M2TK

本科 2 期 12 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 難関大数学 K

２４章　微分積分（４）－不定積分と定積分－

問題

【1】C は積分定数とする.

(1) $$\int(2x-3)dx = 2\int xdx - 3\int dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C = \boldsymbol{x^2 - 3x + C} \qquad \text{(答)}$$

(2) $$\begin{aligned}\int(-1-x+2x^2)dx &= -\int dx - \int xdx + 2\int x^2dx\\ &= -x - \frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^3}{3} + C\\ &= \boldsymbol{-x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + C} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $$\int(3t^2-t)dt = 3\int t^2dt - \int tdt = 3\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + C = \boldsymbol{t^3 - \frac{t^2}{2} + C} \qquad \text{(答)}$$

(4) $$\int(-2)dx = \boldsymbol{-2x + C} \qquad \text{(答)}$$

【2】C は積分定数とする．

(1)
$$\int (x-2)(x+1)dx = \int (x^2-x-2)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C} \qquad (答)$$

(2)
$$\int (3+2x)(3x+2)dx = \int (6x^2+13x+6)dx$$
$$= \boldsymbol{2x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 6x + C} \qquad (答)$$

(3)
$$\int (x-1)^2 dx = \int (x^2-2x+1)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C} \qquad (答)$$

＜別解＞

$\{(x-1)^3\}' = 3 \cdot 1 \cdot (x-1)^2 = 3(x-1)^2$ より，$(x-1)^2 = \dfrac{1}{3} \cdot \{(x-1)^3\}'$

$$\therefore \int (x-1)^2 dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}(x-1)^3 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\textbf{ は積分定数)} \qquad (答)$$

ここで，$C_1 = C + \dfrac{1}{3}$ である．

(4)
$$\int (3x-2)^2 dx = \int (9x^2-12x+4)dx$$
$$= \boldsymbol{3x^3 - 6x^2 + 4x + C} \qquad (答)$$

＜別解＞

$\{(3x-2)^3\}' = 3 \cdot 3 \cdot (3x-2)^2 = 9(3x-2)^2$ より，$(3x-2)^2 = \dfrac{1}{9} \cdot \{(3x-2)^3\}'$

$$\therefore \int (3x-2)^2 dx = \boldsymbol{\frac{1}{9}(3x-2)^3 + C_1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\textbf{ は積分定数)} \qquad (答)$$

ここで，$C_1 = C + \dfrac{8}{9}$ である．

(5)
$$\int (x-1)^2(x+2)dx = \int (x^3-3x+2)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C} \qquad (答)$$

【3】(1)

$$\int_1^2 (2x+1)dx = \Big[x^2+x\Big]_1^2 = (4+2)-(1+1) = \mathbf{4} \qquad (答)$$

(2)

$$\int_0^1 (6x^2-3)dx = \Big[2x^3-3x\Big]_0^1 = (2-3)-(0-0) = \mathbf{-1} \qquad (答)$$

(3)

$$\int_{-2}^1 (3x^2-2x-1)dx = \Big[x^3-x^2-x\Big]_{-2}^1$$

$$= (1-1-1)-(-8-4+2) = \mathbf{9} \qquad (答)$$

(4)

$$\int_{-1}^1 (x^2-3x)dx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{2}{3}} \qquad (答)$$

(5)

$$\int_2^{-2} (3+x-x^2)dx = \int_{-2}^2 (x^2-x-3)dx = 2\int_0^2 (x^2-3)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_0^2 = 2\left(\frac{8}{3}-6\right) = \mathbf{-\frac{20}{3}} \qquad (答)$$

【4】(1)

$$|2x-4| = \begin{cases} -(2x-4) & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 2x-4 & (2 \leqq x \leqq 3) \end{cases} \quad より$$

$$\int_0^3 |2x-4|dx = \int_0^2 \{-(2x-4)\}dx + \int_2^3 (2x-4)dx$$

$$= -\Big[x^2-4x\Big]_0^2 + \Big[x^2-4x\Big]_2^3$$

$$= -\{(4-8)-(0-0)\} + \{(9-12)-(4-8)\} = \mathbf{5} \qquad (答)$$

(2)

$$|x^2-1| = \begin{cases} -(x^2-1) & (0 \leqq x \leqq 1) \\ x^2-1 & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases} \quad より$$

$$\int_0^2 |x^2-1|dx = \int_0^1 \{-(x^2-1)\}dx + \int_1^2 (x^2-1)dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2$$

$$= -\left\{\left(\frac{1}{3}-1\right)-(0-0)\right\} + \left(\frac{8}{3}-2\right) - \left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$= \mathbf{2} \qquad (答)$$

(3)

$$|x^2-2x-3| = \begin{cases} -(x^2-2x-3) & (0 \leqq x \leqq 3) \\ x^2-2x-3 & (3 \leqq x \leqq 4) \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\int_0^4 |x^2-2x-3|dx = \int_0^3 \{-(x^2-2x-3)\}dx + \int_3^4 (x^2-2x-3)dx$$

ここで

$$g(x) = -(x^2-2x-3)$$

$$G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \quad (g(x)\text{ の不定積分の 1 つ})$$

とおくと，上式の右辺は

$$\begin{aligned} \int_0^3 g(x)dx + \int_3^4 \{-g(x)\}dx &= \int_0^3 g(x)dx + \int_4^3 g(x)dx \\ &= \Big[G(x)\Big]_0^3 + \Big[G(x)\Big]_4^3 \\ &= 2G(3) - G(0) - G(4) \\ &= 2(-9+9+9) - (0-0-0) \\ &\qquad - \left(-\frac{64}{3} + 16 + 12\right) \\ &= \mathbf{\frac{34}{3}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

コメント

本問のように被積分関数を $g(x)$ などとおくことで，計算の見通しが非常に良くなる．この方法は被積分関数が複雑になればなるほど有効である．

【5】(1)

$$\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3-x)dx=\mathbf{0}\qquad\text{(答)}$$

(2)

$$\int_{-1}^{0}(x^2-1)dx+\int_{0}^{1}(x^2-1)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx=2\int_{0}^{1}(x^2-1)dx$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\qquad\text{(答)}$$

(3)

$$\int_{-2}^{1}(4x^3+3x^2-2x-2)dx-\int_{1}^{2}(2+2x-3x^2-4x^3)dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(4x^3+3x^2-2x-2)dx+\int_{1}^{2}(4x^3+3x^2-2x-2)dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2-2x-2)dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(3x^2-2)dx$$

$$=2\left[x^3-2x\right]_0^2=2\cdot\left(2^3-2\cdot2\right)=\mathbf{8}\qquad\text{(答)}$$

(4)

$$\int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx+\int_{a}^{c}(x-x^2-x^3)dx$$

$$=\int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx-\int_{a}^{c}(x^3+x^2-x)dx$$

$$=\int_{-a}^{c}(x^3+x^2-x)dx+\int_{c}^{a}(x^3+x^2-x)dx$$

$$=\int_{-a}^{a}(x^3+x^2-x)dx$$

$$=2\int_{0}^{a}x^2dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=2\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{a^3}\qquad\text{(答)}$$

【6】与式を

$$I(a) = \int_0^1 |x^2 - a^2| dx$$

とおく.

$$|x^2 - a^2| = \begin{cases} -(x^2 - a^2) & (0 < x < a) \\ x^2 - a^2 & (a \leqq x) \end{cases}$$

であるから，a の範囲で場合を分ける.

(i) $0 < a < 1$ のとき.

$$I(a) = \int_0^a -(x^2 - a^2)dx + \int_a^1 \left(x^2 - a^2\right)dx \quad \cdots (*)$$

ここで

$$g(x) = -\left(x^2 - a^2\right)$$
$$G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + a^2 x \quad (g(x) \text{ の不定積分のひとつ})$$

とおくと,

$$\begin{aligned}(*) &= \int_0^a g(x)dx + \int_a^1 -g(x)dx \\ &= \int_0^a g(x)dx + \int_1^a g(x)dx \\ &= \Big[G(x)\Big]_0^a + \Big[G(x)\Big]_1^a \\ &= 2G(a) - G(0) - G(1) \\ &= 2\left(-\frac{1}{3}a^3 + a^3\right) - \left(-\frac{1}{3} + a^2\right) = \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(ii) $1 \leqq a$ のとき.

$$\begin{aligned}I(a) &= \int_0^1 -(x^2 - a^2)dx \\ &= \int_0^1 g(x)dx \\ &= \Big[G(x)\Big]_0^1 = G(1) - G(0) = a^2 - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

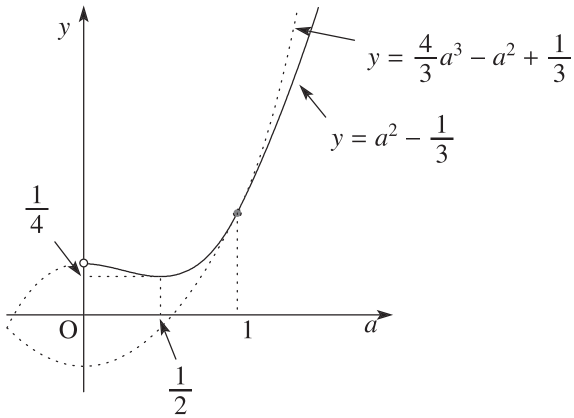
以上より

$$I(a) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}a^3 - a^2 + \dfrac{1}{3} & (0 < a < 1) \\ a^2 - \dfrac{1}{3} & (1 \leqq a) \end{cases}$$

ここで

$$\left(\frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}\right)' = 4a^2 - 2a = 2a(2a - 1)$$

であるから，$I(a)$ のグラフは次のようになる.



求める最小値は

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【7】■方針

与えられた式を $x-\alpha$ について展開し，不定積分の公式

$$\int (x+a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1} + C \quad (C\ \text{は積分定数})$$

を用いる.

■解答

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx \\
&= \int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)(x-\alpha)\right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^2 \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)(\beta-\alpha)^3 \\
&= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

〔証明終〕

【8】(1)

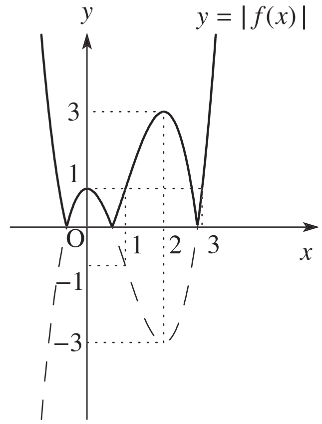
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

より

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

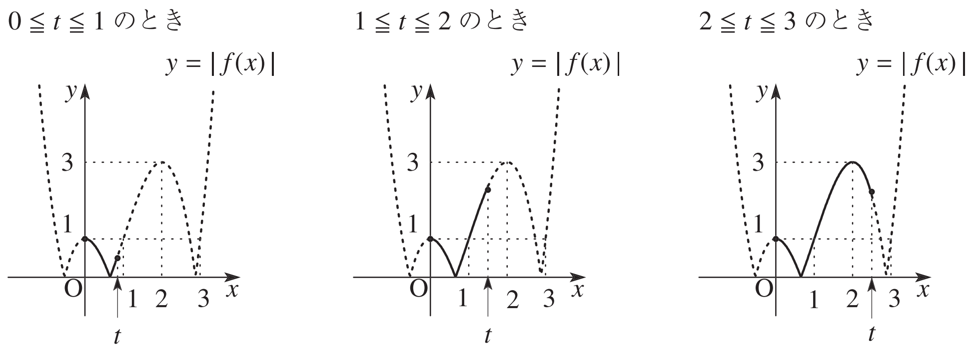
よって，$f(x)$ の増減表は下のようになる．

x	……	0	……	2	……
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	−3	↗



ゆえに $y = |f(x)|$ のグラフは右図．

したがって $0 \leqq x \leqq t$ における最大値は下図のようになる．



ゆえに求める最大値は

$$g(t) = \begin{cases} \mathbf{1} & (\mathbf{0 \leqq t \leqq 1}) \\ \mathbf{-t^3 + 3t^2 - 1} & (\mathbf{1 \leqq t \leqq 2}) \\ \mathbf{3} & (\mathbf{2 \leqq t \leqq 3}) \end{cases} \quad (答)$$

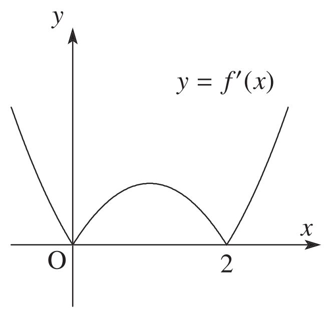
(2) (1) より

$$\int_0^3 g(t)dt = \int_0^1 dt + \int_1^2 (-t^3 + 3t^2 - 1)dt + \int_2^3 3dt$$

$$= \Big[\, t \,\Big]_0^1 + \Big[-\frac{t^4}{4} + t^3 - t \Big]_1^2 + \Big[\, 3t \,\Big]_2^3$$

$$= 1 + \frac{9}{4} + 3 = \mathbf{\frac{25}{4}} \qquad (答)$$

【9】(1) $y=f'(x)$ のグラフは右のようになる．$f'(x)$ がすべての実数 x で定義されるから，$f(x)$ はすべての実数 x で連続である[*1]．すなわち $x \leqq 0$，$0 \leqq x \leqq 2$，$2 \leqq x$ の各区間において $f(x)=\int f'(x)dx$ を計算し，$f(x)$ が連続になるように積分定数を定めればよい．



(i) $0 \leqq x \leqq 2$ のとき．

$$f'(x)=-\left(3x^2-6x\right)=-3x^2+6x$$

このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left(-3x^2+6x\right)dx \\ &= -x^3+3x^2+C_1 \end{aligned}$$

$f(1)=-1+3+C_1=0$ より $C_1=-2$．ゆえに

$$f(x)=-x^3+3x^2-2 \quad \cdots ①$$

(ii) $x \leqq 0$ のとき．

$$f'(x)=3x^2-6x$$

このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left(3x^2-6x\right)dx \\ &= x^3-3x^2+C_2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①より $f(0)=-2$．② より

$$f(0)=C_2=-2$$

ゆえに

$$f(x)=x^3-3x^2-2$$

(iii) $2 \leqq x$ のとき．

$$f'(x)=3x^2-6x$$

このとき上の結果より

$$f(x)=x^3-3x^2+C_3 \quad \cdots ③$$

① より

$$f(2)=-8+12-2=2$$

---

*1 「コメント」参照

③ に代入して

$$f(2) = 8 - 12 + C_3 = 2 \qquad \therefore \quad C_3 = 6$$

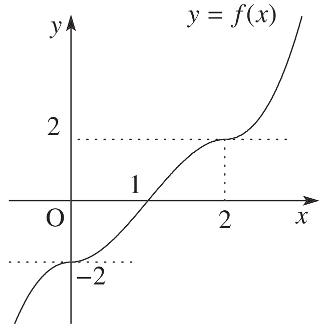
ゆえに

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$$

以上より，

$$f(x) = \begin{cases} \boldsymbol{x^3 - 3x^2 - 2} & \textbf{(}\boldsymbol{x \leqq 0}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{-x^3 + 3x^2 - 2} & \textbf{(}\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 2}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 6} & \textbf{(}\boldsymbol{2 \leqq x}\ \textbf{のとき)} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) $f'(x) \geqq 0$ より $f(x)$ はすべての実数 x で単調増加である．
$f'(0) = f'(2) = 0$ に注意して，求める $y = f(x)$ のグラフは図のようになる．　(答)



＜コメント＞

次が成り立つ．

定理

$x = a$ で $f(x)$ が微分可能ならば，$x = a$ で $f(x)$ は連続である．

＜証明＞

$f'(a)$ が存在するから

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

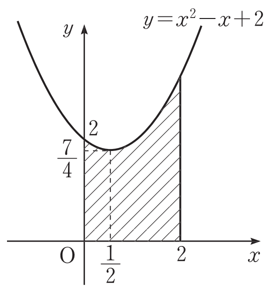
とおくと

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(a+h) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{h} \cdot h \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a)}{h} \cdot h \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h + f(a) \right\} \\ &= f'(a) \cdot 0 + f(a) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

すなわち $x = a$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(a)$ が存在すれば，$x = a$ で $f(x)$ は連続であることが示された．　〔証明終〕

問題

【1】(1) 右図より



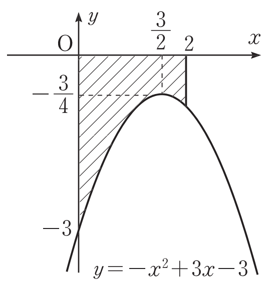
$$\int_0^2 (x^2 - x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 2 + 4 \right)$$

$$= \mathbf{\frac{14}{3}} \quad \text{(答)}$$

(2) 右図より



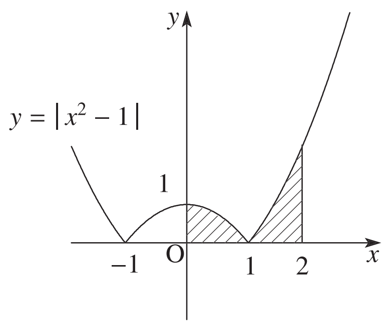
$$\int_0^2 \left\{ 0 - (-x^2 + 3x - 3) \right\} dx$$

$$= -\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 3x \right]_0^2$$

$$= -\left(-\frac{8}{3} + 6 - 6 \right)$$

$$= \mathbf{\frac{8}{3}} \quad \text{(答)}$$

(3) 右図より



$$\int_0^1 (-x^2 + 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx$$

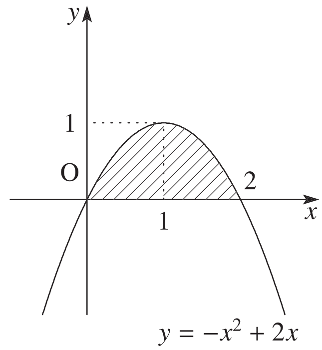
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$= \mathbf{2} \quad \text{(答)}$$

【2】(1)　右図より

$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+4\right)$$
$$=\mathbf{\frac{4}{3}}\qquad(答)$$



＜別解＞

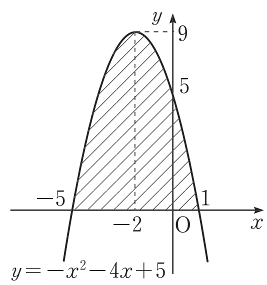
$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いると

$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=-\int_0^2 x(x-2)dx=\frac{(2-0)^3}{6}=\mathbf{\frac{4}{3}}\qquad(答)$$

(2) 右図より

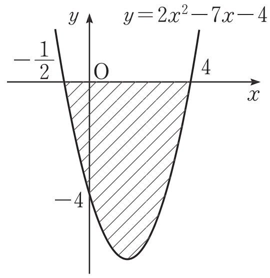
$$\int_{-5}^1(-x^2-4x+5)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_{-5}^1$$
$$=\left(-\frac{1}{3}-2+5\right)-\left(\frac{125}{3}-50-25\right)$$
$$=\mathbf{36}\qquad(答)$$



＜別解＞

$$\int_{-5}^1(-x^2-4x+5)dx=-\int_{-5}^1(x+5)(x-1)dx$$
$$=\frac{\{1-(-5)\}^3}{6}$$
$$=\mathbf{36}\qquad(答)$$

(3) 右図より



$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\{0-(2x^2-7x-4)\}dx$$

$$=-\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-4x\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}$$

$$=-\left(\frac{128}{3}-56-16\right)+\left(-\frac{1}{12}-\frac{7}{8}+2\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{243}{8}}$$ (答)

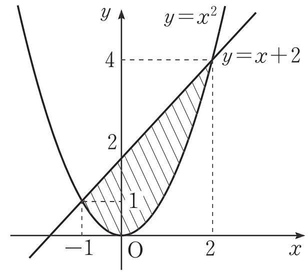
＜別解＞

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\{0-(2x^2-7x-4)\}dx=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left\{4-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{243}{8}}$$ (答)

【3】(1) 右図より



$$\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$

$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$ (答)

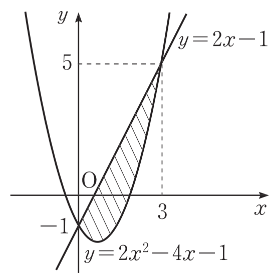
＜別解＞

$$\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$

$$=\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}$$

$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$ (答)

(2) 右図より



$$\int_{0}^{3}\{(2x-1)-(2x^2-4x-1)\}dx$$

$$=\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{3}$$

$$=(-18+27)$$

$$=\mathbf{9}$$ (答)

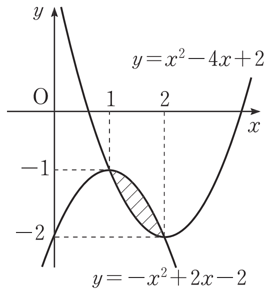
＜別解＞

$$\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)dx=-2\int_{0}^{3}x(x-3)dx$$

$$=2\cdot\frac{(3-0)^3}{6}$$

$$=\mathbf{9}$$ (答)

(3) 右図より



$$\int_1^2 \{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$
$$=\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)$$
$$=\mathbf{\frac{1}{3}}\qquad(答)$$

＜別解＞

$$\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx=-2\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$$
$$=2\cdot\frac{(2-1)^3}{6}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{3}}\qquad(答)$$

＜コメント＞

多くの面積計算においては，公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

をうまく使うことにより，計算が大幅に簡単になる．

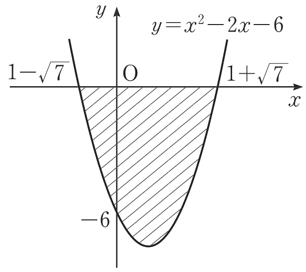
【4】(1) 2 次方程式

$$x^2 - 2x - 6 = 0$$

を解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{7}$$

ゆえに右図より



$$\int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}} \{0 - (x^2 - 2x - 6)\}dx$$

$$= -\int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}} \left\{x - (1 - \sqrt{7})\right\}\left\{x - (1 + \sqrt{7})\right\}dx$$

$$= \frac{\left\{(1 + \sqrt{7}) - (1 - \sqrt{7})\right\}^3}{6}$$

$$= \mathbf{\frac{28\sqrt{7}}{3}} \quad \text{(答)}$$

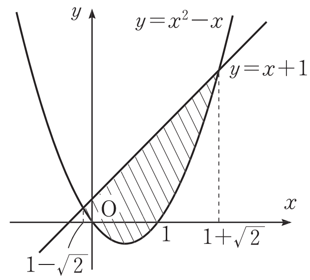
(2) 2 次方程式

$$x^2 - x = x + 1$$

を解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

ゆえに右図より



$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \{(x + 1) - (x^2 - x)\}dx$$

$$= -\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left\{x - (1 - \sqrt{2})\right\}\left\{x - (1 + \sqrt{2})\right\}dx$$

$$= \frac{\left\{(1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})\right\}^3}{6} = \mathbf{\frac{8\sqrt{2}}{3}} \quad \text{(答)}$$

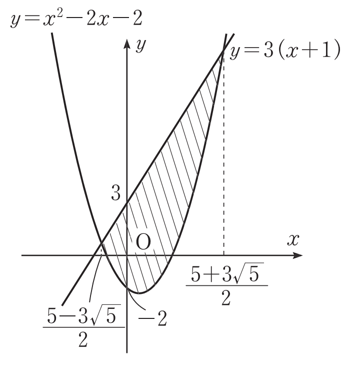
(3) 2 次方程式

$$x^2 - 2x - 2 = 3(x + 1)$$

を解くと

$$x = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

ゆえに右図より



$$\int_{\frac{5-3\sqrt{5}}{2}}^{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}} \{3(x+1)-(x^2-2x-2)\}dx$$

$$=-\int_{\frac{5-3\sqrt{5}}{2}}^{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}} \left(x-\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2}-\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{45\sqrt{5}}{2}}$$ (答)

(4) 2 次方程式

$$x^2-2x-3=0$$

を解いて

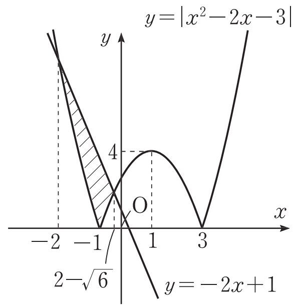
$$x=-1,\ 3$$

また

$$x^2-2x-3=-2x+1$$

を解いて

$$x=\pm 2$$



問題の曲線と直線は $x<0$ において，上図のように交わるから

$$\int_{-2}^{-1} \{(-2x+1)-(x^2-2x-3)\}dx$$

$$+\int_{-1}^{2-\sqrt{6}} \{(-2x+1)-(-x^2+2x+3)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+4)dx+\int_{-1}^{2-\sqrt{6}}(x^2-4x-2)dx$$

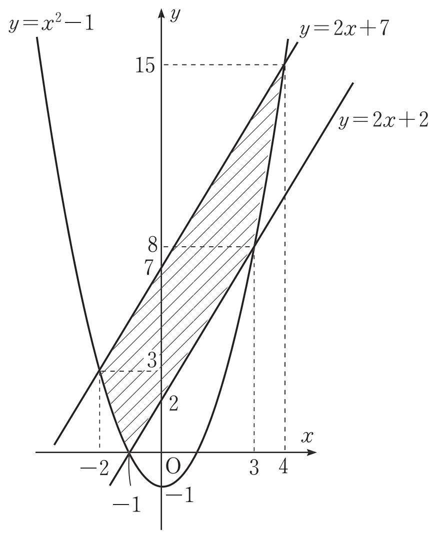
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-2x\right]_{-1}^{2-\sqrt{6}}$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{3}-4\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right\}$$

$$+\left[\left\{\frac{(2-\sqrt{6})^3}{3}-2(2-\sqrt{6})^2-2(2-\sqrt{6})\right\}-\left(-\frac{1}{3}-2+2\right)\right]$$

$$=\boldsymbol{\frac{12\sqrt{6}-22}{3}}$$ (答)

【5】(1) 右図より



$$\int_{-2}^{-1}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx$$

$$+\int_{-1}^{3}\{(2x+7)-(2x+2)\}dx$$

$$+\int_{3}^{4}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+2x+8)dx$$

$$+\int_{-1}^{3}5dx+\int_{3}^{4}(-x^2+2x+8)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{-2}^{-1}+\left[5x\right]_{-1}^{3}$$

$$+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{3}^{4}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+1-8\right)-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)+15-(-5)$$

$$+\left(-\frac{64}{3}+16+32\right)-(-9+9+24)$$

$$=\mathbf{\frac{76}{3}}$$ (答)

＜別解＞

公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いると,

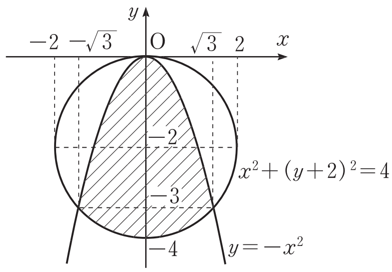
$$\int_{-2}^{4}\{(2x+7)-(x^2-1)\}dx-\int_{-1}^{3}\{(2x+2)-(x^2-1)\}dx$$

$$=-\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)dx+\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$$

$$=\frac{\{4-(-2)\}^3}{6}-\frac{\{3-(-1)\}^3}{6}$$

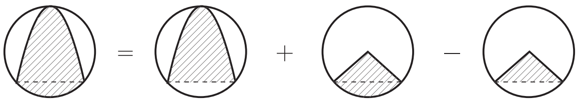
$$=\mathbf{\frac{76}{3}}$$ (答)

(2) $y=-x^2$ と $x^2+(y+2)^2=4$ の交点の x 座標は

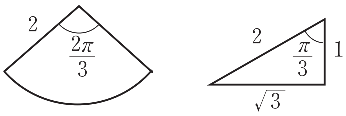


$$x^2+(-x^2+2)^2=4$$
$$x^2+x^4-4x^2+4=4$$
$$x^4-3x^2=0$$
$$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$$

ゆえに



であり，



より，求める面積は

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left\{(-x^2)-(-3)\right\}dx+\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1\right)$$
$$=-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)dx+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right\}^3+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$
$$=\mathbf{3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}\qquad\text{(答)}$$

【6】　2 次方程式

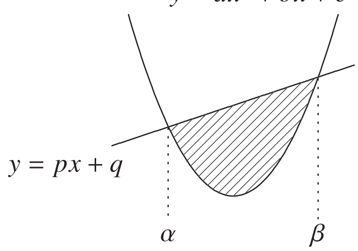
$$ax^2+bx+c=px+q \iff ax^2+(b-p)x+(c-q)=0 \quad \cdots(*)$$

の 2 解が $x=\alpha,\ \beta \quad (\alpha<\beta)$ であるから

$$((*)\text{ の左辺})=ax^2+(b-p)x+(c-q)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

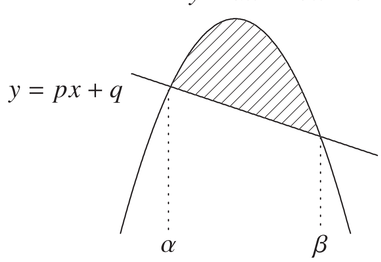
これを用いる.

(i)　$a>0$ のとき



$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta\{(px+q)-(ax^2+bx+c)\}dx\\ &=-\int_\alpha^\beta\{ax^2+(b-p)x+(c-q)\}dx\\ &=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\\ &=a\cdot\left\{-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\right\}\\ &=a\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}\end{aligned}$$

(ii)　$a<0$ のとき



$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta\{(ax^2+bx+c)-(px+q)\}dx\\ &=\int_\alpha^\beta\{ax^2+(b-p)x+(c-q)\}dx\\ &=\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\\ &=-a\cdot\left\{-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\right\}\\ &=-a\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}\end{aligned}$$

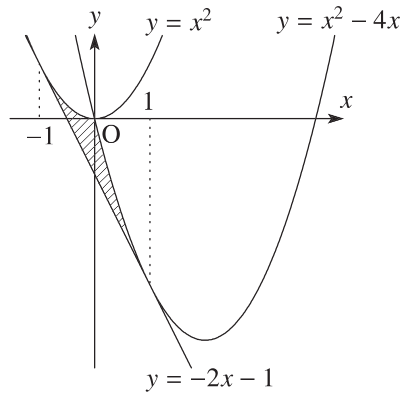
以上より，求める面積は

$$\boldsymbol{|a|\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}} \qquad (答)$$

【7】 $C: \ y = x^2$

$C': \ y = x^2 - 4x$

とする．



$y = x^2$ 上の点 $(\alpha, \ \alpha^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2$$
$$\Longleftrightarrow \quad y = 2\alpha x - \alpha^2$$

また，$y = x^2 - 4x$ 上の点 $\left(\beta, \ \beta^2 - 4\beta\right)$ における接線の方程式は

$$y = (2\beta - 4)(x - \beta) + \beta^2 - 4\beta$$
$$\Longleftrightarrow \quad y = (2\beta - 4)x - \beta^2$$

これらが一致するから

$$2\alpha = 2\beta - 4 \quad \cdots ① , \quad \alpha^2 = \beta^2 \quad \cdots ②$$

これを解いて

$$\alpha = -1, \ \beta = 1$$

ゆえに l の方程式は

$$\boldsymbol{y = -2x - 1} \qquad (\text{答})$$

また，l と C，C' の接点の x 座標はそれぞれ

$$x = -1, \quad x = 1$$

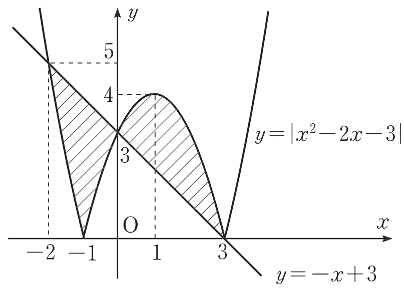
であるから，求める面積は右図より

$$\int_{-1}^{0} \{x^2 - (-2x-1)\}dx + \int_{0}^{1} \{(x^2 - 4x) - (-2x - 1)\}dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (x + 1)^2 dx + \int_{0}^{1} (x - 1)^2 dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x + 1)^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}(x - 1)^3\right]_{0}^{1}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad (\text{答})$$

【8】

$$y = |x^2 - 2x - 3|$$
$$= \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & (x \leqq -1,\ 3 \leqq x \text{ のとき}) \\ -x^2 + 2x + 3 & (-1 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり，これらを図示すると右のようになる．

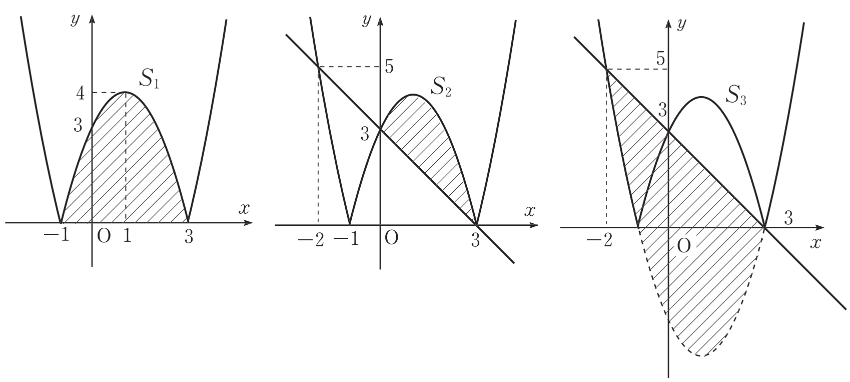


ここで求める面積を S，下図の 3 つの面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると

$$S_1 = \int_{-1}^{3} \{-(x+1)(x-3)\}dx$$
$$= \frac{\{3-(-1)\}^3}{6} = \frac{32}{3}$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} \{(-x^2+2x+3)-(-x+3)\}dx$$
$$= \int_{0}^{3} \{-x(x-3)\}dx$$
$$= \frac{(3-0)^3}{6} = \frac{9}{2}$$

$$S_3 = \int_{-2}^{3} \{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$$
$$= \int_{-2}^{3} \{-(x+2)(x-3)\}dx = \frac{\{3-(-2)\}^3}{6} = \frac{125}{6}$$



ゆえに求める面積は

$$S = S_3 - 2S_1 + 2S_2$$
$$= \frac{125}{6} - \frac{64}{3} + 9 = \mathbf{\frac{17}{2}} \qquad (\text{答})$$

【9】(1) $f(x)$ は 3 次であるから $f'(x)$ は 2 次．$f(x)$ が $x = 1,\ 3$ で極値をとるから，

$$f'(x) = k(x-1)(x-3)$$

とおける．また，$x = 2$ における曲線 $y = f(x)$ の接線は

$$y = -3x + 8$$

より，$x = 2$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(2) = -3$ であるから，

$$f'(2) = k(-1)(1) = -k = -3$$

ゆえに $k = 3$．よって

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3) = 3x^2 - 12x + 9$$

ここで

$$f(x) = \int f'(x)dx = x^3 - 6x^2 + 9x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

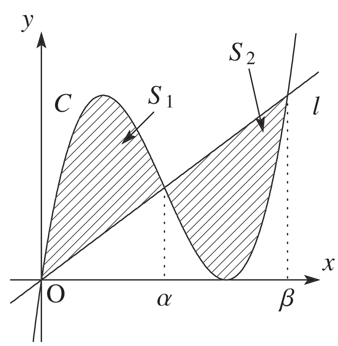
であり，条件より $f(2) = 2$ であるから上式に代入して

$$f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 + C = 2$$
$$\therefore \quad C = 0$$

ゆえに求める関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 9x} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) l ： $y = ax$ とおく．



$f(1) = 1-6+9 = 4$，$f(3) = 27-54+27 = 0$

より，$y = f(x)$ のグラフは図のようになる．

C と l との共有点のうち原点と異なるものの座標を $x = \alpha,\ \beta \quad (\alpha < \beta)$ とおくと，

$$S_1 = \int_0^\alpha \{f(x) - ax\}dx$$
$$S_2 = \int_\alpha^\beta \{ax - f(x)\}dx$$

$S_1 = S_2$ より

$$\int_0^\alpha \{f(x) - ax\}dx - \int_\alpha^\beta \{ax - f(x)\}dx = 0$$

ゆえに

$$\int_0^\alpha \{f(x) - ax\}dx + \int_\alpha^\beta \{f(x) - ax\}dx$$
$$= \int_0^\beta \{f(x) - ax\}dx = \int_0^\beta \{x^3 - 6x^2 + (9-a)x\}dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}(9-a)x^2\right]_0^\beta$$
$$= \frac{1}{4}\beta^4 - 2\beta^3 + \frac{1}{2}(9-a)\beta^2 = 0$$

$\beta \neq 0$ であるから上式は

$$\beta^2 - 8\beta + 2(9 - a) = 0 \quad \cdots ①$$

ここで β は方程式

$$f(x) - ax = x^3 - 6x^2 + (9 - a)x = 0$$

の実数解であるから

$$\begin{aligned} \beta^3 - 6\beta^2 + (9 - a)\beta &= 0 \\ \beta^2 - 6\beta + (9 - a) &= 0 \\ \therefore \quad 9 - a &= -\beta^2 + 6\beta \quad \cdots ② \end{aligned}$$

② を ① に代入して

$$\beta^2 - 8\beta + 2\left(-\beta^2 + 6\beta\right) = 0$$
$$\therefore \quad \beta = 4 \quad (\beta \neq 0)$$

② に代入して

$$9 - a = -4^2 + 6 \cdot 4 \qquad \therefore \quad a = 1$$

$f(x) - x = 0$ を解くと

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$
$$\therefore \quad x = 0,\ 2\ (= \alpha),\ 4(= \beta)$$

ゆえに求める面積は

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= 2\int_0^2 \{x^3 - 6x^2 + 8x\}dx \\ &= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 \\ &= 2(4 - 16 + 16) \\ &= \mathbf{8} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

【10】(1) 与えられた関数を微分すると

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax, \quad g'(x) = -2x + b$$

$y = f(x)$, $y = g(x)$ が $x = 1$ で接線を共有するから

$$f(1) = g(1) \quad \cdots ①$$
$$f'(1) = g'(1) \quad \cdots ②$$

② より

$$-3 + 2a = -2 + b \iff b = 2a - 1 \quad \cdots ②'$$

このとき ① は成立．ここで 2 曲線は点 $(1,\ 7)$ を通るから，②′ を用いて

$$g(1) = -1^2 + (2a-1)\cdot 1 + a = 7 \qquad \therefore \quad a = \mathbf{3} \qquad \textbf{(答)}$$

このとき

$$b = 6 - 1 = \mathbf{5} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $g'(x) = -2x + 5$ より $g'(1) = 3$．ゆえに求める接線の方程式は

$$y - 7 = 3(x - 1)$$
$$\boldsymbol{y = 3x + 4} \qquad \textbf{(答)}$$

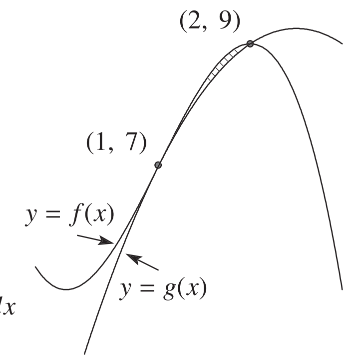
(3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$ より

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

ゆえに

$$\begin{cases} \text{極小値} \quad f(0) = \mathbf{5} \\ \text{極大値} \quad f(2) = \mathbf{9} \end{cases} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) 方程式 $f(x) = g(x)$ を解くと，$x = 1$ を重解にもつことに注意して



$$-x^3 + 3x^2 + 5 = -x^2 + 5x + 3$$
$$(x-1)^2(x-2) = 0$$
$$\therefore \quad x = 1,\ 2$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_1^2 \{f(x) - g(x)\}dx &= \int_1^2 \{-(x-1)^2(x-2)\}dx \\ &= -\int_1^2 \{(x-1)^2(x-1-1)\}dx \\ &= -\int_1^2 \{(x-1)^3 - (x-1)^2\}dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2 \\ &= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{12}} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

問題

【1】(1) 与式の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x - 3)$$

$$\therefore \quad f(x) = \mathbf{2x - 2} \qquad \text{(答)}$$

また与式で $x = a$ として

$$\int_a^a f(t)dt = a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a+1)(a-3) = 0$$

$$a = \mathbf{-1,\ 3} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 + a)$$

$$\therefore \quad xf(x) = 3x^2 + 4x$$

これが x の恒等式であるから，両辺を x で割って

$$f(x) = \mathbf{3x + 4} \qquad \text{(答)}$$

また与式で $x = 0$ として

$$\int_0^0 tf(t)dt = a = \mathbf{0} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1)
$$a = \int_0^2 f(t)dt \quad (a \text{ は実数の定数}) \quad \cdots(*)$$
とおくと，与式は $f(x) = x + a$ であるから，$(*)$ に代入して
$$a = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (t+a)dt = \left[\frac{t^2}{2} + at\right]_0^2$$
$$a = 2a + 2$$
$$\therefore\ a = -2$$
よって求める関数は

$\boldsymbol{f(x) = x - 2}$　　(答)

(2) 与えられた式は
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_2^4 \{3x - f(t)\}dt \\ &= 3x\int_2^4 dt - \int_2^4 f(t)dt \\ &= 3x \cdot \Big[t\Big]_2^4 - \int_2^4 f(t)dt \\ &= 6x - \int_2^4 f(t)dt \end{aligned}$$
であるから
$$a = \int_2^4 f(t)dt \quad (a \text{ は実数の定数}) \quad \cdots(*)$$
とおくと，$f(x) = 6x - a$ となる．$(*)$ に代入して
$$a = \int_2^4 (6t - a)dt = \Big[3t^2 - at\Big]_2^4 = (48 - 4a) - (12 - 2a)$$
$$a = -2a + 36$$
$$\therefore\ a = 12$$
よって求める関数は

$\boldsymbol{f(x) = 6x - 12}$　　(答)

(3) 与えられた関数は
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \int_1^2 xf(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt \\ &= x^2 + x\int_1^2 f(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt \end{aligned}$$
となるから，
$$a = \int_1^2 f(t)dt,\ \ b = \int_0^2 f(t)dt \quad (a,\ b \text{ は実数の定数}) \quad \cdots(*)$$

とおくと $f(x)=x^2+ax-2b$ であるから，(∗) より

$$a=\int_1^2(t^2+at-2b)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-2bt\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}(8-1)+\frac{a}{2}(4-1)-2b(2-1)$$
$$a=\frac{3}{2}a-2b+\frac{7}{3}$$
$$\therefore 3a-12b=-14 \quad \cdots ①$$

また，

$$b=\int_0^2(t^2+at-2b)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-2bt\right]_0^2=\frac{8}{3}+2a-4b$$
$$\therefore 6a-15b=-8 \quad \cdots ②$$

①，② を連立して解くと，$a=\dfrac{38}{9}$，$b=\dfrac{20}{9}$
よって求める関数は

$$\boldsymbol{f(x)=x^2+\frac{38}{9}x-\frac{40}{9}} \qquad (答)$$

【3】与えられた条件は

$$\begin{cases} f(1) = -2 & \cdots① \\ f'(0) = -1 & \cdots② \\ \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{6} & \cdots③ \end{cases}$$

である．$f'(x) = 2ax + b$ であるから，② より $b = -1$ とわかる．
よって，

$$f(x) = ax^2 - x + c$$

① より

$$f(1) = a - 1 + c = -2 \qquad \therefore\ c = -a - 1 \qquad \cdots①'$$

③ に代入して

$$\begin{aligned}\int_0^1 (ax^2 - x - a - 1)dx &= \left[\frac{a}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - ax - x\right]_0^1 \\ &= \frac{a}{3} - \frac{1}{2} - a - 1 = -\frac{1}{6} \\ \therefore\quad a &= -2\end{aligned}$$

①′ より，$c = 1$

$\therefore$ $\boldsymbol{a = -2,\ b = -1,\ c = 1}$　　(答)

【4】曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きが $3x^2 + 2$ であるから

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

したがって，

$$f(x) = \int (3x^2 + 2)dx = x^3 + 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

ここで，曲線 $y = f(x)$ が点（1，1）を通ることから

$$1 = 1 + 2 + C \quad \therefore \quad C = -2$$

よって，求める曲線の方程式は

$\boldsymbol{y = x^3 + 2x - 2}$　　(答)

【5】$Q(x)=px^2+qx+r$　($p,\ q,\ r$ は実数の定数) とおくと，条件 (i) より

$$\int_{-2}^{2}P(x)(px^2+qx+r)dx=p\int_{-2}^{2}x^2P(x)dx+q\int_{-2}^{2}xP(x)dx+r\int_{-2}^{2}P(x)dx=0$$

これが任意の実数 p，q，r について成り立つので

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-2}^{2}x^2P(x)dx=0\\ \displaystyle\int_{-2}^{2}xP(x)dx=0\\ \displaystyle\int_{-2}^{2}P(x)dx=0\end{cases}$$

ここで，

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は実数の定数で，} a\fallingdotseq 0)$$

とすると

$$\int_{-2}^{2}x^2P(x)dx=\int_{-2}^{2}x^2(ax^3+bx^2+cx+d)dx=2\cdot\left[\frac{b}{5}x^5+\frac{d}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=2\cdot\left(\frac{32}{5}b+\frac{8}{3}d\right)=0\quad\cdots①$$

$$\int_{-2}^{2}xP(x)dx=\int_{-2}^{2}x(ax^3+bx^2+cx+d)dx=2\cdot\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{c}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=2\cdot\left(\frac{32}{5}a+\frac{8}{3}c\right)=0\quad\cdots②$$

$$\int_{-2}^{2}P(x)dx=\int_{-2}^{2}(ax^3+bx^2+cx+d)dx=2\cdot\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^2$$

$$=2\cdot\left(\frac{8}{3}b+2d\right)=0\quad\cdots③$$

また，条件 (ii) より

$$P(1)=a+b+c+d=7\quad\cdots④$$

①，②，③，④ を連立して解くと

$$a=-5,\ b=0,\ c=12,\ d=0$$

ゆえに求める整式 $P(x)$ は

$$\boldsymbol{P(x)=-5x^3+12x}\qquad\text{(答)}$$

【6】$f(x)=\int_0^x (t-2)(t-4)dt$ とおくと

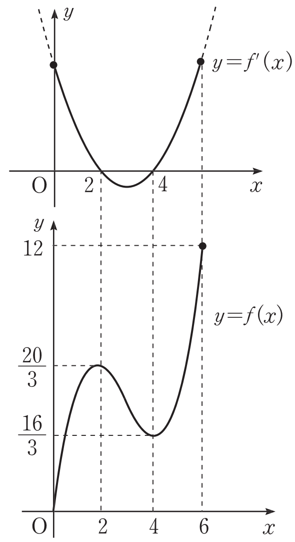
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x (t-2)(t-4)dt=(x-2)(x-4)$$

ゆえに $f(x)$ は $x=2$ で極大，$x=4$ で極小となる．ここで

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left(t^2-6t+8\right)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^x \\ &= \frac{1}{3}x^3-3x^2+8x \end{aligned}$$

であるから，$y=f'(x)$，$y=f(x)$ のグラフは右図.

また $f(x)$ の増減表は下のようになる.



x	0	……	2	……	4	……	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{20}{3}$	↘	$\frac{16}{3}$	↗	12

よって，求める最大値と最小値は，

$$\begin{cases} \textbf{最大値 12} \quad (\boldsymbol{x=6}\ \textbf{のとき}) \\ \textbf{最小値 0} \quad (\boldsymbol{x=0}\ \textbf{のとき}) \end{cases} \quad \textbf{(答)}$$

【7】(1) $f(x)=ax^2+bx+c$　($a,\ b,\ c$ は実数の定数で，$a\neq 0$) とおくと，

$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=4$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-1}^{1}=4 \qquad \therefore\ \frac{2}{3}a+2c=4 \quad \cdots ①$$

また，$\displaystyle\int_{0}^{2}f(x)dx=6$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{0}^{2}=6 \qquad \therefore\ \frac{8}{3}a+2b+2c=6 \quad \cdots ②$$

さらに，$\displaystyle\int_{-1}^{1}xf(x)dx=-\frac{4}{3}$ より

$$\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_{-1}^{1}=-\frac{4}{3} \qquad \therefore\ \frac{2}{3}b=-\frac{4}{3} \quad \cdots ③$$

①，②，③ を連立させて解くと，$a=3,\ b=-2,\ c=1$

よって

$$\boldsymbol{f(x)=3x^2-2x+1} \qquad (答)$$

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$　($a,\ b,\ c$ は実数の定数で，$a\neq 0$) とおくと

$\displaystyle\int_{0}^{2}f(x)dx=-\frac{2}{3}$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{0}^{2}=-\frac{2}{3} \qquad \therefore\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-\frac{2}{3} \quad \cdots ①$$

また，$\displaystyle\int_{0}^{2}xf(x)dx=\frac{2}{3}$ より

$$\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_{0}^{2}=\frac{2}{3} \qquad \therefore\ 4a+\frac{8}{3}b+2c=\frac{2}{3} \quad \cdots ②$$

さらに，$\displaystyle\int_{0}^{2}x^2f(x)dx=\frac{8}{5}$ より

$$\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{b}{4}x^4+\frac{c}{3}x^3\right]_{0}^{2}=\frac{8}{5} \qquad \therefore\ \frac{32}{5}a+4b+\frac{8}{3}c=\frac{8}{5} \quad \cdots ③$$

①，②，③ を連立して解くと，$a=-1,\ b=4,\ c=-3$

よって

$$\boldsymbol{f(x)=-x^2+4x-3} \qquad (答)$$

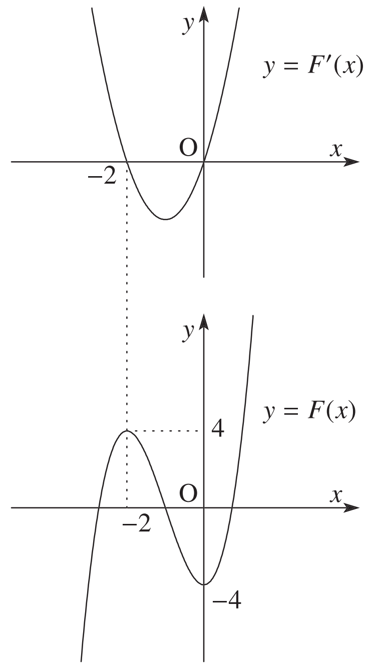
【8】(1)

$$F(x)=\int_x^{x+2}(t^3-4t)dt=\int_0^{x+2}(t^3-4t)dt+\int_x^0(t^3-4t)dt$$
$$=\int_0^{x+2}(t^3-4t)dt-\int_0^x(t^3-4t)dt$$

ここで

$$F'(x)=\left\{(x+2)^3-4(x+2)\right\}-(x^3-4x)$$
$$=6x^2+12x$$
$$=6x(x+2)$$

より，$y=F'(x)$，$y=F(x)$ のグラフは右図.
また増減表は下のようになる.



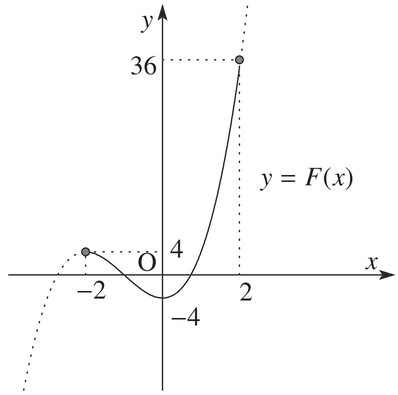
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$F(-2)=\int_{-2}^0(t^3-4t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^2\right]_{-2}^0$$
$$=-\left\{\frac{1}{4}(-2)^4-2(-2)^2\right\}=4$$
$$F(0)=\int_0^2(t^3-4t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^2\right]_0^2=-4$$

よって，極値は

$$\begin{cases}\text{極大値}\quad \mathbf{4} & (x=-2\text{ のとき})\\ \text{極小値}\quad \mathbf{-4} & (x=0\text{ のとき})\end{cases}$$ (答)

(2) (1) より，$-2 \leqq x \leqq 2$ における $y = F(x)$ のグラフは右図.



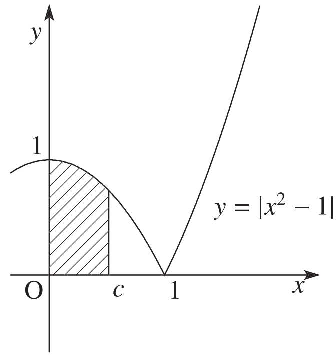
$$
\begin{aligned}
F(2) &= \int_2^4 (t^3 - 4t)dt \\
&= \left[\frac{1}{4}t^4 - 2t^2\right]_2^4 \\
&= \frac{1}{4}(4^4 - 2^4) - 2(4^2 - 2^2) \\
&= 64 - 4 - 2 \cdot 12 \\
&= 36
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{cases}
\text{最大値} & \mathbf{36} & (x = 2 \text{ のとき}) \\
\text{最小値} & \mathbf{-4} & (x = 0 \text{ のとき})
\end{cases}
$$
(答)

【9】$y=|x^2-1|$ のグラフは y 軸に関して対称であるから，$c \geqq 0$ で考えれば十分.

(i) $0 \leqq c \leqq 1$ のとき．$\displaystyle\int_0^c |x^2-1|dx$ は，右図の斜線部の面積に等しい.

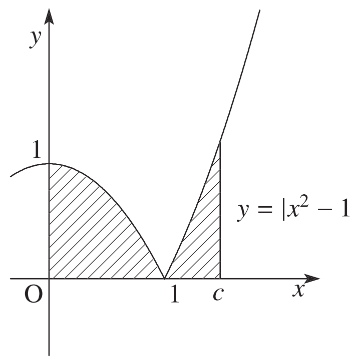


$$\int_0^c |x^2-1|dx = \int_0^c (-x^2+1)dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^c$$
$$= -\frac{1}{3}c^3+c$$

これが c に等しいから

$$-\frac{1}{3}c^3+c=c$$
$$\therefore \quad c=0$$

(ii) $1<c$ のとき．$\displaystyle\int_0^c |x^2-1|dx$ は，右図の斜線部の面積に等しい.



$$\int_0^c |x^2-1|dx$$
$$= \int_0^1 (-x^2+1)dx + \int_1^c (x^2-1)dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^c$$
$$= \frac{1}{3}c^3-c+\frac{4}{3}$$

これが c に等しいから

$$\frac{1}{3}c^3-c+\frac{4}{3}=c$$
$$c^3-6c+4=0$$
$$\therefore \quad (c-2)(c^2+2c-2)=0$$

$c>1$ に注意して

$$c=2$$

以上より，求める c の値は，$c<0$ の場合もあわせて

$c=\boldsymbol{\pm 2,\ 0}$ 　(答)

M2TK

高２難関大数学Ｋ

Z-KAI

会員番号		氏　名	