M2T

本科２期12月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２難関大数学

問題

【1】(1)　(I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2},\quad (\text{右辺})=2-\frac{1+2}{2^1}=\frac{1}{2}$$

となり，与式は成立する．

(II) $n=k$ のとき，与式が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}\qquad\cdots①$$

となるので，①の両辺に $\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$ を加えると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}\\ =&\ 2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{2k+4-k-1}{2^{k+1}}=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}\\ =&\ 2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

(I)，(II) より，すべての自然数 n について与式は成立する．〔証明終〕

(2)　(I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4},\quad (\text{右辺})=\frac{1+2}{2(1+1)}=\frac{3}{4}$$

となり，与式は成立する．

(II) $n=k$ のとき，与式が成り立つと仮定すると

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}=\frac{k+2}{2(k+1)}\qquad\cdots①$$

となるので，①の両辺に $1-\dfrac{1}{(k+2)^2}=\dfrac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$ をかけると

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}\\ =&\ \frac{k+2}{2(k+1)}\times\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}=\frac{k+3}{2(k+2)}\\ =&\ \frac{(k+1)+2}{2\{(k+1)+1\}}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

(I)，(II) より，すべての自然数 n について与式は成立する．〔証明終〕

【2】(1)　(I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1,\quad(\text{右辺})=1$$

となり, 与式は成立する.

(II) $n=k$ のとき，与式が成り立つと仮定すると

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{k}\quad\cdots①$$

となるので，①の両辺に $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ を加えると

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

ここで

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k+1}\quad\cdots②$$

が言えればよいので

$$\begin{aligned}(\text{右辺})-(\text{左辺})\quad&=\quad -\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}\\&=\quad\frac{1}{k(k+1)^2}\ >\ 0\end{aligned}$$

よって，② が成り立つので

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k+1}$$

となり，$n=k+1$ のときも成立する.

(I)，(II) より，すべての自然数 n について，不等式

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}\leqq 2-\frac{1}{n}$$

は成立する.　〔証明終〕

(2)　(I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1,\quad(\text{右辺})=2$$

となり，与式は成立する.

(II) $n=k$ のとき，与式が成り立つと仮定すると

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}\quad\cdots①$$

となるので，①の両辺に $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ を加えると

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

ここで

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}\quad\cdots②$$

が言えればよいので

$$\begin{aligned} & \left(2\sqrt{k+1}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2-(2\sqrt{k})^2 \\ = \ & 4(k+1)-4+\frac{1}{k+1}-4k \\ = \ & \frac{1}{k+1} \ > \ 0 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \left(2\sqrt{k+1}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 \ &> \ (2\sqrt{k})^2 \\ 2\sqrt{k+1}-\frac{1}{\sqrt{k+1}} \ &> \ 2\sqrt{k} \quad \left(\begin{array}{l} k \geqq 1 \text{ のとき} \\ 2\sqrt{k+1}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>0,\ 2\sqrt{k}>0 \text{ より} \end{array}\right) \\ \therefore \ \ 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \ &< \ 2\sqrt{k+1} \end{aligned}$$

よって，②が成り立つので

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$$

となり，$n=k+1$ のときも成立する．

(I)，(II) より，すべての自然数 n について，不等式

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$$

は成立する．〔証明終〕

(3) (I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=4,\ (\text{右辺})=3$$

となり，与式は成立する．

また，$n=2$ のとき

$$(\text{左辺})=8,\ (\text{右辺})=7$$

となり，与式は成立する．

(II) $n=k$ のとき，与式が成り立つと仮定すると

$$2^{k+1}>k^2+k+1 \quad \cdots ①$$

となるので，①の両辺に 2 をかけると

$$2^{k+2}>2k^2+2k+2$$

ここで

$$2k^2+2k+2>(k+1)^2+(k+1)+1 \quad \cdots ②$$

が言えればよいので

$$\begin{aligned} (\text{左辺})-(\text{右辺}) \ &= \ (2k^2+2k+2)-\{(k+1)^2+(k+1)+1\} \\ &= \ k^2-k-1 \\ &= \ \left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \end{aligned}$$

となり，$k \geqq 2$ のとき

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \geqq 1 > 0$$

よって，$k \geqq 2$ のとき, ②が成り立つので

$$2^{k+2} > (k+1)^2+(k+1)+1$$

となり，$n=k+1$ のときも成立する.

(I)，(II) より，すべての自然数 n について，不等式

$$2^{n+1} > n^2+n+1$$

は成立する. 〔証明終〕

【3】条件より

$$
\begin{aligned}
&a_1 = -1 \\
&a_2 = (-1)^2 + 2\cdot 1\cdot(-1) - 2 = -3 \\
&a_3 = (-3)^2 + 2\cdot 2\cdot(-3) - 2 = -5 \\
&a_4 = (-5)^2 + 2\cdot 3\cdot(-5) - 2 = -7 \\
&\qquad\qquad\qquad\vdots \\
&a_n = -(2n-1)
\end{aligned}
$$

と推測される.

(I) $n=1$ のとき, 明らかに成立している.

(II) $n=k$ のとき

$$a_k = -(2k-1)$$

が成り立つと仮定すると, 条件より

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= \{-(2k-1)\}^2 + 2\cdot k\{-(2k-1)\} - 2 \\
&= (2k-1)^2 - 2k(2k-1) - 2 \\
&= -(2k-1) - 2 \\
&= -(2k+1)
\end{aligned}
$$

となり, $n=k+1$ のときも成立する.

(I), (II) より, すべての自然数 n に対して帰納的に推測が正しいことが示された.

$\therefore\ a_n = -(2n-1)$ (答)

【4】すべての自然数 n に対して

「n^3+5n は 6 の倍数である」 $\cdots$ $(*)$

ことを，数学的帰納法を用いて証明する．

(I) $n=1$ のとき

$$n^3+5n=1^3+5\times 1=6$$

となり，$(*)$ は成立する．

(II) $n=k$ $(k \geqq 1)$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

「k^3+5k が 6 の倍数である」

と仮定すると

$$k^3+5k=6l \ (l \text{ は自然数})$$

とおけるので

$$\begin{aligned}(k+1)^3+5(k+1) &= k^3+3k^2+8k+6 \\ &= (k^3+5k)+3k(k+1)+6 \\ &= 6l+3k(k+1)+6\end{aligned}$$

このとき

「$k(k+1)$ は，2 の倍数」

だから

「$3k(k+1)$ は，6 の倍数」

となるので

$$3k(k+1)=6m \ (m \text{ は自然数})$$

とおくと

$$\begin{aligned}(k+1)^3+5(k+1) &= 6l+6m+6 \\ &= 6(l+m+1)\end{aligned}$$

これより

「$(k+1)^3+5(k+1)$ は，6 の倍数」

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

(I)，(II) より

すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成立する． 〔証明終〕

【5】実数 x, y に対して，$x+y$, xy がともに偶数であるとき

「x^n+y^nは偶数である」　$\cdots$ $(*)$

ことを，数学的帰納法により証明する．

(I) $n=1$ のとき

条件より

「$x+y$ は偶数」

だから，$(*)$ は成立する．

$n=2$ のとき

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

となり，$x+y$, xy は，ともに偶数だから

「x^2+y^2 も偶数」

となるので，$(*)$ は成立する．

(II) $n=k$, $k+1$ $(k \geqq 1)$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

「x^k+y^k, $x^{k+1}+y^{k+1}$ が偶数である」　$\cdots$ $(**)$

と仮定すると

$$x^{k+2}+y^{k+2}=(x+y)(x^{k+1}+y^{k+1})-xy(x^k+y^k)$$

となり，$(**)$ と条件より

「$(x+y)(x^{k+1}+y^{k+1})$, $xy(x^k+y^k)$ は，ともに偶数」

だから

「$x^{k+2}+y^{k+2}$ も偶数」

となるので，$n=k+2$ のときも $(*)$ は成立する．

(I)，(II) より

すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成立する．　〔証明終〕

【6】(1) 条件より

$$a_{n+1}=\frac{3}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\quad\cdots①$$

において，$n=1$ とすると

$$a_2=\frac{3}{1}\cdot a_1=3\times 1=3\qquad(答)$$

同様に，$n=2,\ 3,\ 4$ として

$$\begin{cases} a_3=\dfrac{3}{2}(a_1+a_2)=\dfrac{3}{2}(1+3)=6 \\ a_4=\dfrac{3}{3}(a_1+a_2+a_3)=1+3+6=10 \\ a_5=\dfrac{3}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)=\dfrac{3}{4}(1+3+6+10)=15 \end{cases}\qquad(答)$$

(2) (1) より，数列 $\{a_n\}$ は

$$\{a_n\}:1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \cdots$$

となるので，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$\{b_n\}:2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

これより，$b_n=n+1$ となるので，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=1+\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)=\frac{n(n+1)}{2}$$

このとき，$n=1$ とすると

$$a_1=\frac{1\times 2}{2}=1$$

となり，成立するので

$$a_n=\frac{n(n+1)}{2}\quad(n\geqq 1)\quad\cdots(*)$$

と推定できる．これが正しいことを数学的帰納法を用いて証明する．

(I) $n=1$ のとき，$a_1=1$ となり，$(*)$ は成立する．

(II) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，①より

$$\begin{aligned} a_{k+1}&=\frac{3}{k}(a_1+a_2+\cdots+a_k)=\frac{3}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{3}{2k}\sum_{i=1}^{k}(i^2+i) \\ &=\frac{3}{2k}\left\{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}\right\}=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

となるので，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

よって，(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ は成立するので，推定は正しい．

$$\therefore\quad a_n=\frac{n(n+1)}{2}\qquad(答)$$

２５章　微分

問題

【1】(1)

$$y' = 3x^2 - 6x - 7$$

$x = -1$ のとき

$$y' = 2$$

これより

接線　$y = 2(x+1) + 4 = 2x + 6$　　(答)

法線　$y = -\frac{1}{2}(x+1) + 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$　　(答)

(2) $3x^2 - 6x - 7 = 2$ より

$$3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1) = 0$$
$$\therefore \quad x = 3,\ -1$$

$x = 3$ のとき

$$y' = 2,\ y = -20$$

これより

$$y = 2(x-3) + (-20) = 2x - 26$$

$x = -1$ のとき，(1) より

$$y = 2x + 6$$

以上より

$y = 2x + 6,\quad y = 2x - 26$　　(答)

【2】(1) $$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$$

より，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

また

$$f(-\sqrt{2}) = 2 + 4\sqrt{2}, \quad f(\sqrt{2}) = 2 - 4\sqrt{2}$$

より，$f(x)$ のグラフは図 1 のようになる．

(答)

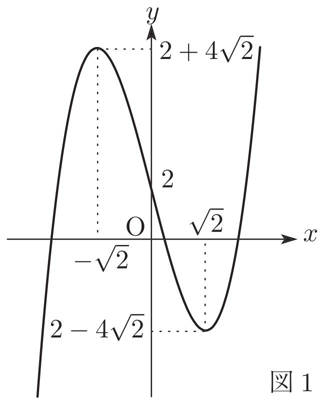


図 1

(2) $$f'(x) = -3x^2 + 6x + 6 = -3(x^2 - 2x - 2)$$

したがって，$f'(x) = 0$ となるのは

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$

であり，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

また

$$f(x) = -3(x^2 - 2x - 2) \times \frac{1}{3}(x-1) + 6x$$

より

$$f(1-\sqrt{3}) = 6 - 6\sqrt{3}, \quad f(1+\sqrt{3}) = 6 + 6\sqrt{3}$$

よって，$f(x)$ のグラフは図 2 のようになる．　(答)

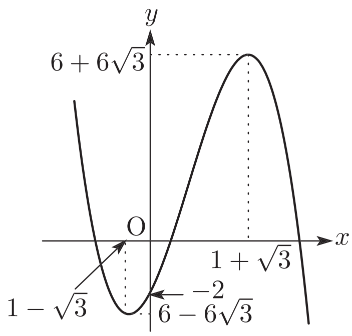


図 2

(3) $$f'(x) = 9x^2$$

これより，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$

よって，グラフは図 3 のようになる．　(答)

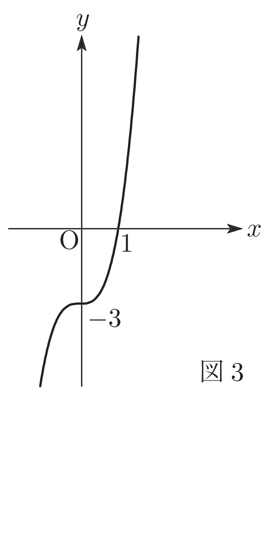


図 3

【3】(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a$$

常に，$f'(x) \geqq 0$ であればよいので $f'(x) = 0$ の判別式を D_1 とおくと

$$\frac{D_1}{4} \leqq 0$$

であればよい．よって

$$a^2 - 3a \leqq 0 \qquad \therefore \quad 0 \leqq a \leqq 3 \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$$

$f'(x) = 0$ が異なる 2 実数解をもてばよいので $f'(x) = 0$ の判別式を D_2 とおくと

$$\frac{D_2}{4} > 0$$

であればよい．よって

$$a^2 - 3^2 > 0 \qquad \therefore \quad a < -3,\ 3 < a \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ より

$$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(x-a)(3x-a)$$

また

$$f(a)=0$$
$$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{3}\left(-\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{4}{27}a^3$$

(イ) $a<0$ のとき, $a<\dfrac{1}{3}a$ なので

$$\begin{cases} x=a \text{ のとき} & \text{極大値 } 0 \\ x=\dfrac{1}{3}a \text{ のとき} & \text{極小値 } \dfrac{4}{27}a^3 \end{cases}$$ (答)

(ロ) $a=0$ のとき, 極値なし. (答)

(ハ) $a>0$ のとき, $\dfrac{1}{3}a<a$ なので

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}a \text{ のとき} & \text{極大値 } \dfrac{4}{27}a^3 \\ x=a \text{ のとき} & \text{極小値 } 0 \end{cases}$$ (答)

(2) $f'(1)=0$ が必要条件であるから

$$f'(1)=(1-a)(3-a)=0 \qquad \therefore \quad a=1,\ 3$$

(i) $a=1$ のとき

$$f'(x)=(x-1)(3x-1)$$

よって $x=\dfrac{1}{3}$ で極大となるので不適.

(ii) $a=3$ のとき

$$f'(x)=(x-3)(3x-3)=3(x-3)(x-1)$$

よって $x=1$ で極大となるので適.

以上 (i), (ii) より $a=3$ のとき $x=1$ で極大値をもつ. (答)

【5】(1) $y'=2x$ より，$y=x^2$ の $x=t$ における接線は

$$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$$

これが $y=-(x-1)^2$ とも接するので

$$-(x-1)^2=2tx-t^2$$

が重解をもつ．これを整理して

$$x^2+2(t-1)x+1-t^2=0$$

を得る．この判別式 D から

$$\frac{D}{4}=(t-1)^2+t^2-1=2t(t-1)=0$$

これより，$t=0,\ 1$ となり，求める共通接線は

$$y=0,\ y=2x-1 \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$y=x^2$ の $x=t$ における接線は

$$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$$

であり，$y=-(x-1)^2$ の $x=s$ における接線は

$$y=-2(s-1)(x-s)-(s-1)^2=-2(s-1)x+s^2-1$$

である．これが一致すれば共通接線となる．

$$2t=-2(s-1),\ -t^2=s^2-1$$

s を消去して，$t^2-t=0$ を得る．

これより，$t=0,\ 1$ となり，求める共通接線は

$$y=0,\ y=2x-1$$

(2) $y=x^3+3$ の $x=s$ 上の点 $(s,\ s^3+3)$ での接線は

$$y=3s^2(x-s)+s^3+3=3s^2x-2s^3+3$$

$y=x^3-1$ の $x=t$ 上の点 $(t,\ t^3-1)$ での接線は

$$y=3t^2(x-t)+t^3-1=3t^2x-2t^3-1$$

これが同一の接線を表しているので

$$\begin{cases} 3s^2=3t^2 & \cdots ① \\ -2s^3+3=-2t^3-1 & \cdots ② \end{cases}$$

①より

$$s=\pm t$$

$s=t$ のとき，②は不成立なので

$$s=-t$$

②に代入して

$$2t^3+3=-2t^3-1 \qquad \therefore\ \ t^3=-1$$

ゆえに

$$t=-1,\ s=1$$

よって，求める直線は

$$y=3x+1 \qquad \text{(答)}$$

【6】

$$y = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (3 < x \text{ のとき}) \\ -x^3 + 3x^2 & (x < 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから

$$y' = \begin{cases} 3x^2 - 6x & (3 < x \text{ のとき}) \\ -3x^2 + 6x & (x < 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となり, $y' = 0$ のとき

$$x = 0,\ 2$$

これより, 増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって

極大値　$4\ (x = 2)$
極小値　$0\ (x = 0,\ x = 3)$

となる.　　　(答)

２６章　積分

問題

【1】$f'(x) = 3x^2 + 1$ より

$$f(x) = \int (3x^2 + 1)\,dx = x^3 + x + C \text{ (ただし，} C \text{ は積分定数とする)}$$

$f(1) = 0$ であるから

$$1 + 1 + C = 0 \qquad \therefore \quad C = -2$$

$$\therefore \quad f(x) = x^3 + x - 2 \qquad \text{(答)}$$

【2】

$$\int_{-a}^{a} (x^3 + x^2 + 5x - 2)\,dx = 2\int_0^a (x^2 - 2)\,dx = 2\left(\frac{a^3}{3} - 2a\right)$$

より

$$2\left(\frac{a^3}{3} - 2a\right) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad a^3 - 6a = 9$$

よって

$$a^3 - 6a - 9 = (a - 3)(a^2 + 3a + 3) = 0$$

となり，a は実数なので，$a^2 + 3a + 3 = \left(a + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ より

$$a = 3 \qquad \text{(答)}$$

【3】$f(x) = ax + b$ とすると

$$\int_0^1 (ax + b)g(x)dx = a\int_0^1 xg(x)dx + b\int_0^1 g(x)dx = 0$$

がすべての a，b で成立しなくてはならないので

$$\int_0^1 xg(x)\,dx = 0, \quad \int_0^1 g(x)\,dx = 0$$

ここで，$g(x) = x^2 + px + q$ とおくと

$$\int_0^1 x(x^2 + px + q)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{p}{3} + \frac{q}{2} = 0$$
$$\int_0^1 (x^2 + px + q)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{p}{2} + q = 0$$

$$\therefore \quad p = -1,\ q = \frac{1}{6}$$

したがって

$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1)

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^2 (-x+2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 \\
&= 2(-2+4) + \left(\frac{9}{2}-6\right) \ = \ \frac{5}{2} \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

(2) $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ より

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^2 (-x^2+x+2)\,dx + \int_2^3 (x^2-x-2)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 \\
&= 2\left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4\right) + \left(\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-6\right) \\
&= \frac{31}{6} \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

(3)

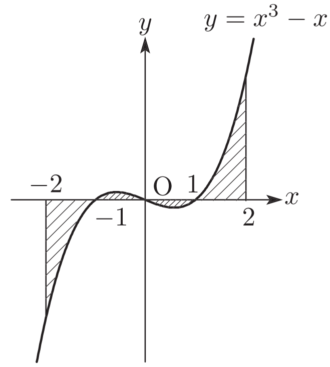
$$\begin{aligned}
(\text{与式}) = 2\int_0^2 |x^2-1|dx &= 2\left\{\int_0^1 (-x^2+1)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx\right\} \\
&= 2\left\{\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2\right\} \\
&= 4\left(-\frac{1}{3}+1\right) + 2\left(\frac{8}{3}-2\right) \ = \ 4 \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_{-1}^0 -x(x-1)dx + \int_0^1 x(x-1)dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= -\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) \\
&= -1 \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

【5】(1)

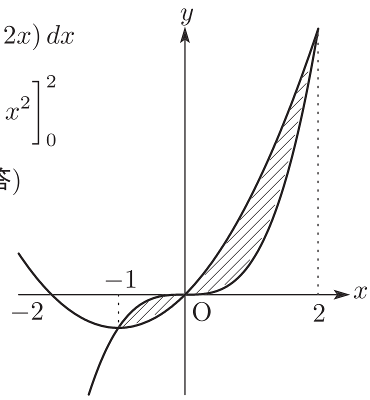
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1}(-x^3+x)\,dx + \int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx \\ &\quad + \int_{0}^{1}(-x^3+x)\,dx + \int_{1}^{2}(x^3-x)\,dx \\ &= 2\left\{\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2\right\} \\ &= 5 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$



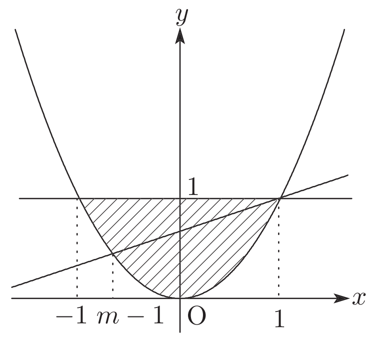
(2) $x^3 = x^2 + 2x$ より

$$x(x^2-x-2) = x(x-2)(x+1) = 0$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx + \int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2 \\ &= -\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1-\frac{16}{4}+\frac{8}{3}+4 \;=\; \frac{37}{12} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$



【6】求める直線を，$y=m(x-1)+1$ とおき，$y=x^2$ との交点を求める．



$x^2=m(x-1)+1$ より

$$(x-1)(x+1-m)=0$$
$$\therefore\quad x=1,\ m-1$$

これより

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=2\int_{m-1}^{1}\{m(x-1)+1-x^2\}\,dx$$

となるので

$$\int_{-1}^{1}-(x+1)(x-1)\,dx=2\int_{m-1}^{1}-(x-1)\{x-(m-1)\}\,dx$$

より

$$\frac{(1+1)^3}{6}=2\times\frac{1}{6}(1-m+1)^3$$

これより

$$4=(2-m)^3\qquad\therefore\quad m=2-\sqrt[3]{4}$$

よって

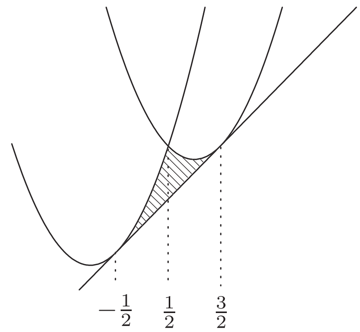
$$y=(2-\sqrt[3]{4})x-1+\sqrt[3]{4}\qquad(\text{答})$$

【7】$y=x^2+2x$ の $x=t$ での接線は

$$y=(2t+2)(x-t)+t^2+2t=2(t+1)x-t^2$$

$y=x^2-2x+2$ の $x=s$ での接線は

$$y=(2s-2)(x-s)+s^2-2s+2=2(s-1)x-s^2+2$$



これが一致するので

$$\begin{cases} t+1=s-1 \\ -t^2=-s^2+2 \end{cases}$$

$s=t+2$ より

$$-t^2=-(t+2)^2+2 \qquad \therefore \quad t=-\frac{1}{2},\ s=\frac{3}{2}$$

これより，共通接線は

$$y=x-\frac{1}{4}$$

また，2 曲線の交点の x 座標は

$$x^2+2x=x^2-2x+2 \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{2}$$

これより

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{x^2+2x-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{x^2-2x+2-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx \\ &= \left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【8】(1) $(x-k)^2+k=-x^2+4$ が異なる 2 実解をもつ．

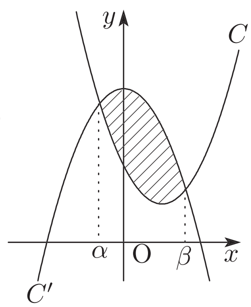
$$x^2-2kx+k^2+k+x^2-4=2x^2-2kx+k^2+k-4=0$$

より

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= k^2-2(k^2+k-4)\\ &= -(k+4)(k-2)>0\\ \therefore\ & -4<k<2 \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}S &= \int_\alpha^\beta \left\{-x^2+4-(x-k)^2-k\right\}dx\\ &= \int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$



(3) 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=\frac{k^2+k-4}{2}$$

よって

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2 &= (\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta = k^2-2(k^2+k-4)\\ &= -k^2-2k+8 = -(k+1)^2+9\end{aligned}$$

となるので，$-4<k<2$ より

$k=-1$ のとき　$(\beta-\alpha)^2$の最大値 9

これより，面積の最大値は (2) より

$$\frac{1}{3}\times 9^{\frac{3}{2}}=9 \qquad \text{(答)}$$

【9】 $f'(x)$ と x^2 が比例するので, 定数 a を用いて

$$f'(x) = ax^2$$

とおける. よって,

$$f(x) = \int ax^2\,dx = \frac{a}{3}x^3 + C \quad (C \text{ は積分定数とする})$$

$f(2) = 10,\ f(-2) = -6$ より

$$\frac{8a}{3} + C = 10,\ -\frac{8a}{3} + C = -6$$

$$\therefore\quad a = 3,\ C = 2$$

したがって

$$f(x) = x^3 + 2 \qquad \text{(答)}$$

【10】(1)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)\,dx &= 2\int_0^1 (x^2+b)\,dx \ = \ 2\left[\frac{x^3}{3}+bx\right]_0^1 \\
&= 2\left(\frac{1}{3}+b\right) \\
\int_{-1}^{1} x(x^2+ax+b)\,dx &= 2\int_0^1 ax^2\,dx \ = \ 2a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}a
\end{aligned}$$

よって

$a=0,\ b=-\dfrac{1}{3}$　　(答)

(2)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2\,dx &= \int_{-1}^{1}\{x^4+2ax^3+(a^2+2b)x^2+2abx+b^2\}\,dx \\
&= 2\int_0^1 \{x^4+(a^2+2b)x^2+b^2\}\,dx \\
&= 2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{a^2+2b}{3}x^3+b^2x\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{15}(5a^2+10b+15b^2+3) \\
&= \frac{2}{3}a^2+2\left(b+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{45}
\end{aligned}$$

よって，$a=0,\ b=-\dfrac{1}{3}$ のとき，つまり，$f(x)=f_0(x)$ のとき，最小の積分値

$$\frac{8}{45}$$

をとる．　　(答)

【11】$y = x^3 + 2x - 1$ より，$y' = 3x^2 + 2$ であるから，$x = 1$ における接線の方程式は

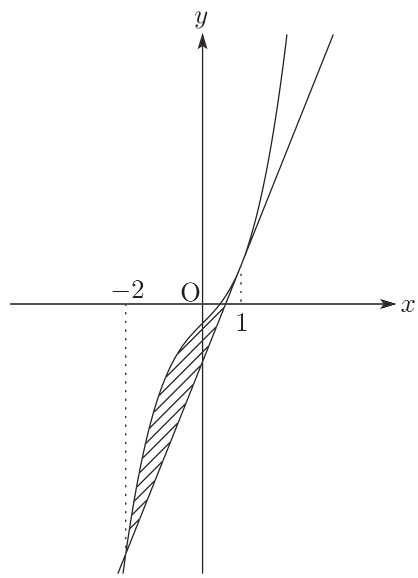
$$y = (3+2)(x-1) + (1^3 + 2\cdot 1 - 1) = 5x - 3$$

この接線と曲線 C の交点は

$$x^3 + 2x - 1 = 5x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\ -2$$

より，接点以外の交点の x 座標は

$$x = -2$$



よって，求める面積は

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{1} \{(x^3 + 2x - 1) - (5x - 3)\}\,dx \\
=\ & \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} \\
=\ & \frac{1-16}{4} - \frac{3}{2}(1-4) + 2(1+2) \\
=\ & \frac{27}{4} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

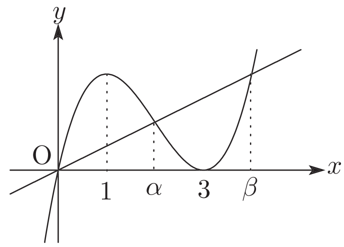
＜参考＞
次の計算方法は数 III の範囲に含まれるが，
以下の公式は使えるようにしておきたい．

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

これを利用して面積を求めると

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{1} \{(x^3 + 2x - 1) - (5x - 3)\}\,dx \\
&= \int_{-2}^{1} (x-1)^2(x+2)\,dx = \int_{-2}^{1} (x-1)^2(x-1+3)\,dx \\
&= \int_{-2}^{1} \{(x-1)^3 + 3(x-1)^2\}\,dx = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + (x-1)^3\right]_{-2}^{1} \\
&= -\frac{81}{4} + 27 = \frac{27}{4}
\end{aligned}$$

【12】



$$y=x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$$
$$y'=3x^2-12x+9=3(x-3)(x-1)$$

$y=mx$ と $y=x^3-6x^2+9x$ の交点の x 座標を $0,\ \alpha,\ \beta\ (0<\alpha<\beta)$ とする.

$x^3-6x^2+9x=mx$ より

$$x(x^2-6x+9-m)=0 \quad \cdots ①$$
$$\therefore\quad \alpha+\beta=6,\quad \alpha\beta=9-m$$

$\displaystyle\int_0^\alpha (x^3-6x^2+9x-mx)\,dx=\int_\alpha^\beta \{mx-(x^3-6x^2+9x)\}\,dx$ となればよいので

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\alpha (x^3-6x^2+9x-mx)\,dx+\int_\alpha^\beta (x^3-6x^2+9x-mx)\,dx \\ &= \int_0^\beta (x^3-6x^2+9x-mx)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\beta^4-2\beta^3+\frac{9}{2}\beta^2-\frac{m}{2}\beta^2 \end{aligned}$$

$\beta\neq 0$ より

$$\frac{1}{4}\beta^2-2\beta+\frac{9}{2}-\frac{m}{2}=0$$

一方，①より

$$\beta^2-6\beta+9-m=0$$

これより m を消去すると

$$\beta^2-4\beta=\beta(\beta-4)=0 \qquad \therefore\quad \beta=4 \quad \because \beta\neq 0$$

このとき，$m=\beta^2-6\beta+9$ より

$$m=1 \qquad \text{(答)}$$

M2T

高２難関大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	