M1TK

本科 2 期 12 月度

解答

Z会東大進学教室

高 1 難関大数学 K

２４章　式と証明（１）－等式の証明－

問題

【1】(1) 与式の両辺に $x=0,\ 1,\ -2$ を代入.

$$\begin{cases} x=0 \text{ とすると，} & 1=4a+2b+c \\ x=1 \text{ とすると，} & 6=9a+3b+c \\ x=-2 \text{ とすると，} & 3=c \end{cases}$$

したがって，$a=2$，$b=-5$，$c=3$.

逆に，$a=2,\ b=-5,\ c=3$ のとき

$$(\text{右辺})=2(x+2)^2-5(x+2)+3=2x^2+3x+1$$

となり，与式は確かに x の恒等式になる.

ゆえに求める値は

$$\boldsymbol{a=2,\ b=-5,\ c=3} \qquad (\text{答})$$

(2) 右辺を $x-2$ について展開する.

$$\begin{aligned} x^3 &= \{(x-2)+2\}^3 \\ &= (x-2)^3+6(x-2)^2+12(x-2)+8 \end{aligned}$$

両辺の係数を比較して

$$\boldsymbol{a=1,\ b=6,\ c=12,\ d=8} \qquad (\text{答})$$

(3) 与式の両辺に $x=0,\ 1,\ -1$ を代入する.

$$\begin{cases} x=0 \text{ とすると} & 2=-c & \therefore\ c=-2 \\ x=1 \text{ とすると} & 4=2a & \therefore\ a=2 \\ x=-1 \text{ とすると} & 2=2b & \therefore\ b=1 \end{cases}$$

ゆえに $(a,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ -2)$. 逆にこのとき，

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= 2x(x+1)+x(x-1)-2(x+1)(x-1) \\ &= x^2+x+2 \end{aligned}$$

となり，与式は確かに x の恒等式となる. ゆえに求める値は

$$\boldsymbol{a=2,\ b=1,\ c=-2} \qquad (\text{答})$$

(4) 与式で $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$ を代入して

$$\begin{cases} x=0 \text{ とすると} \quad 0=d \\ x=1 \text{ とすると} \quad 1=c+d \qquad \therefore \quad c=1 \\ x=2 \text{ とすると} \quad 8=2b+2c+d \qquad \therefore \quad b=3 \\ x=3 \text{ とすると} \quad 27=6a+6b+3c+d \qquad \therefore \quad a=1 \end{cases}$$

逆にこのとき，

$$(\text{右辺})=x(x-1)(x-2)+3x(x-1)+x=x^3$$

となり，与式は確かに x の恒等式となる．ゆえに求める値は

$$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=1,\ d=0} \qquad \text{(答)}$$

(5) 与式の右辺を通分する．

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}\\&=\frac{(a+b)x+(a-b)}{(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

両辺の分母は等しいので，分子の係数を比較して

$$a+b=0, \quad a-b=2$$

よって求める値は

$$\boldsymbol{a=1,\ b=-1} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 与式の両辺を展開する．

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2\\(\text{右辺})&=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-(a^2y^2+2abxy+b^2x^2)\\&=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2\end{aligned}$$

ゆえに (左辺) = (右辺) となる． 〔証明終〕

(2) 与式の左辺を変形する．

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=a^4+2a^2b^2+b^4+a^4-2a^2b^2+b^4\\&=2(a^4+b^4)\\&=(\text{右辺})\end{aligned}$$

〔証明終〕

(3) 与式の右辺を変形する．

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{2}(b^2-2bc+c^2)+\frac{1}{2}(c^2-2ca+a^2)+\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2)\\&=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\\&=(\text{左辺})\end{aligned}$$

〔証明終〕

【3】(1) $b=1-a$ より

$$(\text{左辺})=a^2+(1-a)^2+1=2(a^2-a+1)$$
$$(\text{右辺})=2\{a+(1-a)-a(1-a)\}=2(a^2-a+1)$$

よって，(左辺) = (右辺). 〔証明終〕

＜別解＞

与式の (左辺) − (右辺) より

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺})&=a^2+b^2+1-2(a+b)+2ab\\&=(a+b)^2-2(a+b)+1\\&=0\quad(\because\ \ a+b=1)\end{aligned}$$

よって (左辺) = (右辺). 〔証明終〕

(2) 与式の (左辺) − (右辺) より

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺})&=a^2-b^2-bc+ca\\&=(a+b)(a-b)+c(a-b)\\&=(a-b)(a+b+c)\\&=0\quad(\because\ \ a+b+c=0)\end{aligned}$$

よって，(左辺) = (右辺). 〔証明終〕

(3) $c=-(a+b)$ だから，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\{b-(a+b)\}\{-(a+b)+a\}(a+b)-ab(a+b)\\&=ab(a+b)-ab(a+b)\\&=0\\&=(\text{右辺})\end{aligned}$$

〔証明終〕

＜別解＞

$c+a=-b,\quad a+b=-c,\quad b+c=-a$ より，与式において，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=-abc+abc\\&=0\\&=(\text{右辺})\end{aligned}$$

〔証明終〕

(4) $c = -(a+b)$ より

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right) + b\left(-\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a}\right) - (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\
&= \frac{a}{b} - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a} - 1 - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} - 1 \\
&= -\frac{a+b}{a+b} - 2 \\
&= -3 \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

〔証明終〕

＜別解＞

$c + a = -b,\quad a + b = -c,\quad b + c = -a$ より，与式において

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \\
&= \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} \\
&= \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} \\
&= -3 \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

〔証明終〕

【4】与式を x, y について整理すると

$$(2a+b+5)x+(2a-b-1)y=0$$

これが x, y についての恒等式となるためには

$$\begin{cases} 2a+b+5=0 & \cdots ① \\ 2a-b-1=0 & \cdots ② \end{cases}$$

である．① + ② より

$$4a+4=0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a=-1} \qquad \text{(答)}$$

よって②より

$$\boldsymbol{b=-3} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 与えられた等式より

$$(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0$$

となる．この式の左辺を整理すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-abc \\ &= (b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc \\ &= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\ &= (b+c)(a+b)(a+c)=0\end{aligned}$$

したがって，$a+b$，$b+c$，$c+a$ のうち少なくとも 1 つは 0 である．

〔証明終〕

(2) 与えられた条件より

$$\begin{aligned}(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 &= (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1) \\ &= (a^2+b^2+c^2)-2(a+b+c)+3 \\ &= 3-2\times 3+3 \quad (\because \quad \text{条件より}) \\ &= 0\end{aligned}$$

よって，$a-1=b-1=c-1=0$．すなわち $a=b=c=1$． 〔証明終〕

【6】与式において

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (2ax+2by)-(ax+ay+bx+by)\\
&= ax-ay-bx+by\\
&= a(x-y)-b(x-y)\\
&= (a-b)(x-y)=0
\end{aligned}
$$

よって,

$a=b$ または $x=y$ である. 〔証明終〕

【7】(1) $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=k$ とおくと, $a=kx,\ b=ky,\ c=kz$ であるから

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{pkx+qky+rkz}{px+qy+rz}\\
&= \frac{k(px+qy+rz)}{px+qy+rz}\\
&= k=\frac{a}{x}=(\text{左辺})
\end{aligned}
$$

〔証明終〕

(2) 条件式を変形する.

$$
\begin{aligned}
&\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}\\
&\iff -1+\frac{b+c}{a}=-1+\frac{a+c}{b}=-1+\frac{a+b}{c}\\
&\iff \frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c} \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

であるから, ① $=k$ とおくと

$$
\begin{cases}
b+c=ak & \cdots ②\\
a+c=bk & \cdots ③\\
a+b=ck & \cdots ④
\end{cases}
$$

② + ③ + ④ より

$$
\begin{aligned}
2(a+b+c)=(a+b+c)k \quad &\iff \quad (a+b+c)(2-k)=0\\
&\iff \quad a+b+c=0 \quad \text{または} \quad k=2
\end{aligned}
$$

(i) $a+b+c=0$ のとき.

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$ より

$$
\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}=\frac{(-a)\cdot(-b)\cdot(-c)}{abc}=-1
$$

(ii) $k=2$ のとき.

②, ③, ④ より,

$$
\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}=\frac{(ka)\cdot(kb)\cdot(kc)}{abc}=k^3=2^3=8
$$

以上より, 求める値は,

−1, 8 (答)

【8】 $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}=k$ とおくと

$$a=k(b+c),\quad b=k(c+a),\quad c=k(a+b)$$

これらの式の辺々を加えると

$$a+b+c=2k(a+b+c)$$
$$(a+b+c)(2k-1)=0$$

ゆえに

$$a+b+c=0,\quad k=\frac{1}{2}$$

(i) $a+b+c=0$ のとき.

$$k=\frac{a}{b+c}=\frac{a}{-a}=-1$$

(ii) $a+b+c\neq 0$ のとき.

$$k=\frac{1}{2}$$

以上より

$$\boldsymbol{k=-1,\ \frac{1}{2}}\qquad \text{(答)}$$

【9】まず $f(x)$ の次数を求める．

$f(0)=1$ より，$f(x)$ は恒等的に 0 ではない．$f(x)$ の次数を $\deg\{f(x)\}$ と書くことにする．

$\deg\{f(x)\}=n$ であるとすると，降べきの順に

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\quad(a_n\neq 0)$$

とおける．

$$(\text{与式})\quad\Longleftrightarrow\quad f(x+1)-f(x)=x^2\qquad\cdots(*)$$

左辺は

$$\begin{aligned}f(x+1)-f(x)&=\left\{a_n(x+1)^n+a_{n-1}(x+1)^{n-1}+\cdots\right\}-\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\right)\\&=\left\{a_n\left(x^n+nx^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}+\cdots\right)\right.\\&\qquad+a_{n-1}\left(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots\right)\\&\qquad\left.+\cdots\right\}\\&\qquad-\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\right)\\&=na_nx^{n-1}+(x\text{ の }(n-2)\text{ 次以下の整式})\end{aligned}$$

ここで，$a_n\neq 0$ より，$na_n\neq 0$ であるので，

$$\deg\{f(x+1)-f(x)\}=n-1$$

$(*)$ より

$$n-1=2\qquad\therefore\quad n=3$$

ゆえに $\deg\{f(x)\}=3$ であるから，

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\quad(a\neq 0)$$

とおける．再び $(*)$ より

$$\begin{aligned}f(x+1)-f(x)&=\left\{a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d\right\}-\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)\\&=3ax^2+(3a+2b)x+(a+b+c)\\&=x^2\end{aligned}$$

これが x の恒等式であるから

$$\begin{cases}3a=1 & \cdots①\\3a+2b=0 & \cdots②\\a+b+c=0 & \cdots③\end{cases}$$

連立して

$$a=\frac{1}{3},\quad b=-\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{6}$$

さらに $f(0)=1$ より

$$d=1$$

以上より，求める整式は

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+1}\qquad(\text{答})$$

添削課題

【1】(1) 左辺を x の降べき順にまとめると，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= ax^2 + ax + a + bx + b + c \\
&= ax^2 + (a+b)x + (a+b+c) = x^2 - x + 2
\end{aligned}
$$

これが，x についての恒等式なので，両辺の x^2，x の係数および定数項は等しく，

$$
\begin{cases}
a = 1 & \cdots ① \\
a + b = -1 & \cdots ② \\
a + b + c = 2 & \cdots ③
\end{cases}
$$

① を ② に代入して $b = -2$ $\cdots ④$

①，④ を ③ に代入して $c = 3$

よって，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = (\mathbf{1},\ \mathbf{-2},\ \mathbf{3})$　**(答)**

(2) 左辺を通分すると，

$$
(\text{左辺}) = \frac{a(x-1) - b(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a-b)x + (-a-b)}{x^2 - 1}
$$

ここで，両辺の分子について，

$$
\begin{cases}
a - b = 1 & \cdots ① \\
-a - b = -5 & \cdots ②
\end{cases}
$$

①，② を連立させて，$a = 3$，$b = 2$

よって，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\mathbf{3},\ \mathbf{2})$　**(答)**

(3) 与えられた等式に $x = 2$，3，4 を代入しても等式は成立するので，

$x = 2$ を代入して，$2b = 2$　$\therefore b = 1$

$x = 3$ を代入して，$-c = -2$　$\therefore c = 2$

$x = 4$ を代入して，$2a = -4$　$\therefore a = -2$

ここで，$a = -2$，$b = 1$，$c = 2$ を等式の左辺に代入すると，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= -2(x-2)(x-3) + (x-3)(x-4) + 2(x-4)(x-2) \\
&= -2(x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 7x + 12) + 2(x^2 - 6x + 8) \\
&= -2x^2 + 10x - 12 + x^2 - 7x + 12 + 2x^2 - 12x + 16 \\
&= x^2 - 9x + 16 = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

よって，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = (\mathbf{-2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2})$　**(答)**

【2】$a+b+c=0 \iff c=-a-b$ を両辺に代入すると，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= a^2+b^2+(-a-b)^2\\ &= a^2+b^2+(a^2+2ab+b^2)\\ &= 2(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= -2\{ab+b(-a-b)+(-a-b)a\}\\ &= -2(ab-ab-b^2-a^2-ab)\\ &= 2(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

よって，(左辺) = (右辺) となるので，題意は示された.　〔証明終〕

＜別解＞

$$\begin{aligned}&(\text{左辺})-(\text{右辺})\\ &\quad = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\ &\quad = (a+b+c)^2\\ &\quad = 0\end{aligned}$$

よって，(左辺) = (右辺) が示された.　〔証明終〕

【3】仮定より，

$2(ax+by)=(a+b)(x+y)$

ここで,

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (2ax+2by)-(ax+ay+bx+by)\\ &= ax-ay-bx+by\\ &= a(x-y)-b(x-y)\\ &= (a-b)(x-y)=0\end{aligned}$$

よって，$(a-b)(x-y)=0$ より，

$a=b$ または $x=y$ である.　〔証明終〕

問題

【1】(1) $a > b$ より $a - b > 0$．また，$a > 0$，$b > 0$ より，$a + b > 0$ であるから

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) > 0$$

よって，$a^2 > b^2$.　〔証明終〕

(2) $a^2 > b^2$ より，$a^2 - b^2 > 0$．ゆえに $(a+b)(a-b) > 0$.
ここで $a > 0$，$b > 0$ より，$a + b > 0$ であるから

$$a - b > 0 \qquad \therefore \quad a > b$$

〔証明終〕

(3) $a > b$ より，$a - b > 0$.

$$b < \frac{a+b}{2} < a \iff \begin{cases} b < \dfrac{a+b}{2} & \cdots ① \\ \dfrac{a+b}{2} < a & \cdots ② \end{cases}$$

① の (右辺) − (左辺) より

$$\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} > 0$$

ゆえに ① は成立．同様に ② において (右辺) − (左辺) より

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$$

ゆえに ② も成立．以上より，

$$b < \frac{a+b}{2} < a$$

〔証明終〕

【2】(1) $a>2,\ b>2$ より，$a-2>0,\ b-2>0$ であるから

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (ab+4)-2(a+b)\\
&= ab-2a-2b+4\\
&= a(b-2)-2(b-2)\\
&= (a-2)(b-2)>0
\end{aligned}
$$

よって，$ab+4>2(a+b)$. 〔証明終〕

(2) 示すべき式の (右辺) − (左辺) を計算すると

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= 2(ac+bd)-(ac+ad+bc+bd)\\
&= ac+bd-ad-bc\\
&= a(c-d)-b(c-d)\\
&= (a-b)(c-d) \geqq 0 \quad (\because a-b \leqq 0,\ c-d \leqq 0)
\end{aligned}
$$

等号は $a=b,\ c=d$ のとき成立. ゆえに $(a+b)(c+d) \leqq 2(ac+bd)$.

〔証明終〕

(3) $a>0,\ b>0$ より $a+b>0$．また，$a>b$ より $(a-b)^2>0$ であるから

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (a^3+b^3)-ab(a+b)\\
&= (a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)\\
&= (a+b)(a^2-2ab+b^2)\\
&= (a+b)(a-b)^2>0
\end{aligned}
$$

よって，$a^3+b^3>ab(a+b)$. 〔証明終〕

【3】(1) 示すべき式の (左辺) − (右辺) より

$$\begin{aligned}(a+b)^2-4ab &= a^2+2ab+b^2-4ab\\ &= a^2-2ab+b^2\\ &= (a-b)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

等号は $a-b=0$，すなわち $a=b$ のとき成立.
よって，$(a+b)^2 \geqq 4ab$ 〔証明終〕

(2) 示すべき式の (左辺) − (右辺) より

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)-2(a+b-1) &= a^2-2a+1+b^2-2b+1\\ &= (a-1)^2+(b-1)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

等号は $a=b=1$ のとき成立.
よって，$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$ 〔証明終〕

(3) 示すべき式の (左辺) − (右辺) より

$$\begin{aligned}(2a^2+3b^2)-4ab &= 2a^2-4ab+3b^2\\ &= 2(a^2-2ab+b^2)+b^2\\ &= 2(a-b)^2+b^2 \geqq 0\end{aligned}$$

等号は $a-b=0$, $b=0$，すなわち $a=b=0$ のとき成立.
よって，$2a^2+3b^2 \geqq 4ab$. 〔証明終〕

(4) 示すべき式の (左辺) − (右辺) より

$$\begin{aligned}(a^4+b^4)-(a^3b+ab^3) &= a^3(a-b)-b^3(a-b)\\ &= (a-b)(a^3-b^3)\\ &= (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

ここで

$$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$$

よって，$(a-b)^2(a^2+ab+b^2) \geqq 0$．等号は，$a=b$ または $a=b=0$，すなわち $a=b$ のとき成立.
ゆえに $a^4+b^4 \geqq a^3b+ab^3$ 〔証明終〕

(5) 示すべき式の左辺を変形して,

$$
\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \\
&\qquad =\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca\right) \\
&\qquad =\frac{1}{2}\left(a^2+2ab+b^2\right)+\frac{1}{2}\left(b^2+2bc+c^2\right)+\frac{1}{2}\left(c^2+2ca+a^2\right) \\
&\qquad =\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(b+c)^2+\frac{1}{2}(c+a)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号は $a+b=0$, $b+c=0$, $c+a=0$ のとき，すなわち $a=b=c=0$ のとき成立.

〔証明終〕

(6) 示すべき式の (左辺) − (右辺) より

$$
\begin{aligned}
&(a^2-ab+b^2)-(a+b-1) \\
&\qquad =a^2-ab+b^2-a-b+1 \\
&\qquad =\frac{1}{2}(2a^2-2ab+2b^2-2a-2b+2) \\
&\qquad =\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{2}(a^2-2a+1)+\frac{1}{2}(b^2-2b+1) \\
&\qquad =\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}(b-1)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号は $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$ のとき，すなわち $a=b=1$ のとき成立.

以上より, $a^2-ab+b^2 \geqq a+b-1$. 〔証明終〕

＜別解＞

示すべき式の (左辺) − (右辺) より

$$
\begin{aligned}
&(a^2-ab+b^2)-(a+b-1) \\
&\qquad =a^2-(b+1)a+b^2-b+1 \\
&\qquad =\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2-\left(\frac{b+1}{2}\right)^2+b^2-b+1 \\
&\qquad =\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3b^2-6b+3}{4} \\
&\qquad =\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号成立は, $a-\dfrac{b+1}{2}=0$, $b-1=0$ のとき，すなわち $a=b=1$ のとき成立.

以上より, $a^2-ab+b^2 \geqq a+b-1$. 〔証明終〕

【4】(1) 示すべき式の (左辺) − (右辺) より

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \frac{a^3 + b^3}{ab} - (a + b) \\
&= \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b)}{ab} \\
&= \frac{(a + b)(a^2 - 2ab + b^2)}{ab} \\
&= \frac{(a + b)(a - b)^2}{ab} \geqq 0 \quad (\because a > 0,\ b > 0)
\end{aligned}
$$

等号は，$a = b$ のとき成立．よって示された． 〔証明終〕

(2) 示すべき式の (左辺) − (右辺) より

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \frac{a + b}{2ab} - \frac{2}{a + b} \\
&= \frac{(a + b)^2 - 4ab}{2ab(a + b)} \\
&= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2ab(a + b)} \\
&= \frac{(a - b)^2}{2ab(a + b)} \geqq 0 \quad (\because a > 0,\ b > 0)
\end{aligned}
$$

等号は，$a = b$ のとき成立．よって示された． 〔証明終〕

【5】三角不等式より，$a+b$ をひとまとまりとみて，

$$
\begin{aligned}
|a+b+c| &= |(a+b)+c| \\
&\leqq |a+b|+|c| \\
&\leqq |a|+|b|+|c|
\end{aligned}
$$

すなわち

$$|a+b+c| \leqq |a|+|b|+|c|$$

〔証明終〕

【6】(1) $a>b>0$ より $\sqrt{ab}>0$ であり，(左辺)^2 − (右辺)^2 を考えて

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{a-b}\right)^2-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 &= (a-b)-\left(a-2\sqrt{ab}+b\right) \\
&= 2\sqrt{ab}-2b \\
&= 2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$a>b>0$ より

$$\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$$

ゆえに $2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)>0$ より

$$\left(\sqrt{a-b}\right)^2>\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

が成り立つ．ここで $\sqrt{a-b}>0$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ であるから

$$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

〔証明終〕

(2) $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ であり，また $\sqrt{ab} \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a+b}\right)^2 &= a+2\sqrt{ab}+b-(a+b)\\ &= 2\sqrt{ab} \geqq 0\end{aligned}$$

したがって，

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{a+b}\right)^2$$

また

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 &= 2(a+b)-\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)\\ &= a-2\sqrt{ab}+b\\ &= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

したがって，

$$\left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$

以上から

$$\left(\sqrt{a+b}\right)^2 \leqq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \leqq \left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2$$

ここで，$\sqrt{a+b} \geqq 0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq 0$ より

$$\sqrt{a+b} \leqq \sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$$

〔証明終〕

等号は，左側が $a=0$ または $b=0$ のとき，右側が $a=b$ のとき成立.

(3)　$a>0$，$b>0$，$c>0$ であり，$\sqrt{ab}>0$，$\sqrt{bc}>0$，$\sqrt{ca}>0$ であるから

$$\left(\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}}{9}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2}{9}\geqq 0$$

したがって，

$$\left(\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}\right)^2\geqq\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$$

ここで，$\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}>0$，$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}>0$ より，

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}\geqq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}$$

はみたされた.

また，等号成立は，

$\sqrt{a}=\sqrt{b}$ かつ $\sqrt{b}=\sqrt{c}$ かつ $\sqrt{c}=\sqrt{a}$

すなわち，$a=b=c$ のときである.　〔証明終〕

【7】(1) 証明すべき式の (左辺) − (右辺) より

$$xy + 1 - (x + y) = x(y - 1) - y + 1 = (x - 1)(y - 1) \quad \cdots (*)$$

ここで条件より

$$|x| < 1, \quad |y| < 1$$

であるから

$$x - 1 < 0, \quad y - 1 < 0$$

ゆえに $(*) > 0$ となり，題意はみたされた. 〔証明終〕

(2) $|y| < 1$，$|z| < 1$ より，

$$|yz| < 1$$

ここで，(1) の結果を用いると，

$$\begin{aligned} xyz + 2 &= x(yz) + 1 + 1 \\ &> x + yz + 1 \\ &> x + y + z \end{aligned}$$

となるので，題意はみたされた. 〔証明終〕

【8】(1) $1 \leqq i \leqq n$ のとき,

$$n \leqq i(n+1-i) \quad \cdots ① \quad \text{かつ} \quad i(n+1-i) \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad \cdots ②$$

が成り立つことを示す. ① の (右辺) − (左辺) より

$$\begin{aligned} i(n+1-i)-n &= (i-1)n - i^2 + i \\ &= (i-1)n - i(i-1) \\ &= (i-1)(n-i) \geqq 0 \ \ (\because 1 \leqq i \leqq n) \end{aligned}$$

また ② の (右辺) − (左辺) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - i(n+1-i) &= \frac{1}{4}\left\{\left(n^2+2n+1\right) - 4i(n+1-i)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{n^2 - 2(2i-1)n + 4i^2 - 4i + 1\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{n^2 - 2(2i-1)n + (2i-1)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}\{n-(2i-1)\}^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

以上より, ① かつ ② が成立. すなわち

$$n \leqq i(n+1-i) \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad \cdots (*)$$

が成立することが示された. 〔証明終〕

(2) $(*)$ で, $i = 1, 2, 3, \cdots n$ に対して

$$\begin{aligned} &i=1 \quad n \leqq 1 \cdot n \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &i=2 \quad n \leqq 2 \cdot (n-1) \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &i=3 \quad n \leqq 3 \cdot (n-2) \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &i=n \quad n \leqq n \cdot 1 \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

これら n 個の不等式の辺々かけて

$$n^n \leqq (n!)^2 \leqq \left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right\}^n = \left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right\}^2$$

$n \geqq 1$ であるから, 各辺の正の平方根をとると,

$$\sqrt{n^n} \leqq n! \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

〔証明終〕

【9】与えられた条件 $a+b+c=1$ より，$(a+b+c)^2=1$.
示すべき式は

$$3(ab+bc+ca)<1<3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

であるから，

$$3(ab+bc+ca)<(a+b+c)^2<3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

を示せばよい.

(i) 左側の不等式において，(右辺) − (左辺) より

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&-3(ab+bc+ca)\\&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\&=\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geqq 0\end{aligned}$$

ところが $a\fallingdotseq b$ より等号は成立しない.

(ii) 右側の不等式において，(右辺) − (左辺) より

$$\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2)&-(a+b+c)^2\\&=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\\&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqq 0\end{aligned}$$

ところが $a\fallingdotseq b$ より等号は成立しない.

以上より，

$$3(ab+bc+ca)<(a+b+c)^2=1<3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

すなわち与式が成り立つことが示された. 〔証明終〕

添削課題

【1】(1)

$$(\text{左辺}) = 2\left(a^2 + \frac{3}{2}ab\right) + 4b^2$$
$$= 2\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}b\right)^2 + 4b^2$$
$$= 2\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{23}{8}b^2 \cdots (*)$$

ここで，a，b は実数だから

$$\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 \geqq 0, \quad b^2 \geqq 0$$

であるので

$$(*) \geqq 0$$

よって，(左辺) ≧ (右辺) であることが示された．
また，等号成立は

$$a + \frac{3}{4}b = 0 \quad \text{かつ} \quad b = 0$$

がみたされる $a = b = 0$ のとき．　　［証明終］

(2)

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = a^2 + b^2 + c^2 + 1 - (a + b + c)$$
$$= a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + 1$$
$$= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$$
$$= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdots (*)$$

ここで，a，b，c は実数なので

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0, \ \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0, \ \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$$

よって

$$(*) \geqq \frac{1}{4} > 0$$

ゆえに，(左辺) > (右辺) であり，題意は示された．　　［証明終］

【2】(1)

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= a^2b - ab^2 \\ &= ab(a-b) \ \cdots (*)\end{aligned}$$

ここで，$a > 0$，$b > 0$，$a - b > 0$ より，$(*) > 0$
よって，(左辺) > (右辺) となり，題意はみたされた. [証明終]

(2)

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= ab - 2a - 3b + 6 \\ &= a(b-2) - 3(b-2) \\ &= (a-3)(b-2) \ \cdots (*)\end{aligned}$$

ここで，

$a < 3$ より，　$a - 3 < 0$
$b < 2$ より，　$b - 2 < 0$

ゆえに，$(*) > 0$
よって，(左辺) > (右辺) となり，題意はみたされた. [証明終]

【3】$a \geqq -1$ であるので，

$$1 + \frac{a}{2} > 0, \quad \sqrt{1+a} \geqq 0$$

よって，両辺をそれぞれ 2 乗して考えると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+a}\right)^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - (1+a) \\ &= \frac{a^2}{4} \geqq 0\end{aligned}$$

よって，$(\text{左辺})^2 \geqq (\text{右辺})^2$，(左辺) > 0，(右辺) $\geqq 0$ であるので，
(左辺) $\geqq$ (右辺) は示された.
また，等号成立は，$\dfrac{a^2}{4} = 0$，すなわち $a = 0$ のとき. [証明終]

【4】

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= 2(ac + bd) - (a + b)(c + d)\\ &= 2(ac + bd) - (ac + ad + bc + bd)\\ &= ac - ad - bc + bd\\ &= a(c - d) - b(c - d)\\ &= (a - b)(c - d) \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

ここで，

$a > b$ より， $a - b > 0$

$c > d$ より， $c - d > 0$

であるので，$(*) > 0$.

よって，(左辺) < (右辺) より題意は示された． ［証明終］

２６章　式と証明（３）ーいろいろな不等式ー

問題

【1】(1) $a>0$, $\dfrac{1}{a}>0$ であるから，相加・相乗平均の関係より

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

等号成立は，$a=\dfrac{1}{a}$，すなわち $a=1$ のとき．　〔証明終〕

(2) $a>0$, $\dfrac{3}{a}>0$ であるから，相加・相乗平均の関係より

$$a+\frac{3}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=2\sqrt{3}$$

等号成立は，$a=\dfrac{3}{a}$，すなわち $a=\sqrt{3}$ のとき．　〔証明終〕

(3) $a>0$，$b>0$，$c>0$ より，$\dfrac{1}{a}>0$，$\dfrac{1}{b}>0$，$\dfrac{1}{c}>0$．相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) &\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}}\\ &=8\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}\\ &=8\end{aligned}$$

等号成立は，$a=\dfrac{1}{b}$, $b=\dfrac{1}{c}$, $c=\dfrac{1}{a}$，すなわち $a=b=c=1$ のとき．

〔証明終〕

【2】$a\geqq 0$ より $a+1>0$．相加・相乗平均の関係より

$$a+1+\frac{1}{a+1}\geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{1}{a+1}}=2$$

したがって，$a+\dfrac{1}{a+1}\geqq 1$．等号成立は $a+1=\dfrac{1}{a+1}$，すなわち $a=0$ のとき．

〔証明終〕

【3】(1) $x > 0$ より $\dfrac{1}{x} > 0$. 相加・相乗平均の関係より

$$x + \frac{16}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 2\sqrt{16} = 8$$

等号は

$$x = \frac{16}{x} \iff x = 4 \quad (\because\ x > 0)$$

のとき成立. ゆえに求める最小値は

8 ($\boldsymbol{x = 4}$ のとき) (答)

(2) $x > 0$ より $x + 2 > 0$. 相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} x + \frac{16}{x+2} &= (x+2) + \frac{16}{x+2} - 2 \\ &\geqq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{16}{x+2}} - 2 \\ &= 2\sqrt{16} - 2 \\ &= 8 - 2 = 6 \end{aligned}$$

等号は

$$x + 2 = \frac{16}{x+2} \iff x = 2\ (\because\ x > 0)$$

のとき成立. ゆえに求める最小値は,

6 ($\boldsymbol{x = 2}$ のとき) (答)

(3) $x > 0$ より $x^2 + 16 > 0$. 与式は

$$\frac{x}{x^2 + 16} = \frac{1}{x + \dfrac{16}{x}}$$

(1) の結果より

$$\frac{1}{x + \dfrac{16}{x}} \leqq \frac{1}{8}$$

等号は $x = 4$ のとき成立するから, 求める最大値は

$\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$ ($\boldsymbol{x = 4}$ のとき) (答)

【4】(1) $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$ とすると

$$\frac{a}{d}=\frac{1}{4},\ \frac{c}{b}=\frac{3}{2},\ \frac{a+c}{b+d}=\frac{2}{3},\ \frac{ac}{bd}=\frac{3}{8}$$

であるから，大小関係は

$$\frac{c}{b}>\frac{a+c}{b+d}>\frac{ac}{bd}>\frac{a}{d}$$

と推定される．ここで

$$\frac{c}{b}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{c(b+d)-b(a+c)}{b(b+d)}=\frac{cd-ab}{b(b+d)}>0$$
$$\frac{a+c}{b+d}-\frac{ac}{bd}=\frac{(a+c)bd-ac(b+d)}{bd(b+d)}=\frac{ab(d-c)+cd(b-a)}{bd(b+d)}>0$$
$$\frac{ac}{bd}-\frac{a}{d}=\frac{ac-ab}{bd}=\frac{a(c-b)}{bd}>0$$

であるから，求める大小関係は

$$\boldsymbol{\frac{c}{b}>\frac{a+c}{b+d}>\frac{ac}{bd}>\frac{a}{d}}\qquad\text{(答)}$$

(2) $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$ とすると

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{2},\ \frac{d}{c}=\frac{4}{3},\ \frac{1+d}{1+c}=\frac{5}{4},\ \frac{a+1}{b+1}=\frac{2}{3}$$

であるから，大小関係は

$$\frac{d}{c}>\frac{1+d}{1+c}>\frac{a+1}{b+1}>\frac{a}{b}$$

と推定される．まず

$$\frac{d}{c}-\frac{1+d}{1+c}=\frac{d(1+c)-c(1+d)}{c(1+c)}=\frac{d-c}{c(1+c)}>0\quad(\because\quad d>c)$$

次に

$$\begin{aligned}\frac{1+d}{1+c}-\frac{a+1}{b+1}&=\frac{(1+d)(b+1)-(a+1)(1+c)}{(1+c)(b+1)}\\&=\frac{bd+b+d-ac-a-c}{(1+c)(b+1)}\\&=\frac{(bd-ac)+(d-c)+(b-a)}{(1+c)(b+1)}\quad\cdots①\end{aligned}$$

であるが，$b>a>0,\ d>c>0$ より $bd>ac$．すなわち $bd-ac>0$．また，$d-c>0,\ b-a>0$ であるから，① >0．さらに

$$\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{(a+1)b-(b+1)a}{b(b+1)}=\frac{b-a}{b(b+1)}>0\quad(\because\quad b>a)$$

以上より，求める大小関係は

$$\boldsymbol{\frac{d}{c}>\frac{1+d}{1+c}>\frac{a+1}{b+1}>\frac{a}{b}}\qquad\text{(答)}$$

【5】(1) a, b, c, d はそれぞれ正であるから

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}, \quad \frac{c+d}{2} \geqq \sqrt{cd}$$

辺々加えて

$$\frac{a+b+c+d}{2} \geqq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

よって

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \quad \cdots①$$

ここで $\sqrt{ab} > 0$, $\sqrt{cd} > 0$ であるから，相加・相乗平均の関係より

$$\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geqq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd} \quad \cdots②$$

①，② より

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

等号成立は $a=b$, $c=d$, $ab=cd$，すなわち $a=b=c=d$ のとき.

〔証明終〕

(2) $a+b+c=3m$ とおくと $m>0$. (1) の結果より

$$\frac{a+b+c+m}{4} \geqq \sqrt[4]{abcm}$$

左辺に，$a+b+c=3m$ を代入して

$$\frac{4m}{4} = m \geqq \sqrt[4]{abcm}$$

よって $m \geqq \sqrt[4]{abcm}$. ここで $m>0$, $\sqrt[4]{abcm} > 0$ より，両辺を 4 乗して

$$m^4 \geqq abcm$$

$m>0$ より

$$m^3 \geqq abc \qquad \therefore \quad m \geqq \sqrt[3]{abc}$$

したがって

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

等号成立は，$a=b=c$ のとき. 〔証明終〕

＜別解＞

x, y, z が正のとき

$$
\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\\
&= \frac{1}{2}(x+y+z)\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって, $x^3+y^3+z^3 \geqq 3xyz$ より

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqq xyz$$

ここで $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$ とおくと

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

等号成立は $x=y=z$ のとき, すなわち $a=b=c$ のとき. 〔証明終〕

【6】示すべき不等式において，相加・相乗平均の関係より

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} \\
&= \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right) + \left(\frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4}\right) \\
&\geqq 2\sqrt{\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2}} + 2\sqrt{\frac{a_3}{b_3} \cdot \frac{a_4}{b_4}} \qquad \cdots ①
\end{aligned}
$$

さらに，相加・相乗平均の関係より

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2}} + 2\sqrt{\frac{a_3}{b_3} \cdot \frac{a_4}{b_4}} &= 2\left(\sqrt{\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2}} + \sqrt{\frac{a_3}{b_3} \cdot \frac{a_4}{b_4}}\right) \\
&\geqq 2 \cdot 2\sqrt{\sqrt{\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2}} \cdot \sqrt{\frac{a_3}{b_3} \cdot \frac{a_4}{b_4}}} \\
&= 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4}} \qquad \cdots ②
\end{aligned}
$$

ここで，b_1～b_4 は a_1～a_4 を並びかえたものであるから

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \qquad \cdots ③$$

したがって，①，②，③ より

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} \geqq 4 \cdot \sqrt[4]{1} = 4 \qquad \cdots ④$$

等号成立は，$a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$ かつ $a_3 = b_3$ かつ $a_4 = b_4$ のとき．よって，示された．

〔証明終〕

【7】(1) 与式において

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-(ax+by)^2 \\
&= a^2y^2+b^2x^2-2axby \\
&= (ay-bx)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号成立は

$$ay=bx \quad \Longleftrightarrow \quad a:b=x:y$$

のとき.　〔証明終〕

(2) 与式において

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-(ax+by+cz)^2 \\
&= a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2 \\
&\qquad -2axby-2bycz-2czax \\
&= \left(a^2y^2-2axby+b^2x^2\right)+\left(b^2z^2-2bycz+c^2y^2\right) \\
&\qquad +\left(c^2x^2-2czax+a^2z^2\right) \\
&= (ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号成立は

$$ay=bx \text{ かつ } bz=cy \text{ かつ } cx=az \quad \Longleftrightarrow \quad a:b:c=x:y:z$$

のとき.　〔証明終〕

【8】(1) 与式を展開すると，$pyqx$，$qzry$，$rxpz$ の項が消えることに注意して

$$
\begin{aligned}
&(px+qy+rz)^2+(py-qx)^2+(qz-ry)^2+(rx-pz)^2\\
&=\left(p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2\right)\\
&\qquad+\left(p^2y^2+q^2x^2\right)+\left(q^2z^2+r^2y^2\right)+\left(r^2x^2+p^2z^2\right)\\
&=p^2\left(x^2+y^2+z^2\right)+q^2\left(x^2+y^2+z^2\right)+r^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\\
&=\boldsymbol{\left(p^2+q^2+r^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}\qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2) (1) の結果と

$$(py-qx)^2 \geqq 0,\quad (qz-ry)^2 \geqq 0,\quad (rx-pz)^2 \geqq 0$$

より

$$
\begin{aligned}
\left(p^2+q^2+r^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)&=(px+qy+rz)^2\\
&\qquad+(py-qx)^2+(qz-ry)^2+(rx-pz)^2\\
&\geqq (px+qy+rz)^2
\end{aligned}
$$

等号成立は

$$py=qx \text{ かつ } qz=ry \text{ かつ } rx=pz \quad\Longleftrightarrow\quad p:q:r=x:y:z$$

のとき．　〔証明終〕

(3) (2) で得られた不等式で

$$p=q=r=1,\quad x=\sqrt{a},\quad y=\sqrt{5b},\quad z=\sqrt{7c}$$

として

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c}\right)^2 &\leqq \left(1^2+1^2+1^2\right)(a+5b+7c)\\
&=3\cdot 12 \quad (\because\ a+5b+7c=12)\\
&=36
\end{aligned}
$$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ より

$$\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c}\leqq 6$$

等号成立は

$$\sqrt{a}:\sqrt{5b}:\sqrt{7c}=1:1:1 \quad\Longleftrightarrow\quad a=5b=7c$$

のとき．ここで $a+5b+7c=12$ より

$$a=5b=7c=4 \quad\Longleftrightarrow\quad a=4,\ b=\frac{4}{5},\ c=\frac{4}{7}$$

以上より，求める最大値は

$$\boldsymbol{6\quad\left(a=4,\ b=\frac{4}{5},\ c=\frac{4}{7}\ \text{のとき}\right)}\qquad\text{(答)}$$

【9】

$$f=\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}$$

とおき

$$1<f<n-1 \quad \cdots(*)$$

が成り立つことを示す.

(i) f の各項の分母をすべて $x_1+x_2+\cdots+x_n$ とすると,

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_1+x_2} &> \frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n},\\
\frac{x_2}{x_2+x_3} &> \frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n},\\
&\vdots\\
\frac{x_n}{x_n+x_1} &> \frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
f &= \frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}\\
&> \frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\cdots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\\
&= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\\
&= 1
\end{aligned}$$

ゆえに

$$f>1$$

(ii) 実数 a, b に対して $\dfrac{a}{a+b}=1-\dfrac{b}{a+b}$ であるから, f の各項を変形して

$$\begin{aligned}
f &= \left(1-\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)+\left(1-\frac{x_3}{x_2+x_3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}\right)+\left(1-\frac{x_1}{x_n+x_1}\right)\\
&= n-\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_3}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_1}{x_n+x_1}\right)
\end{aligned}$$

ここで (i) と同様に,

$$\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_3}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_1}{x_n+x_1}>1$$

が示されるから,

$$f<n-1$$

(i), (ii) より, (*) は成り立つ. 〔証明終〕

添削課題

【1】(1) $a > 0$, $\dfrac{4}{a} > 0$ であるので，(相加平均) ≧ (相乗平均) の関係より，

$$a + \frac{4}{a} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4$$

また，等号成立は，$a = \dfrac{4}{a}$，すなわち $a = 2$ のときである．　〔証明終〕

(2)

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= ab + 1 + 4 + \frac{4}{ab} \\ &= 5 + ab + \frac{4}{ab}\end{aligned}$$

ここで，$ab > 0$, $\dfrac{4}{ab} > 0$ であるので，(相加平均) ≧ (相乗平均) の関係より，

$$5 + ab + \frac{4}{ab} \geqq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 5 + 4 = 9$$

また，等号成立は，$ab = \dfrac{4}{ab}$，すなわち $ab = 2$ のときである．　〔証明終〕

【2】(1)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{x^2}{2x} + \frac{4}{2x} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{2}{x}\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{x}{2} > 0$, $\dfrac{2}{x} > 0$ であるので，(相加平均) ≧ (相乗平均) の関係より，

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} + \frac{2}{x} &\geqq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x}} \\ &= 2\end{aligned}$$

等号成立は，

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{x} \qquad \therefore\ x = 2\ (\because\ x > 0)$$

であるので，求める最小値は **2**　**(答)**

(2) $x + \dfrac{4}{2x+1} = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{2x+1} - \dfrac{1}{2}$

ここで，$x + \dfrac{1}{2} > 0$, $\dfrac{4}{2x+1} > 0$ であるので，(相加平均) ≧ (相乗平均) の関係より，

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{2} + \frac{4}{2x+1} - \frac{1}{2} &\geqq 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{2x+1}} - \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{2}(2x+1) \cdot \frac{4}{2x+1}} - \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

また，等号成立は，

$$x+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x+1}$$

$$\frac{1}{2}(2x+1)^2=4$$

$$2x+1=\pm 2\sqrt{2} \qquad \therefore\ x=\frac{-1+2\sqrt{2}}{2} \quad (\because x>0)$$

であるので，求める最小値は，$\mathbf{2\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$ **(答)**

【3】 $$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$
$$=\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

ここで，$b>0,\ c>0$ より，$\frac{b}{c}>0,\ \frac{c}{b}>0$ だから，

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}=2\ \cdots①$$

同様に，

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geqq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2\ \cdots②$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2\ \cdots③$$

① + ② + ③ より，

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geqq 6$$

よって，$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき，

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 6$$

が成り立つ．

等号成立は，$\frac{b}{c}=\frac{c}{b}$ かつ $\frac{c}{a}=\frac{a}{c}$ かつ $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ のとき，

すなわち $a=b=c$ のときである． 〔証明終〕

【4】(1) (左辺) $\geqq 0$，(右辺) $\geqq 0$ より，辺々 2 乗して考えると，

$$
\begin{aligned}
&(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 \\
&\quad = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(p^2 + q^2 + r^2\right) - (ap + bq + cr)^2 \\
&\quad = a^2p^2 + a^2q^2 + a^2r^2 + b^2p^2 + b^2q^2 + b^2r^2 + c^2p^2 + c^2q^2 + c^2r^2 \\
&\qquad - \left(a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 + 2abpq + 2bcqr + 2acpr\right) \\
&\quad = \left(a^2q^2 + b^2p^2 - 2abpq\right) + \left(b^2r^2 + c^2q^2 - 2bcqr\right) \\
&\qquad + \left(c^2p^2 + a^2r^2 - 2acpr\right) \\
&\quad = (aq - bp)^2 + (br - cq)^2 + (cp - ar)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって，(左辺) $\geqq$ (右辺) となり題意は示された．　〔証明終〕

(2) (1) の各文字に $a = \sqrt{2}$，$b = \sqrt{3}$，$c = \sqrt{6}$，$p = \sqrt{2}x$，$q = \sqrt{3}y$，$r = \sqrt{6}z$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2 + 3 + 6}\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 6z^2} \geqq |2x + 3y + 6z| \\
&\therefore\ \sqrt{11}\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 6z^2} \geqq |2x + 3y + 6z|
\end{aligned}
$$

(左辺) $\geqq 0$，(右辺) $\geqq 0$ より，辺々 2 乗しても不等式は成り立つので，

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{11}\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 6z^2}\right)^2 \geqq |2x + 3y + 6z|^2 \\
&\quad 11(2x^2 + 3y^2 + 6z^2) \geqq (2x + 3y + 6z)^2
\end{aligned}
$$

よって，題意は示された．　〔証明終〕

M1TK

高１難関大数学Ｋ

Z-KAI

会員番号		氏　名	