M2JCR

本科２期12月度

解答

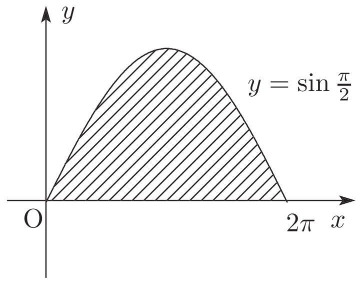
Ｚ会東大進学教室

高２東大理系数学Ⅲ導入

１１章　積分法（３）

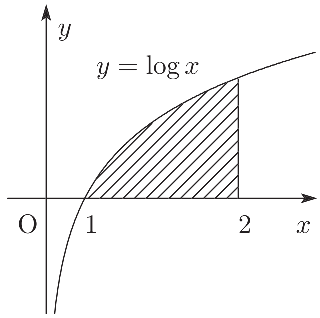
問題

【1】(1) 求める面積を S とおくと，右図から



$$S = \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} dx$$
$$= \left[-2\cos\frac{x}{2} \right]_0^{2\pi}$$
$$= 2 + 2 = 4$$

(2) 求める面積を S とおくと，右図から

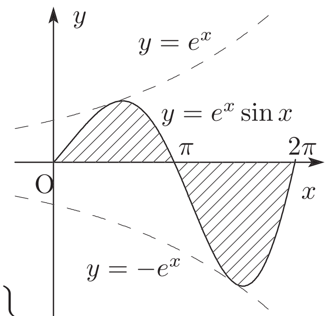


$$S = \int_1^2 \log x dx$$
$$= \Big[x \log x - x \Big]_1^2$$
$$= 2\log 2 - 2 + 1 = 2\log 2 - 1$$

(3) 求める面積を S とおくと，右下図から

$$S = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -e^x \sin x dx$$

ここで，$I(x) = \displaystyle\int e^x \sin x dx$ とおくと



$$I(x) = \int (e^x)' \sin x dx$$
$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$
$$= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx$$
$$= e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \right\}$$
$$= e^x (\sin x - \cos x) - I(x)$$

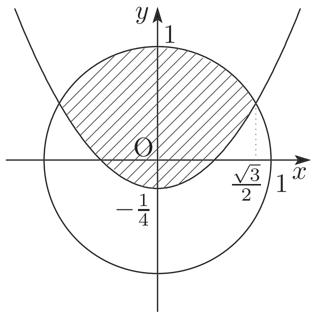
より

$$2I(x) = e^x(\sin x - \cos x) \qquad \therefore \quad I(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

よって

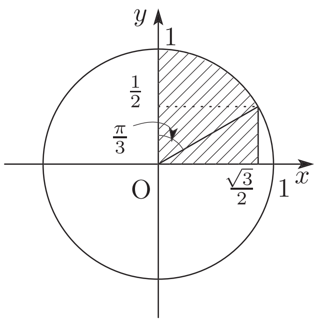
$$S = \Big[I(x) \Big]_0^{\pi} + \Big[-I(x) \Big]_{\pi}^{2\pi} = \Big[I(x) \Big]_0^{\pi} + \Big[I(x) \Big]_{2\pi}^{\pi}$$
$$= 2I(\pi) - I(0) - I(2\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} e^{\pi}(1) - \frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2} e^{2\pi}(-1)$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{2\pi} + 2e^{\pi} + 1 \right) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi} + 1 \right)^2$$

【2】求めるのは右図の斜線部の面積 S であり，y 軸に関する対称性から



$$S=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\sqrt{1-x^2}-\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\right\}dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}dx-2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}dx$ は右図の斜線部の面積に等しいから



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6}$$
$$\therefore\quad S=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}$$

≪注≫ $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}dx$ は $x=\sin\theta$ と置換して計算してもよい.

【3】(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ は単調減少な関数であるから，$n<x<n+1$ (n : 正の整数) において

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

よって，区間 $[n,\ n+1]$ で積分して

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}dx$$
$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{n+1}}<\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\frac{1}{\sqrt{n}}\quad \cdots ①$$

〔証明終〕

(2) ① の右側の不等式において，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 100$ をそれぞれ代入して辺々加えると

$$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\cdots+\int_{100}^{101}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$$
$$\int_1^{101}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<S$$
$$\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{101}<S$$
$$\therefore\quad 2(\sqrt{101}-1)<S\quad \cdots ②$$

また，① の左側の不等式において，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 99$ をそれぞれ代入して辺々加えると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}<\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\cdots+\int_{99}^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

両辺に 1 を加えると

$$S<1+\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100}$$
$$\therefore\quad S<19\quad \cdots ③$$

よって，②, ③ と $10<\sqrt{101}$ から

$$18<S<19$$

をみたすので，求める整数 k は $k=18$

【4】(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{3}{4}$ より，$f'(x)=-\dfrac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ であるから，曲線 $y=f(x)$ 上の $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=-\frac{2t}{(1+t^2)^2}(x-t)+\frac{1}{1+t^2}-\frac{3}{4}$$

これが y 軸と交わるとき $x=0$ として

$$\begin{aligned}y&=\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{1+t^2}-\frac{3}{4}\quad\cdots①\\&=\frac{3t^2+1}{(1+t^2)^2}-\frac{3}{4}\\&=\frac{-3t^4+6t^2+1}{4(1+t^2)^2}\qquad\therefore\quad g(t)=\frac{-3t^4+6t^2+1}{4(1+t^2)^2}\end{aligned}$$

(2) ① より

$$g(x)=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}+f(x)$$

であるから，$g(x)\geqq f(x)$　(等号は $x=0$ に限って成立)

よって，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と直線 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

ここで，$x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

x	$0\to\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{6}$

であるから

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sin^2\theta d\theta\quad\left(\because\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta},\ \tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos2\theta)d\theta\\&=\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\&=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

【5】(1) $0 \leqq t \leqq 1$ において，$0 \leqq t^n \leqq 1$ であるから e^{-t} (>0) をかけて

$$0 \leqq t^n e^{-t} \leqq e^{-t}$$

よって，$0 \leqq t \leqq 1$ において積分すると

$$\int_0^1 0dt \leqq \int_0^1 t^n e^{-t}dt \leqq \int_0^1 e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^1$$
$$\therefore \quad 0 \leqq \int_0^1 t^n e^{-t}dt \leqq 1 - e^{-1} \quad \cdots ①$$

〔証明終〕

(2) ①を $n!$ (>0) でわると

$$0 \leqq \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}dt \leqq \frac{1-e^{-1}}{n!}$$
$$\therefore \quad 0 \leqq a_n \leqq \frac{1-e^{-1}}{n!}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-1}}{n!} = 0$ であるから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

〔証明終〕

(3)

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 t^{n+1}e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 t^{n+1}(-e^{-t})'dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left\{\Big[t^{n+1}(-e^{-t})\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \cdot (-e^{-t})dt\right\} \quad (\because\ \text{部分積分}) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left\{-e^{-1} + (n+1)\int_0^1 t^n e^{-t}dt\right\} \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}dt - \frac{1}{(n+1)!e}
\end{aligned}$$

より

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{(n+1)!e} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \quad \cdots ②$$

〔証明終〕

(4) $n \geqq 2$ のとき，②から

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{1}{(k+1)!e}\right\} = a_1 - \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \quad \cdots ③$$

ここで

$$
\begin{aligned}
a_1 = \frac{1}{1!}\int_0^1 te^{-t}dt &= \int_0^1 t(-e^{-t})'dt \\
&= \Big[t(-e^{-t})\Big]_0^1 - \int_0^1 -e^{-t}dt \quad (\because \text{ 部分積分}) \\
&= -e^{-1} - \Big[e^{-t}\Big]_0^1 \\
&= 1 - 2e^{-1}
\end{aligned}
$$

であるから，③に代入して

$$a_n = 1 - \frac{2}{e} - \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

e 倍して

$$
\begin{aligned}
ea_n &= e - \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \\
&= e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \\
&= e - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)
\end{aligned}
$$

より

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = e(1 - a_n)$$

よって

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) &= \lim_{n\to\infty} e(1 - a_n) \\
&= e \quad \left(\because \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)
\end{aligned}
$$

となるから

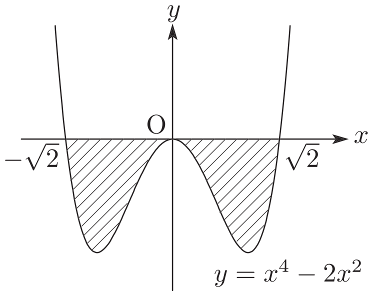
$$e = 1 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

が成立する．　〔証明終〕

添削課題

【1】(1) 求める面積を S とおくと，右図から

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -(x^4-2x^2)dx \\
&= \left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= \left(-\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \\
&= \frac{16\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}
$$

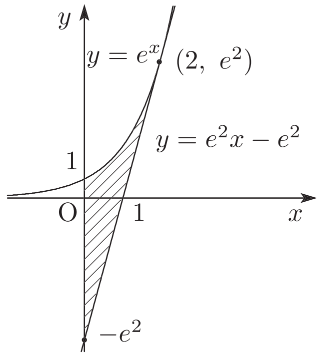


(2) $y=e^x$ のとき，$y'=e^x$ より，$(2,\ e^2)$ における接線の方程式は

$$y=e^2(x-2)+e^2=e^2x-e^2$$

よって，求める面積を S とおくと，右図から

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^2 \left\{e^x-(e^2x-e^2)\right\}dx \\
&= \left[e^x-\frac{e^2}{2}x^2+e^2x\right]_0^2 \\
&= (e^2-2e^2+2e^2)-1=e^2-1
\end{aligned}
$$



問題

【1】

C を積分定数とする.

(1)

$$\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2 dx = \int_0^1 (1-2x^{\frac{1}{2}}+x)dx = \left[x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \qquad (答)$$

(2)

$$\int \frac{1}{2-3x}dx = -\frac{1}{3}\log|2-3x| + C \qquad (答)$$

(3)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \Big[\log|x| - \log|x+1|\Big]_1^2$$
$$= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) = \log\frac{4}{3} \qquad (答)$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-x^2-9x+10}{x^2-9}dx &= \int \frac{x(x^2-9)-(x^2-9)+1}{x^2-9}dx \\ &= \int \left(x-1+\frac{1}{x^2-9}\right)dx \\ &= \int \left\{x-1+\frac{1}{(x+3)(x-3)}\right\}dx \\ &= \int \left\{x-1+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)\right\}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{6}(\log|x-3| - \log|x+3|) + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C \qquad (答)\end{aligned}$$

(5)

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-9}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-9)'}{x^2-9}dx = \frac{1}{2}\Big[\log|x^2-9|\Big]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}(\log 8 - \log 9) = \frac{1}{2}\log\frac{8}{9} \qquad (答)$$

(6)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos x - \sin^2 x(\sin x)'\}dx$$
$$= \left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{2}{3} \qquad (答)$$

(7)

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}dx = \int (\log x)^2(\log x)'dx = \frac{1}{3}(\log x)^3 + C \qquad \text{(答)}$$

(8)

$$\int_{-2}^{4}\sqrt{e^{4x+2}}dx = \int_{-2}^{4}e^{2x+1}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_{-2}^{4} = \frac{1}{2}(e^9 - e^{-3}) \qquad \text{(答)}$$

(9)

$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{-x}dx &= \int (2x+1)(-e^{-x})'dx = (2x+1)(-e^{-x}) - \int (2x+1)'(-e^{-x})dx \\ &= -(2x+1)e^{-x} + 2\int e^{-x}dx = -(2x+1)e^{-x} + 2(-e^{-x}) + C \\ &= -(2x+3)e^{-x} + C \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(10) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ とおくと

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \cos x dx = \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\cos x)'dx \\ &= -1 + \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin x)'dx \\ &= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I\end{aligned}$$

よって

$$2I = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} \qquad \therefore \quad I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2} \qquad \text{(答)}$$

(11) $\sqrt{x} - 1 = t$ とおくと，$x = (t+1)^2$ より

$$\frac{dx}{dt} = 2(t+1) \qquad \therefore \quad dx = 2(t+1)dt$$

また，$\begin{array}{c||c} x & 4 \to 9 \\ \hline t & 1 \to 2 \end{array}$ より

$$\int_4^9 \log\left(\sqrt{x} - 1\right)dx = 2\int_1^2 (t\log t + \log t)\,dt$$

ここで，C_1，C_2 を積分定数として

$$\begin{aligned}&\int t\log t dt = \frac{t^2}{2}\log t - \int \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}dt = \frac{t^2}{2}\log t - \frac{t^2}{4} + C_1 \\ &\int \log t dt = t\log t - \int dt = t\log t - t + C_2\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\text{(与式)} &= 2\left[\frac{t^2}{2}\log t - \frac{t^2}{4} + t\log t - t\right]_1^2 = \left[t^2\log t + 2t\log t - \frac{t^2}{2} - 2t\right]_1^2 \\ &= 4\log 2 + 4\log 2 - 6 + \frac{5}{2} = 8\log 2 - \frac{7}{2} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(12) $t = e^x$ とおくと

$$e^x = \frac{dt}{dx} \qquad \therefore \quad e^x dx = dt$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx &= \int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\log|t-1| - \log|t+1|\right) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(13) $x = 2\sin\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta \qquad \therefore \quad dx = 2\cos\theta d\theta$$

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

より

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2\theta)d\theta = 2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(14) $x = \tan\theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \therefore \quad dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

x	$-\sqrt{3} \to 1$
θ	$-\frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{4}$

より

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \quad \left(\because \ 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\right) \\ &= \Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{7}{12}\pi \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】

(1) (i) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi \qquad (答)$$

(ii) $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 2x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi \qquad (答)$$

(iii) $$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos 2x dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin 3x-\sin x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}=0 \qquad (答)\end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x dx&=\int_{-\pi}^{\pi}x(-\cos x)'dx=\Big[x(-\cos x)\Big]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}(x)'(-\cos x)dx\\&=\pi+\pi+\Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi}=2\pi \qquad (答)\end{aligned}$$

(v) $$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos 2x dx&=\int_{-\pi}^{\pi}x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx=\left[x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}(x)'\frac{1}{2}\sin 2x dx\\&=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=\frac{1}{4}(1-1)=0 \qquad (答)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin x+b\cos 2x-x)^2dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 2x+x^2+2ab\sin x\cos 2x-2bx\cos 2x-2ax\sin x)dx\\&=a^2\pi+b^2\pi+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi}+2ab\cdot 0-2b\cdot 0-2a\cdot 2\pi \quad (\because\ (1)\ より)\\&=\pi a^2-4\pi a+\pi b^2+\frac{2}{3}\pi^3\\&=\pi(a-2)^2+\pi b^2+\frac{2}{3}\pi^3-4\pi\end{aligned}$$

よって，S を最小とする a，b は

$$a-2=0,\ b=0 \qquad \therefore\quad a=2,\ b=0 \qquad (答)$$

【3】

(1) $\quad I_0 = \displaystyle\int_0^1 dx = \Big[x\Big]_0^1 = \mathbf{1}$ 　　(答)

(2) 部分積分を用いると

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 (1-x^2)^n dx \\
&= \int_0^1 (x)'(1-x^2)^n dx \\
&= \Big[x(1-x^2)^n\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot n(1-x^2)^{n-1}(-2x)dx \\
&= 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx \\
&= 2n\int_0^1 \left\{1-(1-x^2)\right\}(1-x^2)^{n-1}dx \\
&= 2n\int_0^1 \left\{(1-x^2)^{n-1}-(1-x^2)^n\right\}dx \\
&= 2n(I_{n-1}-I_n)
\end{aligned}
$$

より

$$
(2n+1)I_n = 2nI_{n-1} \qquad \therefore \quad I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} \quad (n \geqq 1) \qquad \text{(答)}
$$

(3) $n \geqq 1$ のとき，(2) の等式を繰り返し使うと

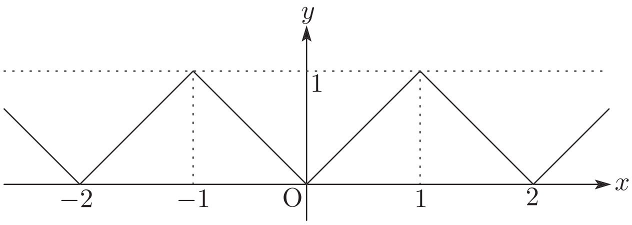
$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} \\
&= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}I_{n-2} \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}I_0 \\
&= \frac{2n\cdot 2(n-1)\cdot\cdots\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot\cdots\cdot 3} \quad (\because\ (1)\ \text{より，}\ I_0 = 1) \\
&= \frac{\left\{2n\cdot 2(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\right\}^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (\text{これは，}\ n=0\ \text{でも成立する.}) \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【4】

(1) $-1 \leqq x \leqq 1$ において

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ x & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

であり，$f(x)$ は周期 2 の周期関数であることから，$y = f(x)$ のグラフは下図.



(答)

(2) $f(x) = \begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ -(x-2) & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$ より

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 e^{-x} f(x)dx \\
=&\int_0^1 xe^{-x}dx - \int_1^2 (x-2)e^{-x}dx \\
=&\int_0^1 x(-e^{-x})'dx - \int_1^2 (x-2)(-e^{-x})'dx \\
=&\Big[x(-e^{-x})\Big]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})dx - \left\{\Big[(x-2)(-e^{-x})\Big]_1^2 - \int_1^2 (-e^{-x})dx\right\} \\
=&-e^{-1} - \Big[e^{-x}\Big]_0^1 - \left\{-e^{-1} - \Big[e^{-x}\Big]_1^2\right\} \\
=&-e^{-1} - (e^{-1} - 1) - \left\{-e^{-1} - (e^{-2} - e^{-1})\right\} \\
=&1 - 2e^{-1} + e^{-2} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2 \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3) $x - 2k = t$ とおくと，$dx = dt$ であり，$\begin{array}{c||c} x & 2k \to 2k+2 \\ \hline t & 0 \to \ \ 2 \end{array}$ より

$$\begin{aligned}
\int_{2k}^{2k+2} e^{-x} f(x)dt &= \int_0^2 e^{-t-2k} f(t+2k)dt \\
&= \int_0^2 e^{-t-2k} f(t)dt \quad (\because \text{ 周期 2 より，} f(t+2k) = f(t)) \\
&= e^{-2k} \int_0^2 e^{-t} f(t)dt \\
&= e^{-2k}\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2 \quad (\because \ (2) \text{ より}) \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(4) $I_n = \int_0^{2n} ne^{-nx} f(nx)dx$ とおく.

ここで，$nx = u$ とおくと，$ndx = du$ であり，$\begin{array}{c||c} x & 0 \to \ 2n \\ \hline u & 0 \to 2n^2 \end{array}$ より

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2n^2} e^{-u} f(u)du = \sum_{k=0}^{n^2-1} \int_{2k}^{2k+2} e^{-u} f(u)du \\ &= \sum_{k=0}^{n^2-1} e^{-2k} \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2 \quad (\because\ (3) \text{ より}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2 \sum_{k=0}^{n^2-1} (e^{-2})^k = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2 \cdot \frac{1 - (e^{-2})^{n^2}}{1 - e^{-2}} \end{aligned}$$

$0 < e^{-2} < 1$ より，$\lim_{n \to \infty} (e^{-2})^{n^2} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} I_n &= \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - e^{-2}} \\ &= \frac{(e-1)^2}{e^2} \cdot \frac{e^2}{e^2 - 1} \\ &= \frac{e-1}{e+1} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

添削課題

【1】

(1)

$$\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\dfrac{dt}{dx}} = \frac{1}{(\tan\frac{x}{2})'}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{1+t^2} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと，(1)，(2) より

$$\int\frac{5}{3\sin x+4\cos x}dx = \int\frac{5}{3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+4\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int\frac{5}{3t+2-2t^2}dt$$

$$= \int\frac{5}{(2t+1)(2-t)}dt$$

$$= \int\left(\frac{2}{2t+1}+\frac{1}{2-t}\right)dt$$

$$= \log|2t+1| - \log|2-t| + C$$

$$= \log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{2-\tan\frac{x}{2}}\right| + C \ (C \text{ は積分定数}) \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

$\therefore$　(ア)$\cdots x^4$　(答),　(イ)$\cdots \frac{1}{5}$　(答)

(2) $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx=\Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1\\&=2(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

$\therefore$　(ウ)$\cdots \frac{1}{\sqrt{1+x}}$　(答),　(エ)$\cdots 2(\sqrt{2}-1)$　(答)

【2】

(1) 曲線 $y=(2-x)\sqrt{x-1}$ $(x \geqq 1)$ と x 軸は $x=1$ と $x=2$ において交わり

$$\begin{cases}1\leqq x\leqq 2 \text{ のとき, } y\geqq 0\\ 2\leqq x \text{ のとき, } y\leqq 0\end{cases}$$

よって，曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_1^2(2-x)\sqrt{x-1}\,dx$$

ここで，$\sqrt{x-1}=t$ とおくと，$x=t^2+1$ であるから

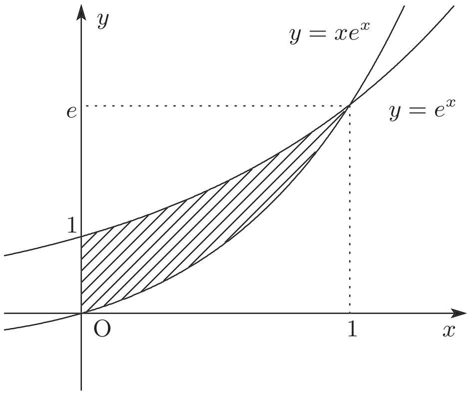
$$dx=2tdt,$$

x	$1\to 2$
t	$0\to 1$

よって

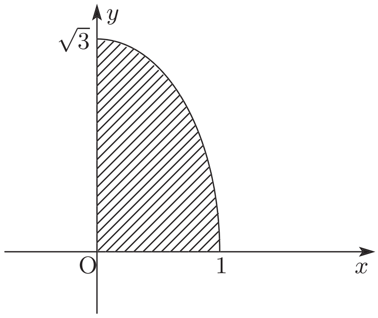
$$S=\int_0^1(1-t^2)t\cdot 2t\,dt=2\int_0^1(t^2-t^4)\,dt=2\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right]_0^1=\frac{4}{15}$$　(答)

(2) 右図の斜線部分の面積が求めるものであるから



$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 (e^x - xe^x)\,dx\\
=&\int_0^1 (1-x)(e^x)'\,dx\\
=&\Big[(1-x)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 (-1)e^x\,dx\\
=&-1+\Big[e^x\Big]_0^1\\
=&e-2 \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(3) 楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ の第 1 象限部分は右図のようになり



$$y=\sqrt{3(1-x^2)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

と表せるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^1 \sqrt{3(1-x^2)}\,dx$$

ここで，$x=\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$dx=\cos\theta d\theta,$$

x	$0 \to\ 1$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$

より

$$
\begin{aligned}
S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta\\
&=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta\\
&=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

≪注≫ 同様にして，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0)$ の第 1 象限部分と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{ab}{4}\pi$ となる．よって，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の囲む面積は

$$4\times\frac{ab}{4}\pi=\pi ab$$

である．

【3】

(1) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a (e^x - 1)\,dx = \Big[e^x - x\Big]_0^a = \boldsymbol{e^a - a - 1}$　　(答)

(2) $y = e^x - 1$ を x について解いて，$x = \log(y+1)$ より

$$g(y) = \log(y+1) \qquad \therefore \quad g(x) = \log(x+1)$$

よって

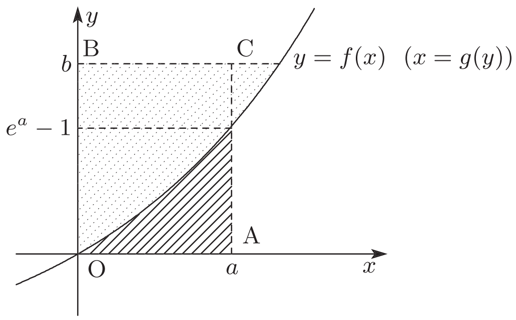
$$\int_0^b g(x)\,dx = \int_0^b \log(x+1)\,dx = \Big[(x+1)\log(x+1) - (x+1)\Big]_0^b$$
$$= \boldsymbol{(b+1)\log(b+1) - b} \quad (答)$$

(3)　(i) $b \geqq e^a - 1$ のとき

$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ は右図の斜線部分，

$\displaystyle\int_0^b g(x)\,dx$ は右図の打点部分

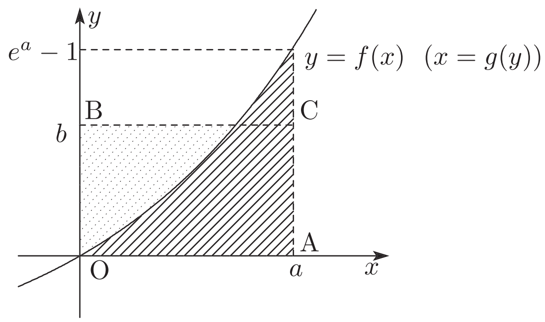
の面積を表し，これらの和は図の長方形 OACB の面積以上である．



(ii) $b \leqq e^a - 1$ のとき

同様にして下図から，$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_0^b g(x)\,dx$

の和は長方形 OACB の面積以上となる．



以上 (i)，(ii) から

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(x)dx \geqq ab$$
$$(e^a - a - 1) + (b+1)\log(b+1) - b \geqq ab \quad (\because (1)(2))$$
$$e^a - ab + (b+1)\log(b+1) \geqq a + b + 1$$

が成立する．また，等号は点 C が $y = f(x)$ 上にくるとき，すなわち

$$b = e^a - 1$$

のとき成立する．　　（証明終）

【4】

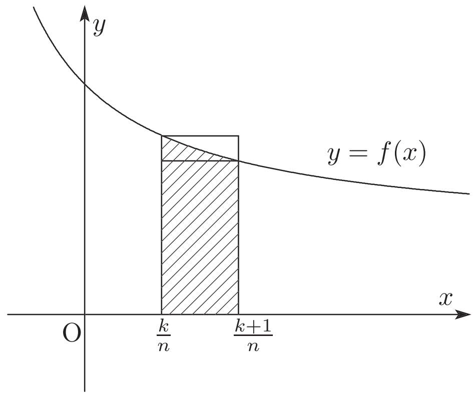
(1)

$$\begin{aligned}
S_n &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=T_n
\end{aligned}$$

よって，$S_n=T_n$ $(n=1,\,2,\,\cdots)$ が成立する．　　　　（証明終）

≪注≫ 数学的帰納法を用いて証明してもよい．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ $(x>-1)$ とおくと，$f(x)$ は単調減少なので



$\dfrac{k}{n}<x<\dfrac{k+1}{n}$ (n：自然数，k：0 以上の変数) において

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)<f(x)<f\left(\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つから，この区間で積分すると

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dx<\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx<\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx$$

$$\frac{1}{1+\dfrac{k+1}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{dx}{1+x}<\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+k+1}<\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{dx}{1+x}<\frac{1}{n+k}\cdots①$$

よって，①において，各辺の $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ のときの和を考えると

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$< \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$< \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$\therefore \quad T_n < \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < T_n + \frac{1}{2n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

（証明終）

(3) (1)，(2) より

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2n} < S_n < \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$
$$\therefore \quad \log 2 - \frac{1}{2n} < S_n < \log 2$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\log 2 - \frac{1}{2n}\right) = \log 2$ より，はさみうちの原理によって

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \mathbf{log\,2} \qquad \text{(答)}$$

≪注≫ 本問から以下が証明されたことになる．

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots = \log 2$$

添削課題

【1】

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x} = -\log|1-x| + C$（$C$ は積分定数）　　(答)

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - (1+x) = \dfrac{1-(1-x^2)}{1-x} = \dfrac{x^2}{1-x} \geqq 0 \\ 1+2x - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{(1+2x)(1-x)-1}{1-x} = \dfrac{x(1-2x)}{1-x} \geqq 0 \end{cases}$$

より，$1+x \leqq \dfrac{1}{1-x} \leqq 1+2x \quad \cdots$ ① が成立する.　　（証明終）

(3) 区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ において ① を積分すると

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)dx \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x} \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} (1+2x)dx$$

$$\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \leqq \Big[-\log|1-x|\Big]_0^{\frac{1}{2}} \leqq \Big[x + x^2\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \leqq -\log\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{8} \leqq \log 2 \leqq \frac{3}{4}$$

（証明終）

M2JCR

高２東大理系数学Ⅲ導入

Z-KAI

会員番号		氏　名	