\Big]_0^a+\Big[G(x)\Big]_1^a\\&=2G(a)-G(0)-G(1)\\&=2\left(-\frac{1}{3}a^3+a^3\right)-\left(-\frac{1}{3}+a^2\right)\\&=\frac{4}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(ii) $1\leqq a$ のとき

$$\begin{aligned}I(a)&=\int_0^1\{-(x^2-a^2)\}dx=\int_0^1 g(x)dx\\&=\Big[G(x)\Big]_0^1=G(1)-G(0)=a^2-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

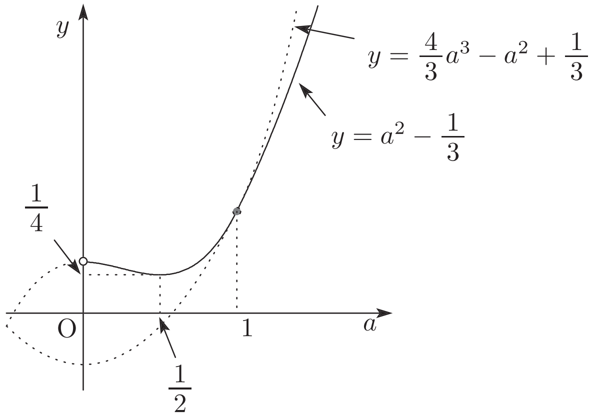
以上より

$$I(a)=\begin{cases}\frac{4}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3} & (0<a<1)\\ a^2-\frac{1}{3} & (1\leqq a)\end{cases}$$

ここで

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}\right)'&=4a^2-2a\\&=2a\,(2a-1)\end{aligned}$$

であるから，$I(a)$ のグラフは下図のようになる．



ゆえに求める $I(a)$ の最小値は，

$$I\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【8】

■ 確認

与式における被積分関数を，$x-\alpha$ について展開する．

また，不定積分の公式

$$\int (x+a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を用いる．

≪証明≫

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx \\
&= \int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)(x-\alpha)\right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^2 \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)(\beta-\alpha)^3 \\
&= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \text{［証明終］}
\end{aligned}$$

添削課題

【1】C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{2}xdx = \boldsymbol{\frac{1}{4}x^2 + C}$ (答)

(2) $\displaystyle\int (x-6)dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 - 6x + C}$ (答)

(3) $\displaystyle\int (x^2+x)dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C}$ (答)

(4) $\displaystyle\int (t^2+2t)dt = \boldsymbol{\frac{1}{3}t^3 + t^2 + C}$ (答)

(5) $$\begin{aligned}\int (2x-5)^2dx &= \int (4x^2-20x+25)dx \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}x^3 - 10x^2 + 25x + C}\end{aligned}$$ (答)

<別解>

$$\{(2x-5)^3\}' = 3\cdot 2\cdot(2x-5)^2 = 6(2x-5)^2$$
$$\therefore\ (2x-5)^2 = \frac{1}{6}\{(2x-5)^3\}'$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int (2x-5)^2dx &= \frac{1}{6}\int \{(2x-5)^3\}'dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(2x-5)^3 + C_1}\end{aligned}$$ **(C_1 は積分定数)** (答)

ここで，$C_1 = C + \dfrac{125}{6}$ である．

(6) $$\begin{aligned}\int x(x-3)(x+3)dx &= \int (x^3-9x)dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + C}\end{aligned}$$ (答)

【2】(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3-1^3}{3} = \mathbf{\frac{7}{3}}$ (答)

(2) $\displaystyle\int_1^0 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^0 = (0-0)-\left(\frac{1}{2}-1\right) = \mathbf{\frac{1}{2}}$ (答)

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2-3x+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^2$

$\displaystyle= \left(\frac{8}{3}-6+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-1\right) = \mathbf{\frac{3}{2}}$ (答)

(4) $\displaystyle\int_1^2 y(y+3)dy = \int_1^2 (y^2+3y)dy$

$\displaystyle= \left[\frac{y^3}{3}+\frac{3}{2}y^2\right]_1^2$

$\displaystyle= \left(\frac{8}{3}+6\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right) = \mathbf{\frac{41}{6}}$ (答)

(5) $\displaystyle\int_0^3 (x+3)^2dx = \int_0^3 (x^2+6x+9)dx$

$\displaystyle= \left[\frac{x^3}{3}+3x^2+9x\right]_0^3$

$= (9+27+27)-(0+0+0) = \mathbf{63}$ (答)

＜別解＞

$\{(x+3)^3\}' = 3\cdot 1\cdot (x+3)^2 = 3(x+3)^2$

$\displaystyle\therefore\ (x+3)^2 = \frac{1}{3}\{(x+3)^3\}'$

$\displaystyle\therefore\ \int_0^3 (x+3)^2dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \{(x+3)^3\}'dx$

$\displaystyle= \left[\frac{1}{3}(x+3)^3\right]_0^3$

$\displaystyle= \frac{6^3-3^3}{3} = \mathbf{63}$ (答)

(6) $\displaystyle\int_{-2}^3 (x+1)(x-2)dx = \int_{-2}^3 (x^2-x-2)dx$

$\displaystyle= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^3$

$\displaystyle= \left(9-\frac{9}{2}-6\right)-\left(-\frac{8}{3}-2+4\right) = \mathbf{-\frac{5}{6}}$ (答)

【3】(1) $|x+1| = \begin{cases} -(x+1) & (-2 \leqq x \leqq -1) \\ x+1 & (-1 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$ より

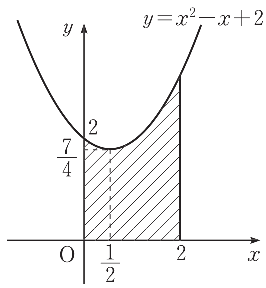
$$\int_{-2}^{1} |x+1| dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} \{-(x+1)\} dx + \int_{-1}^{1} (x+1) dx$$
$$= -\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1}$$
$$= -\left\{\left(\frac{1}{2} - 1\right) - (2-2)\right\} + \left\{\left(\frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right\}$$
$$= \mathbf{\frac{5}{2}} \quad \text{(答)}$$

(2) $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & (-3 \leqq x \leqq -1,\ 1 \leqq x \leqq 3) \\ -(x^2-1) & (-1 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$ より

$$\int_{-3}^{3} |x^2-1| dx$$
$$= \int_{-3}^{-1} (x^2-1) dx + \int_{-1}^{1} -(x^2-1) dx + \int_{1}^{3} (x^2-1) dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-3}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3}$$
$$= \left\{\left(-\frac{1}{3} + 1\right) - (-9+3)\right\} - \left\{\left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right\} + \left\{(9-3) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right\}$$
$$= \left(-\frac{1}{3} + 7\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) + \left(7 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \mathbf{\frac{44}{3}} \quad \text{(答)}$$

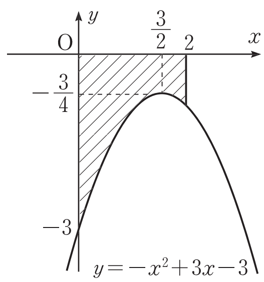
問題

【1】(1) 右図より



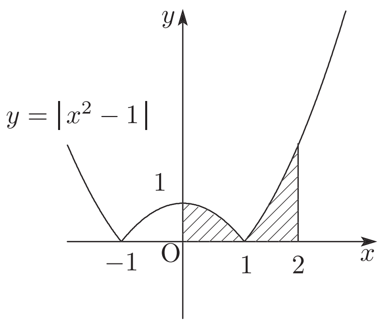
$$\int_0^2 (x^2 - x + 2)dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2$$
$$= \left(\frac{8}{3} - 2 + 4 \right)$$
$$= \mathbf{\frac{14}{3}}$$ (答)

(2) 右図より



$$\int_0^2 \{0 - (-x^2 + 3x - 3)\} dx$$
$$= - \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 3x \right]_0^2$$
$$= - \left(-\frac{8}{3} + 6 - 6 \right)$$
$$= \mathbf{\frac{8}{3}}$$ (答)

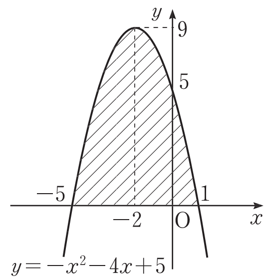
(3) 右図より



$$\int_0^1 (-x^2 + 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2$$
$$= \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right)$$
$$= \mathbf{2}$$ (答)

【2】(1) 右図より

$$\int_{-5}^{1}(-x^2-4x+5)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_{-5}^{1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}-2+5\right)-\left(\frac{125}{3}-50-25\right)$$
$$=\mathbf{36}\qquad (答)$$

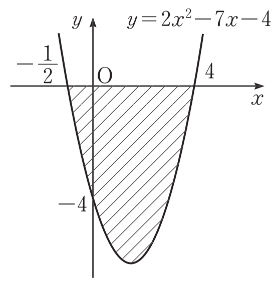


＜別解＞

$$\int_{-5}^{1}(-x^2-4x+5)dx=-\int_{-5}^{1}(x+5)(x-1)dx$$
$$=\frac{\{1-(-5)\}^3}{6}$$
$$=\mathbf{36}\qquad (答)$$

(2) 右図より

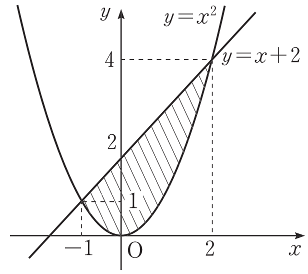
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\{0-(2x^2-7x-4)\}dx$$
$$=-\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-4x\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}$$
$$=-\left(\frac{128}{3}-56-16\right)+\left(-\frac{1}{12}-\frac{7}{8}+2\right)$$
$$=\mathbf{\frac{243}{8}}\qquad (答)$$



＜別解＞

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\{0-(2x^2-7x-4)\}dx=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)dx$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left\{4-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3$$
$$=\mathbf{\frac{243}{8}}\qquad (答)$$

【3】(1) 右図より

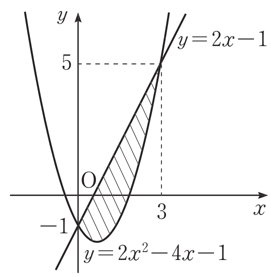


$$\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$
$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$ (答)

＜別解＞

$$\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$
$$=\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}$$
$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$ (答)

(2) 右図より

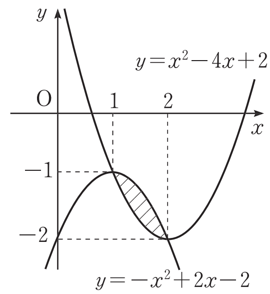


$$\int_{0}^{3}\{(2x-1)-(2x^2-4x-1)\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=(-18+27)$$
$$=\mathbf{9}$$ (答)

＜別解＞

$$\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)dx=-2\int_{0}^{3}x(x-3)dx$$
$$=2\cdot\frac{(3-0)^3}{6}$$
$$=\mathbf{9}$$ (答)

(3) 右図より



$$\int_1^2 \{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$
$$=\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$ (答)

＜別解＞

$$\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx=-2\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$$
$$=2\cdot\frac{(2-1)^3}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$ (答)

コメント

多くの面積計算においては，公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

をうまく使うことにより，計算が大幅に簡単になる．

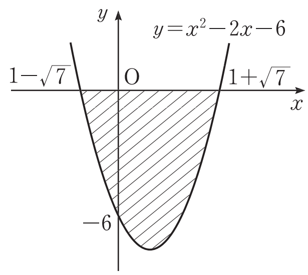
【4】(1) 2 次方程式

$$x^2-2x-6=0$$

を解くと

$$x=1\pm\sqrt{7}$$

ゆえに右図より



$$\int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}}\{0-(x^2-2x-6)\}dx$$

$$=-\int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}}\left\{x-(1-\sqrt{7})\right\}\left\{x-(1+\sqrt{7})\right\}dx$$

$$=\frac{\left\{(1+\sqrt{7})-(1-\sqrt{7})\right\}^3}{6}$$

$$=\boldsymbol{\frac{28\sqrt{7}}{3}}$$ (答)

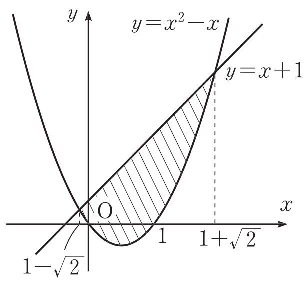
(2) 2 次方程式

$$x^2-x=x+1$$

を解くと

$$x=1\pm\sqrt{2}$$

ゆえに右図より



$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\{(x+1)-(x^2-x)\}dx$$

$$=-\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\left\{x-(1-\sqrt{2})\right\}\left\{x-(1+\sqrt{2})\right\}dx$$

$$=\frac{\left\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\right\}^3}{6}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$$ (答)

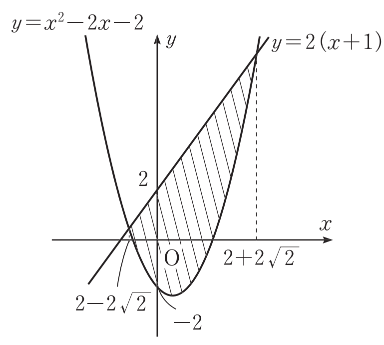
(3) 2 次方程式

$$x^2-2x-2=2(x+1)$$

を解くと

$$x=2\pm2\sqrt{2}$$

ゆえに右図より



$$\int_{2-2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{2}} \{2(x+1)-(x^2-2x-2)\}dx$$
$$=-\int_{2-2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{2}} \{x-(2-2\sqrt{2})\}\{x-(2+2\sqrt{2})\}$$
$$=\frac{\{(2+2\sqrt{2})-(2-2\sqrt{2})\}^3}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{64\sqrt{2}}{3}} \quad \text{(答)}$$

(4) 2 次方程式

$$x^2-2x-3=0$$

を解いて

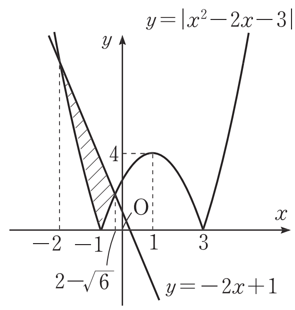
$$x=-1,\ 3$$

また

$$x^2-2x-3=-2x+1$$

を解いて

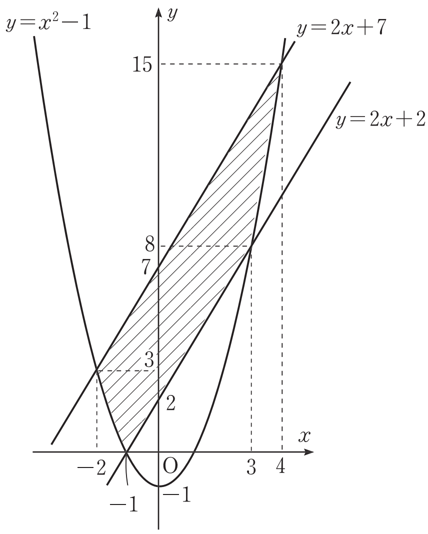
$$x=\pm 2$$



問題の曲線と直線は $x<0$ において，上図のように交わるから

$$\int_{-2}^{-1} \{(-2x+1)-(x^2-2x-3)\}dx$$
$$+\int_{-1}^{2-\sqrt{6}} \{(-2x+1)-(-x^2+2x+3)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+4)dx+\int_{-1}^{2-\sqrt{6}}(x^2-4x-2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-2x\right]_{-1}^{2-\sqrt{6}}$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{3}-4\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right\}$$
$$+\left[\left\{\frac{(2-\sqrt{6})^3}{3}-2(2-\sqrt{6})^2-2(2-\sqrt{6})\right\}-\left(-\frac{1}{3}-2+2\right)\right]$$
$$=\boldsymbol{\frac{12\sqrt{6}-22}{3}} \quad \text{(答)}$$

【5】(1) 右図より



$$\int_{-2}^{-1}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx$$

$$+\int_{-1}^{3}\{(2x+7)-(2x+2)\}dx$$

$$+\int_{3}^{4}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+2x+8)dx$$

$$+\int_{-1}^{3}5dx+\int_{3}^{4}(-x^2+2x+8)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{-2}^{-1}+\left[5x\right]_{-1}^{3}$$

$$+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{3}^{4}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+1-8\right)-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)+15-(-5)$$

$$+\left(-\frac{64}{3}+16+32\right)-(-9+9+24)$$

$$=\mathbf{\frac{76}{3}}$$ (答)

＜別解＞

公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いると,

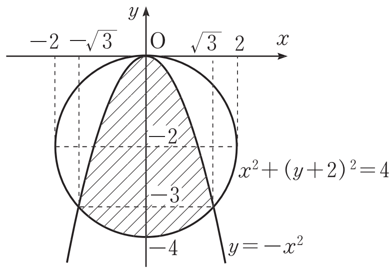
$$\int_{-2}^{4}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx-\int_{-1}^{3}\{(2x+2)-(x^2-1)\}dx$$

$$=-\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)dx+\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$$

$$=\frac{\{4-(-2)\}^3}{6}-\frac{\{3-(-1)\}^3}{6}$$

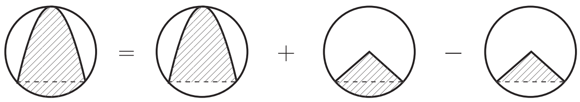
$$=\mathbf{\frac{76}{3}}$$ (答)

(2) $y=-x^2$ と $x^2+(y+2)^2=4$ の交点の x 座標は

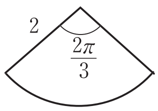


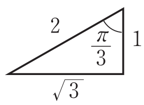
$$x^2+(-x^2+2)^2=4$$
$$x^2+x^4-4x^2+4=4$$
$$x^4-3x^2=0$$
$$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$$

ゆえに



であり,





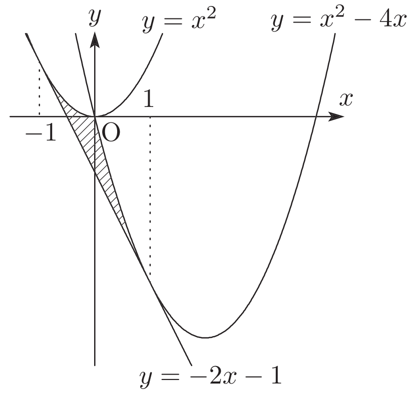
より，求める面積は

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left\{(-x^2)-(-3)\right\}dx+\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1\right)$$
$$=-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)dx+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right\}^3+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$
$$=\boldsymbol{3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}\qquad\text{(答)}$$

【6】

C : $y=x^2$
C' : $y=x^2-4x$

とする.



$y=x^2$ 上の点 $(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線の方程式は

$$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$$
$$\therefore\ y=2\alpha x-\alpha^2$$

また, $y=x^2-4x$ 上の点 $\left(\beta,\ \beta^2-4\beta\right)$ における
接線の方程式は

$$y=(2\beta-4)(x-\beta)+\beta^2-4\beta$$
$$\therefore\ y=(2\beta-4)x-\beta^2$$

これらが一致するから

$$\begin{cases} 2\alpha=2\beta-4 & \cdots① \\ \alpha^2=\beta^2 & \cdots② \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=1 \end{cases}$$

ゆえに l の方程式は

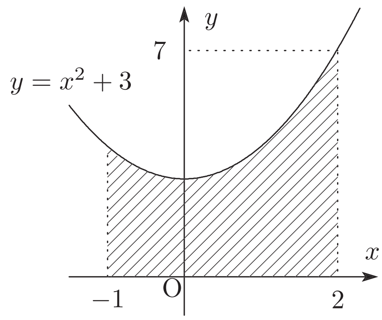
$\boldsymbol{y=-2x-1}$ 　(答)

また, l と C, C' の接点の x 座標はそれぞれ $x=-1$, $x=1$ であるから, 求める面積は右上図より

$$\int_{-1}^{0}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{0}^{1}\{(x^2-4x)-(-2x-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3$$
$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) 右図より

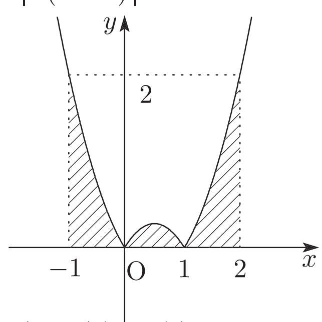


$$\int_{-1}^{2}(x^2+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{2}$$

$=\left(\frac{8}{3}+6\right)-\left(-\frac{1}{3}-3\right)$

$=\mathbf{12}$　　(答)

(2) 右図より



$$\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx$$

$$+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx$$

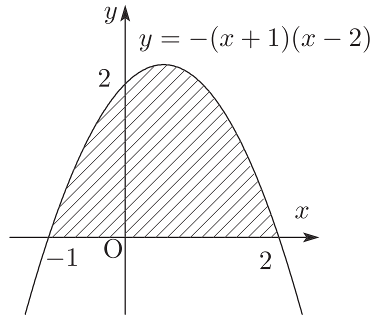
$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$

$+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$

$=0-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-0+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$

$=\mathbf{\frac{11}{6}}$　　(答)

【2】(1) 右図より

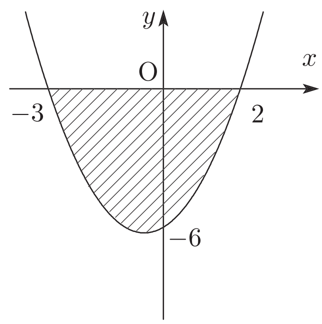


$$\int_{-1}^{2} -(x+1)(x-2)dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$ (答)

＜別解＞

$$\int_{-1}^{2} -(x+1)(x-2)dx=\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$ (答)

(2) 右図より

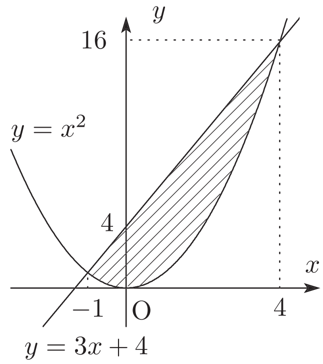


$$-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-3}^{2}$$
$$=-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)+\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{125}{6}}$$ (答)

＜別解＞

$$-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx=-\int_{-3}^{2}(x-2)(x+3)dx$$
$$=\frac{\{2-(-3)\}^3}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{125}{6}}$$ (答)

【3】(1) 右図より

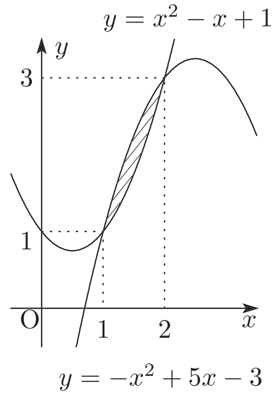


$$\int_{-1}^{4}\{(3x+4)-x^2\}dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}$$
$$=\left(-\frac{64}{3}+24+16\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)$$
$$=\mathbf{\frac{125}{6}}\qquad (答)$$

＜別解＞

$$\int_{-1}^{4}\{(3x+4)-x^2\}dx=-\int_{-1}^{4}(x+1)(x-4)dx$$
$$=\frac{\{4-(-1)\}^3}{6}$$
$$=\mathbf{\frac{125}{6}}\qquad (答)$$

(2) 右図より



$$\int_{1}^{2}\{(-x^2+5x-3)-(x^2-x+1)\}dx$$
$$=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_{1}^{2}$$
$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)$$
$$=\mathbf{\frac{1}{3}}\qquad (答)$$

＜別解＞

$$\int_{1}^{2}\{(-x^2+5x-3)-(x^2-x+1)\}dx$$
$$=-2\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)dx=2\cdot\frac{(2-1)^3}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}\qquad (答)$$

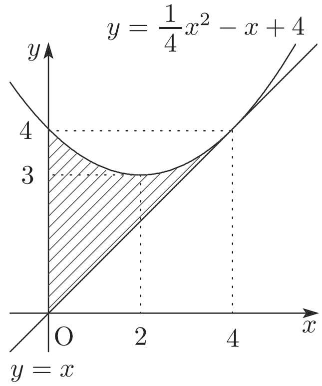
【4】(1) $y' = \dfrac{1}{2}x - 1$ より，(4, 4) における接線の傾きは

$$\frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 1$$

よって，求める接線の方程式は

$$y - 4 = 1 \cdot (x - 4) \qquad \therefore\ \boldsymbol{y = x} \qquad \text{(答)}$$

(2) 右図より



$$\int_0^4 \left\{\left(\frac{1}{4}x^2 - x + 4\right) - x\right\} dx$$
$$= \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4\right) dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_0^4$$
$$= \left(\frac{16}{3} - 16 + 16\right) - 0$$
$$= \boldsymbol{\frac{16}{3}} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) $f'(x) = -2x + 3$ より

$$f(x) = \int f'(x)dx$$
$$= -x^2 + 3x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

ここで $f(0) = 2$ であるから,

$$f(0) = C = 2$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 3x + 2} \qquad (\text{答})$$

(2) $f'(x) = 3(x + 2)(x - 4) = 3x^2 - 6x - 24$ より

$$f(x) = \int f'(x)dx$$
$$= x^3 - 3x^2 - 24x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

ここで $f(-1) = 0$ であるから

$$f(-1) = -1 - 3 + 24 + C = 0$$
$$\therefore\ C = -20$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 20} \qquad (\text{答})$$

【2】$g(x) = px + q \quad (p,\ q$ は実数の定数) とおくと，条件 (i) より

$$\int_0^1 f(x)(px + q)dx = 0$$
$$\therefore\ p\int_0^1 xf(x)dx + q\int_0^1 f(x)dx = 0$$

これが任意の $p,\ q$ に対して成り立つので

$$\int_0^1 xf(x)dx = 0 \quad \cdots ①$$
$$\int_0^1 f(x)dx = 0 \quad \cdots ②$$

ここで，$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a,\ b,\ c$ は実数の定数, $a \fallingdotseq 0)$ とおくと，

①, ② より

$$\int_0^1 (ax^3+bx^2+cx)dx = \left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0$$

$$\int_0^1 (ax^2+bx+c)dx = \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^1 = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0$$

また，条件 (ii) から

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}a+2c=-1$$

ゆえに

$$\begin{cases} \dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{2}=0 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c=0 \\ \dfrac{2}{3}a+2c=-1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

よって求める関数 $f(x)$ は

$$\boldsymbol{f(x)=-x^2+x-\frac{1}{6}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 与式の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(x^2-2x-3) \qquad \therefore\ f(x)=\boldsymbol{2x-2} \qquad \text{(答)}$$

また与式で $x=a$ として

$$\int_a^a f(t)dt = a^2-2a-3=0$$

$$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a=-1,\ 3} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = \frac{d}{dx}(x^3+2x^2+a)$$

$$\therefore\ xf(x)=3x^2+4x$$

これが x の恒等式であるから，両辺を x で割って

$$\boldsymbol{f(x)=3x+4} \qquad \text{(答)}$$

また与式で $x=0$ として

$$\int_0^0 tf(t)dt = \boldsymbol{a=0} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1)

$$a=\int_0^2 f(t)dt \quad (a\text{ は実数の定数}) \quad \cdots(*)$$

とおくと，与式は $f(x)=x+a$ であるから，$(*)$ に代入して

$$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (t+a)dt=\left[\frac{t^2}{2}+at\right]_0^2$$

$$a=2a+2$$

$$\therefore\ a=-2$$

よって求める関数は

$\boldsymbol{f(x)=x-2}$ （答）

(2) 与えられた式は

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_2^4\{3x-f(t)\}dt\\&=3x\int_2^4 dt-\int_2^4 f(t)dt\\&=3x\cdot\Big[t\Big]_2^4-\int_2^4 f(t)dt\\&=6x-\int_2^4 f(t)dt\end{aligned}$$

であるから

$$a=\int_2^4 f(t)dt \quad (a\text{ は実数の定数}) \quad \cdots(*)$$

とおくと，$f(x)=6x-a$ となる．$(*)$ に代入して

$$a=\int_2^4 (6t-a)dt=\Big[3t^2-at\Big]_2^4=(48-4a)-(12-2a)$$

$$a=-2a+36$$

$$\therefore\ a=12$$

よって求める関数は

$\boldsymbol{f(x)=6x-12}$ （答）

(3) 与えられた関数は

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2+\int_1^2 xf(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt\\&=x^2+x\int_1^2 f(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt\end{aligned}$$

となるから，

$$a=\int_1^2 f(t)dt,\quad b=\int_0^2 f(t)dt \quad (a,\ b\text{ は実数の定数}) \quad \cdots(*)$$

とおくと $f(x)=x^2+ax-2b$ であるから，(*) より

$$\begin{aligned} a &= \int_1^2 (t^2+at-2b)dt = \left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-2bt\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3}(8-1)+\frac{a}{2}(4-1)-2b(2-1) \end{aligned}$$

$$a = \frac{3}{2}a-2b+\frac{7}{3}$$

$$\therefore 3a-12b=-14 \quad \cdots ①$$

また，

$$b = \int_0^2 (t^2+at-2b)dt = \left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-2bt\right]_0^2 = \frac{8}{3}+2a-4b$$

$$\therefore 6a-15b=-8 \quad \cdots ②$$

①，② を連立して解くと，$a=\dfrac{38}{9}$， $b=\dfrac{20}{9}$

よって求める関数は

$$\boldsymbol{f(x)=x^2+\frac{38}{9}x-\frac{40}{9}} \qquad (答)$$

【5】 与えられた条件は

$$\begin{cases} f(1)=-2 & \cdots ① \\ f'(0)=-1 & \cdots ② \\ \displaystyle\int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{6} & \cdots ③ \end{cases}$$

である．$f'(x)=2ax+b$ であるから，② より $b=-1$ とわかる．

よって，

$$f(x)=ax^2-x+c$$

① より

$$f(1)=a-1+c=-2 \qquad \therefore\ c=-a-1 \qquad \cdots ①'$$

③ に代入して

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax^2-x-a-1)dx &= \left[\frac{a}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-ax-x\right]_0^1 \\ &= \frac{a}{3}-\frac{1}{2}-a-1=-\frac{1}{6} \\ \therefore\quad & a=-2 \end{aligned}$$

①′ より，$c=1$

$$\therefore\ \boldsymbol{a=-2,\ \ b=-1,\ \ c=1} \qquad (答)$$

【6】(1) $f(x)=ax^2+bx+c$　(a, b, c は実数の定数で, $a \fallingdotseq 0$) とおくと,
$\int_{-1}^{1} f(x)dx=4$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-1}^{1}=4 \qquad \therefore\ \frac{2}{3}a+2c=4 \quad \cdots ①$$

また, $\int_{0}^{2} f(x)dx=6$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{0}^{2}=6 \qquad \therefore\ \frac{8}{3}a+2b+2c=6 \quad \cdots ②$$

さらに, $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=-\frac{4}{3}$ より

$$\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_{-1}^{1}=-\frac{4}{3} \qquad \therefore\ \frac{2}{3}b=-\frac{4}{3} \quad \cdots ③$$

①, ②, ③ を連立させて解くと, $a=3$, $b=-2$, $c=1$
よって

$$\boldsymbol{f(x)=3x^2-2x+1} \qquad (答)$$

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$　(a, b, c は実数の定数で, $a \fallingdotseq 0$) とおくと
$\int_{0}^{2} f(x)dx=-\frac{2}{3}$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{0}^{2}=-\frac{2}{3} \qquad \therefore\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-\frac{2}{3} \quad \cdots ①$$

また, $\int_{0}^{2} xf(x)dx=\frac{2}{3}$ より

$$\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_{0}^{2}=\frac{2}{3} \qquad \therefore\ 4a+\frac{8}{3}b+2c=\frac{2}{3} \quad \cdots ②$$

さらに, $\int_{0}^{2} x^2f(x)dx=\frac{8}{5}$ より

$$\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{b}{4}x^4+\frac{c}{3}x^3\right]_{0}^{2}=\frac{8}{5} \qquad \therefore\ \frac{32}{5}a+4b+\frac{8}{3}c=\frac{8}{5} \quad \cdots ③$$

①, ②, ③ を連立して解くと, $a=-1$, $b=4$, $c=-3$
よって

$$\boldsymbol{f(x)=-x^2+4x-3} \qquad (答)$$

【7】$Q(x)=px^2+qx+r$　(p, q, r は実数の定数) とおくと，条件 (i) より

$$\int_{-2}^{2}P(x)(px^2+qx+r)dx=p\int_{-2}^{2}x^2P(x)dx+q\int_{-2}^{2}xP(x)dx+r\int_{-2}^{2}P(x)dx=0$$

これが任意の実数 p, q, r について成り立つので

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-2}^{2}x^2P(x)dx=0\\ \displaystyle\int_{-2}^{2}xP(x)dx=0\\ \displaystyle\int_{-2}^{2}P(x)dx=0\end{cases}$$

ここで，

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　(a, b, c, d は実数の定数で，$a\neq 0$)

とすると

$$\int_{-2}^{2}x^2P(x)dx=\int_{-2}^{2}x^2(ax^3+bx^2+cx+d)dx=2\cdot\left[\frac{b}{5}x^5+\frac{d}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=2\cdot\left(\frac{32}{5}b+\frac{8}{3}d\right)=0\quad\cdots①$$
$$\int_{-2}^{2}xP(x)dx=\int_{-2}^{2}x(ax^3+bx^2+cx+d)dx=2\cdot\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{c}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=2\cdot\left(\frac{32}{5}a+\frac{8}{3}c\right)=0\quad\cdots②$$
$$\int_{-2}^{2}P(x)dx=\int_{-2}^{2}(ax^3+bx^2+cx+d)dx=2\cdot\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^2$$
$$=2\cdot\left(\frac{8}{3}b+2d\right)=0\quad\cdots③$$

また，条件 (ii) より

$P(1)=a+b+c+d=7$　$\cdots④$

①，②，③，④ を連立して解くと

$a=-5$, $b=0$, $c=12$, $d=0$

ゆえに求める整式 $P(x)$ は

$\boldsymbol{P(x)=-5x^3+12x}$　　(答)

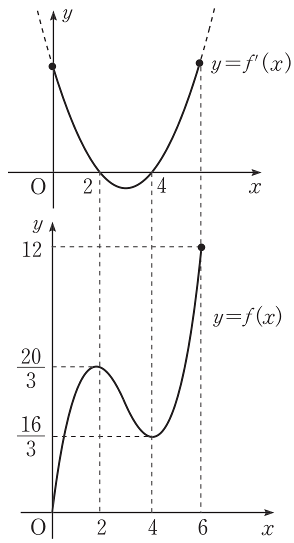
【8】 $f(x) = \int_0^x (t-2)(t-4)dt$ とおくと

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x (t-2)(t-4)dt = (x-2)(x-4)$$

ゆえに $f(x)$ は $x = 2$ で極大，$x = 4$ で極小となる．ここで

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left(t^2 - 6t + 8\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t\right]_0^x \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \end{aligned}$$

であるから，$y = f'(x)$，$y = f(x)$ のグラフは右図．
また $f(x)$ の増減表は下のようになる．



x	0	……	2	……	4	……	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{20}{3}$	↘	$\frac{16}{3}$	↗	12

よって，求める最大値と最小値は，

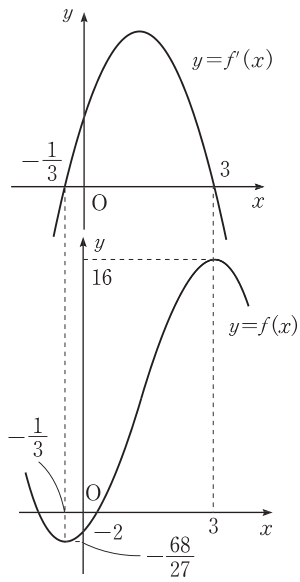
$$\begin{cases} \textbf{最大値 12} \quad (\boldsymbol{x = 6} \text{ のとき}) \\ \textbf{最小値 0} \quad (\boldsymbol{x = 0} \text{ のとき}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【9】(1)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(-3t^2+8t+3)dt$$
$$= -3x^2+8x+3$$
$$= -(3x+1)(x-3)$$

また

$$f(x) = \int_{-1}^{x}(-3t^2+8t+3)dt$$
$$= \Big[-t^3+4t^2+3t\Big]_{-1}^{x}$$
$$= (-x^3+4x^2+3x)-(1+4-3)$$
$$= -x^3+4x^2+3x-2$$



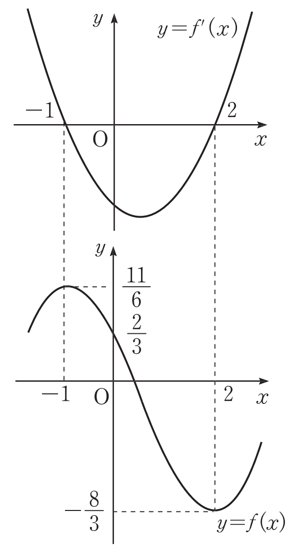
ゆえに $y=f'(x)$，$y=f(x)$ のグラフは右図.
また，増減表は下のようになる.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{68}{27}$	↗	16	↘

ゆえに求める極値は

$$\begin{cases} \textbf{極大値 } \mathbf{16} & (\boldsymbol{x=3} \textbf{ のとき}) \\ \textbf{極小値 } -\mathbf{\frac{68}{27}} & (\boldsymbol{x=-\frac{1}{3}} \textbf{ のとき}) \end{cases}$$ (答)

(2)



$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-2}^{x}(t^2-t-2)dt$$
$$= x^2-x-2$$
$$= (x+1)(x-2)$$

また

$$f(x) = \int_{-2}^{x}(t^2-t-2)dt$$
$$= \Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-2t\Big]_{-2}^{x}$$
$$= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$$
$$\quad -\left(-\frac{8}{3}-2+4\right)$$
$$= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$$

ゆえに $y=f'(x)$，$y=f(x)$ のグラフは右図．また増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{11}{6}$	$\searrow$	$-\frac{8}{3}$	$\nearrow$

よって，求める極値は

$$\begin{cases} \textbf{極大値}\ \boldsymbol{\frac{11}{6}} & \boldsymbol{(x=-1\ \text{のとき})} \\ \textbf{極小値}\ \boldsymbol{-\frac{8}{3}} & \boldsymbol{(x=2\ \text{のとき})} \end{cases}$$

(答)

添削課題

【1】(1) $f(x)$ は $2x-3$ の不定積分の1つであるから

$$f(x)=x^2-3x+C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

とおくと，$f(0)=6$ より

$$(f(0)=)\,C=6$$

したがって，求める関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\boldsymbol{x^2-3x+6} \qquad (\text{答})$$

(2) $f(x)$ は x^2-3x+1 の不定積分の1つであるから

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

とおくと，$f(2)=-\dfrac{1}{2}$ より

$$(f(2)=)\,\frac{8}{3}-6+2+C=-\frac{1}{2} \qquad \therefore\ C=\frac{5}{6}$$

したがって，求める関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{6}} \qquad (\text{答})$$

【2】 両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^2+4x-5)$$

$$\therefore\ f(x)=\boldsymbol{2x+4} \qquad (\text{答})$$

このとき，与式の左辺は

$$\int_a^x f(t)dt=\int_a^x (2t+4)dt=\Big[t^2+4t\Big]_a^x=x^2+4x-(a^2+4a)$$

であるから，これが与式の右辺と等しくなるためには

$$-(a^2+4a)=-5 \qquad \therefore\ a^2+4a-5=0$$

$$\therefore\ (a+5)(a-1)=0$$

したがって，$a=\boldsymbol{-5,\ 1}$ (答)

【3】(1)

$$\int_0^3 f(t)dt = a \qquad (a \text{ は実数の定数})$$

とおくと

$$f(x) = x^2 + 2x + a$$

であるから

$$a = \int_0^3 f(t)dt = \int_0^3 (t^2 + 2t + a)dt = \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + at\right]_0^3$$

$$= (9 + 9 + 3a) - (0 + 0 + 0) = 3a + 18$$

$$\therefore\ a = -9$$

したがって，求める関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \boldsymbol{x^2 + 2x - 9} \qquad (\text{答})$$

(2)

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{6} + x\int_0^2 f(t)dt$$

より

$$\int_0^2 f(t)dt = a \qquad (a \text{ は実数の定数})$$

とおくと

$$f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{6}$$

であるから

$$a = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \left(t^2 + at + \frac{1}{6}\right)dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{a}{2}t^2 + \frac{1}{6}t\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} + 2a + \frac{1}{3} = 2a + 3$$

$$\therefore\ a = -3$$

したがって，求める関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \boldsymbol{x^2 - 3x + \frac{1}{6}} \qquad (\text{答})$$

【4】(1)

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^2+ax+b)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^2$$
$$= \frac{8}{3}+2a+2b$$
$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (x^2+ax+b)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_1^3$$
$$= \frac{26}{3}+4a+2b$$

であるから，条件より

$$\begin{cases} \dfrac{8}{3}+2a+2b = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{26}{3}+4a+2b = \dfrac{11}{3} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} 2a+2b=-3 \\ 4a+2b=-5 \end{cases}$$

これを解いて，$a = \mathbf{-1}$, $b = \mathbf{-\frac{1}{2}}$　　(答)

(2)

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 (x^2+ax+b)dx = 2\int_0^1 (x^2+b)dx$$
$$= 2\cdot\left[\frac{x^3}{3}+bx\right]_0^1 = 2\cdot\left(\frac{1}{3}+b\right)$$
$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 (x^3+ax^2+bx)dx = 2\int_0^1 ax^2dx$$
$$= 2\cdot\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}a$$

であるから，条件より

$$\begin{cases} 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}+b\right) = 2 \\ \dfrac{2}{3}a = 2 \end{cases}$$

これを解いて，$a = \mathbf{3}$, $b = \mathbf{\frac{2}{3}}$　　(答)

M1T

高１難関大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	