M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

本科 2 期 12 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

２４章－１　入試問題研究（１）

問題

【1】(1)　$x^2+y^2+z^2=xyz$

を z について整理すると

$$z^2-xy\cdot z+(x^2+y^2)=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

これを z の 2 次方程式とみると，実数 z が存在するためには，判別式の条件より

$$(xy)^2-4(x^2+y^2)>0 \qquad \therefore\quad x^2(y^2-4)>4y^2$$

ここで，(右辺) >0 より

$$y^2-4>0 \qquad \therefore\quad y^2>4$$

さらに，y は $y\leqq 3$ の整数であるから

$$y=3 \quad \cdots\cdots①$$

のみが条件をみたす．

よって，$(*)$ に $y=3$ を代入すると

$$z^2-3xz+(x^2+9)=0 \quad \cdots\cdots(**)$$

再び，判別式の条件より

$$9x^2-4(x^2+9)>0 \qquad \therefore\quad x^2>\frac{36}{5}$$

さらに，x は $x\leqq y=3$ の整数であるから

$$x=3 \quad \cdots\cdots②$$

のみが条件をみたす．

よって，$(**)$ に $x=3$ を代入すると

$$z^2-9z+18=0$$

$$\therefore\quad (z-3)(z-6)=0$$

$$\therefore\quad z=3,\ 6 \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③ より

$$(x,\ y,\ z)=\mathbf{(3,\ 3,\ 3),\ (3,\ 3,\ 6)} \qquad \text{(答)}$$

(2)　正の整数 a，b，c が

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=abc & \cdots\cdots(\star) \\ a\leqq b\leqq c & \cdots\cdots(\star\star) \end{cases}$$

をみたすとき

$$\begin{cases} b^2+c^2+z^2=bcz & \cdots\cdots(\star)' \\ b\leqq c\leqq z & \cdots\cdots(\star\star)' \end{cases}$$

となる実数 z を考える．

$(\star)$，$(\star)'$ より

$$z^2-a^2=bcz-abc$$

$$\therefore\quad (z+a)(z-a)-bc(z-a)=0$$

$$\therefore\quad (z-a)(z+a-bc)=0$$

ここで

$$z=bc-a$$

とすると，a，b，c は整数より，z は整数であり

$$z-c=(bc-a)-c$$

$$= (b-1)c-a$$
$$\geqq (a-1)c-c \qquad (\because \quad (\star\star))$$
$$= (a-2)c$$

(1) より，$a=1,\ 2$ では条件 (A) をみたさないので，$a \geqq 3$ のみ条件 (A) をみたし，$3 \leqq a \leqq b \leqq c$ より

$z-c>0 \qquad \therefore \quad c<z \quad \cdots\cdots④$

となり，$(\star\star)'$ をみたす．

よって，$(b,\ c,\ z)$ (ただし，$z=bc-a$) は条件 (A) をみたす．　〔証明終〕

(3) 条件 (A) をみたす正の整数の組 $(x_n,\ y_n,\ z_n)$ $(n=1,2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ について

$$x_1=y_1=z_1=3, \qquad \begin{cases} x_{n+1}=y_n \\ y_{n+1}=z_n \\ z_{n+1}=y_nz_n-x_n \end{cases}$$

とすると，$(x_1,\ y_1,\ z_1)$ は条件 (A) をみたす．

さらに

$(x_n,\ y_n,\ z_n)$ が条件 (A) をみたす

ならば，(2) より

$(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})$ も条件 (A) をみたす

また，④ より，$z_n<z_{n+1}$ であるから

$(x_n,\ y_n,\ z_n) \neq (x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})$

である．

よって，帰納的に条件 (A) をみたす組 $(x_n,\ y_n,\ z_n)$ は無数に存在する．〔証明終〕

【2】(1)　これらを 3 で割った余りをそれぞれ r_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とすると，$0 \leqq r_i \leqq 2$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ である．

ここで，r_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は 3 つの値しかとらないので，

$r_k=r_j \quad (k,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ k \neq j)$

となる $k,\ j$ が存在する．このとき，

$a_k=3m_k+r_k, \quad a_j=3m_j+r_j \qquad (m_k,\ m_j:\text{整数})$

と表されるので，

$$a_k-a_j=(3m_k+r_k)-(3m_j+r_j)$$
$$=3(m_k-m_j) \quad (\because \quad r_k=r_j)$$

となるので，$a_k,\ a_j$ をとれば，その差が 3 の倍数となり，題意を満たす．〔証明終〕

(2)　a_k を次のような整数とする．

$$a_k=\underbrace{33\cdots\cdots3}_{k\text{ 個}}\underbrace{0\cdots\cdots0}_{n+1-k\text{ 個}} \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

このとき，$i<j$ ならば $a_i<a_j$ となる．

a_k を n で割った商を q_k，余りを r_k とおくと，r_k は $0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ の n 個の値をとる．ここで，$r_k=0$ となる k が存在すれば，a_k は $n+1$ 桁の整数であるから，題意を満たす整数が存在する．

さらに，$r_k=0$ となる k が存在しなければ，r_k は $1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ の $n-1$ 個

の値をとり，k は 1, 2, $\cdots$, n の n 個の値をとるので，

$r_i = r_j$

となる i, j $(1 \leqq i < j \leqq n)$ が存在する．ここで，$a_j - a_i$ (> 0) を考えると，

$a_j - a_i = n(q_j - q_i) \quad (\because \ r_i = r_j)$

となり，n の倍数で，

$$\begin{aligned} a_j - a_i &= \underbrace{33\cdots\cdots3}_{j\text{ 個}}0\cdots\cdots0 - \underbrace{33\cdots\cdots3}_{i\text{ 個}}0\cdots\cdots0 \\ &= \underbrace{33\cdots\cdots3}_{j-i\text{ 個}}\underbrace{0\cdots\cdots0}_{n+1-j\text{ 個}} \end{aligned}$$

となり，$n+1-i$ 桁の整数となる．

したがって，n の倍数であり，$n+1$ 桁を超えない $33\cdots30\cdots0$ と表される整数が存在する．　　〔証明終〕

【3】(1) $m = 0$ のとき，題意が成り立つ．

$m = k$ のとき，題意が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} \boxed{3^{k+1}} &= \frac{1}{9}\left(10^{3^{k+1}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{9}\left\{\left(10^{3^k}\right)^3 - 1\right\} \\ &= \frac{1}{9}\left(10^{3^k} - 1\right)\left\{\left(10^{3^k}\right)^2 + 10^{3^k} + 1\right\} \\ &= \boxed{3^k}\left\{\left(10^{3^k}\right)^2 + 10^{3^k} + 1\right\} \end{aligned}$$

において，$\left(10^{3^k}\right)^2 + 10^{3^k} + 1$ は 3 で割り切れるが，3^2 では割り切れないから，

$\boxed{3^{k+1}}$ は 3^{k+1} で割り切れ，3^{k+2} では割り切れない．よって題意は示された．

〔証明終〕

(2)（ア）n が 27 で割り切れるとき

l を整数として $n = 27l$ と表せる．このとき

$$\begin{aligned} \boxed{27l} &= \frac{1}{9}\left(10^{27l} - 1\right) \\ &= \frac{1}{9}\left\{\left(10^{3^3}\right)^l - 1\right\} \\ &= \frac{1}{9}\left(10^{3^3} - 1\right)\left\{(10^{3^3})^{l-1} + (10^{3^3})^{l-2} + \cdots + 1\right\} \\ &= \boxed{3^3}\left\{(10^{3^3})^{l-1} + (10^{3^3})^{l-2} + \cdots + 1\right\} \qquad \cdots\cdots① \end{aligned}$$

(1) より，$\boxed{3^3}$ は 3^3 すなわち 27 で割り切れるから，①は 27 で割り切れる．

（イ）$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるとき

$$\begin{aligned} \boxed{n} &= \frac{10^n - 1}{9} \\ &= \frac{10-1}{9}\left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 1\right) \\ &= 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 1 \end{aligned}$$

は 9 で割り切れるから，n は 9 で割り切れる．すなわち j を整数として $n = 9j$

と表せる．このとき

$$\boxed{n} = \boxed{9j}$$
$$= \frac{1}{9}\left(10^{9j} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left\{\left(10^{3^2}\right)^j - 1\right\}$$
$$= \frac{1}{9}\left(10^{3^2} - 1\right)\left\{(10^{3^2})^{j-1} + (10^{3^2})^{j-2} + \cdots + 1\right\}$$
$$= \boxed{3^2}\left\{(10^{3^2})^{j-1} + (10^{3^2})^{j-2} + \cdots + 1\right\}$$

において，$\boxed{3^2}$ は 3^2 で割り切れるが，3^3 では割り切れない．よって $(10^{3^2})^{j-1} + (10^{3^2})^{j-2} + \cdots + 1$ が 3 で割り切れるので，j は 3 で割り切れる．よって $n = 9j$ は 27 で割り切れる．

（ア）（イ）より，題意は示された．　　〔証明終〕

【4】(1) 条件として与えられた 2 式の辺々を加えた

$$f(p) + f(q) = q + p \Longleftrightarrow f(p) + f(q) - (p + q) = 0$$

の左辺は，p と q の対称式であるから，基本対称式 $p+q$，pq で表すことが出来る．実際

$$ap(1-p) + aq(1-q) = q + p \Longleftrightarrow a(p+q) - a\left(p^2 + q^2\right) = p + q. \quad \cdots ①$$

また，辺々を引いて出来る式

$$f(p) - f(q) = q - p \Longleftrightarrow f(p) - f(q) + (p - q) = 0$$

の左辺は，p と q の交換によって，符号だけを変える (このような式を『交代式』と言う)．実際

$$ap(1-p) - aq(1-q) + (p-q) = 0 \Longleftrightarrow a(p-q) - a(p+q)(p-q) + (p-q) = 0$$

この式で，題意より $p \fallingdotseq q$ であるから，両辺を $p - q (\fallingdotseq 0)$ で割って

$$a - a(p+q) + 1 = 0, \quad \therefore\ a(p+q) = a + 1$$

これを①に代入する．$p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq$ を用いて

$$a + 1 - a\left\{\left(\frac{a+1}{a}\right)^2 - 2pq\right\} = \frac{a+1}{a}$$
$$\Longleftrightarrow 2apq = 1 + \frac{1}{a} - (a+1) + a\left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 = 2 + \frac{2}{a},$$
$$\therefore pq = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

以上より，p と q は

$$p + q = 1 + \frac{1}{a}, \quad pq = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

をみたすから，t に関する 2 次方程式

$$t^2 - \left(1 + \frac{1}{a}\right)t + \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 0$$

の 2 解である．p と q が異なる実数であるから，この 2 次方程式の判別式を D とし

て，$D>0$ になる．

$$D=\left(1+\frac{1}{a}\right)^2-4\cdot\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{a}\right)>0$$
$$\Longleftrightarrow\left(1+\frac{1}{a}\right)\left\{\left(1+\frac{1}{a}\right)-\frac{4}{a}\right\}>0$$
$$\Longleftrightarrow\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{3}{a}\right)>0$$

両辺に $a^2(>0)$ をかけて

$(a+1)(a-3)>0,\quad \therefore \boldsymbol{a<-1,\ 3<a}$ (答)

(2) $f(x)=ax(1-x)$ について $f(x)-x=g(x)$ と置くと，

$f(x)=g(x)+x$

であるから，

$$\begin{aligned}f_2(x)-x&=f(f(x))-x\\&=f\left(g(x)+x\right)-x\\&=a\left\{x+g(x)\right\}\left\{-g(x)-x+1\right\}-x\\&=ag(x)\left\{-g(x)-2x+1\right\}+ax(1-x)-x\\&=g(x)\left[-a\left\{g(x)+2x-1\right\}+1\right]\\&\qquad(\because\ ax(1-x)-x=f(x)-x)\\&=g(x)\left[-a\left\{f(x)+x-1\right\}+1\right]\end{aligned}$$

従って，$f_2(x)-x=f(f(x))-x$ は $g(x)$ つまり $f(x)-x$ で割り切られる：

$f(x)-x\,\big|\,f(f(x))-x$ ［証明終］

(3) $f(x)-x$ を 0 として，方程式 $f(x)-x=0$ を考える．

$f(x)-x=0\Longleftrightarrow ax(1-x)-x=0,\quad\therefore\quad x=0,\ 1-\dfrac{1}{a}$

この方程式が (i) 重解をもたない場合，(ii) 重解をもつ場合，で場合を分ける．

(i) $f(x)-x=0$ が重解をもたない場合，すなわち，$a\fallingdotseq 1$ の場合．

$f(x)-x=0$ の解を $0=\alpha,\ 1-\dfrac{1}{a}=\beta$ と表すと，

$f(\alpha)-\alpha=0,\quad f(\beta)-\beta=0,\quad\therefore\quad f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta$ (#)

が成り立つ．

定義より

$f_2(x)-x=f(f(x))-x$

であるから，(#) により

$f(f(\alpha))-\alpha=f(\alpha)-\alpha=0,\quad f(f(\beta))-\beta=f(\beta)-\beta=0.$

また，同様に (#) を繰り返し用いれば

$f_3(\alpha)-\alpha=f(f(f(\alpha)))-\alpha=f(f(\alpha))-\alpha=f(\alpha)-\alpha=0$

となる．$f_3(\beta)-\beta=0$ も同様に示される．

これをくり返すと，

$f_n(\alpha)-\alpha=0,\ f_n(\beta)-\beta=0$

が成り立つ．よって，$f_n(x)-x$ は $x-\alpha=x$ 及び $x-\beta=x-\left(1-\dfrac{1}{a}\right)$ で割り切れる．

これら 2 つの式は互いに素であるから，$f_n(x)-x$ はこの積

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x\left\{x-\left(1-\frac{1}{a}\right)\right\}=\frac{1}{a}x(ax-a+1)$$

で割り切られる．ここで

$$f(x)-x=ax(1-x)-x=-x(ax-a+1)$$

であるから，$f(x)-x=-a(x-\alpha)(x-\beta)$ である．よって確かに任意の正整数 n について，$f_n(x)-x$ は $f(x)-x$ で割り切られる：

$$f(x)-x \,\Big|\, f_n(x)-x.$$

(ii) $f(x)-x=0$ が重解をもつ場合, すなわち $a=1$ の場合を考える．$f(x)-x=0$ が重解をもつとき，それは 0 である．

題意が成り立つには，$f_n(x)-x$ が x で 2 回割れることが必要かつ十分である．そこで x^2 を因数にもつことを示す．

まず，$f_n(0)-0$ が 0 である，すなわち $f_n(x)-x$ が x を因数にもつことを示す．

$f(0)=0$ だから,

$$\begin{aligned}
&f_2(0)=f(f(0))=f(0)=0,\\
&f_3(0)=f(f(f(0)))=f(f(0))=f(0)=0,\\
&\qquad\vdots\\
&f_n(0)=0
\end{aligned}$$

である．よって，$f_n(x)-x$ は x を因数にもつので,

$$f_n(x)-x=x\left(\frac{f_n(x)}{x}-1\right)$$

と変形できる．従って，題意の成立には

$$\frac{f_n(x)}{x}-1$$

が x でもう一度割れること，つまり x を因数にもつこと，が必要かつ十分である．

これを示すために,

$f_n(x)$ の最低次の項が $+x$ であること $\cdots\cdots(\dagger)$

を示す.

- $n=1$ のとき $f_1(x)=x-x^2$ より成り立つ.
- $n=k$ のとき，$f_k(x)$ の最低次の項が $+x$ であると仮定すると，$g(x)$ を最低次の項が 2 次以上の整式として

  $$f_k(x)=g(x)+x$$

  と表せる.

  $n=k+1$ のとき,

  $$\begin{aligned}
  f_{k+1}(x)&=f(f_k(x))\\
  &=f(g(x)+x)\\
  &=\{g(x)+x\}\{1-g(x)-x\}\\
  &=h(x)+x \qquad (h(x)\text{ は最低次が 2 次以上の整式})
  \end{aligned}$$

と表すことができ，このときも成り立つ．

従って，すべての自然数 n に対して $(\dagger)$ が成り立つことが示された．

以上より，題意は示された．　　　[証明終]

２４章－２　定積分（２）

問題

【1】(1) $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ だから $0<y<1$ より $y \fallingdotseq 1$ に注意すると

$$e^x=\frac{y}{1-y}$$

両辺 e を底とする対数をとると

$$x=\log\frac{y}{1-y}$$

よって

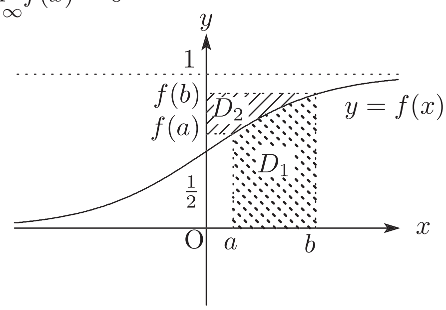
$$y=g(x)=\boldsymbol{\log\frac{x}{1-x}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x)^2}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

$$f(0)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=1,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

より, グラフは右図の実線部であり,



$0\leqq a\leqq b$ のとき, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は D_1 の面積, $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx$ は D_2 の面積を表す.

また, $bf(b)-af(a)$ は D_1 と D_2 の面積の和に等しいから

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

$a,\ b$ が負の場合も $a,\ b$ が正になるように平行移動して示される.　〔証明終〕

【2】(1) $I=\displaystyle\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx$ とすると, $\pi-x=t$ と置換したとき, $dx=-dt$ だから

$$I=\int_\pi^0\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(\pi-t)(-dt)$$

$$=-\int_0^\pi\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-t)dt$$

$$=-\int_0^\pi\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(t)dt=-I$$

よって $I=0$ となり示された.　〔証明終〕

(2) $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$ とおくと, $f(x)$ は連続関数で

$$f(\pi-x)=\frac{\sin^3(\pi-x)}{4-\cos^2(\pi-x)}=\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}=f(x)$$

をみたすから,(1) より

$$\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx=0$$

$$\therefore\quad \int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$$

ここで $\cos x=s$ とおくと, $ds=-\sin x\ dx$ であり, $x:0\to\pi$ のとき, $s:1\to -1$ だから

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2 x}{4-\cos^2 x}\cdot\sin x\ dx\\
=&\int_1^{-1}\frac{1-s^2}{4-s^2}(-ds)=2\int_0^1\frac{1-s^2}{4-s^2}ds\\
=&2\int_0^1\left(1-\frac{3}{4-s^2}\right)ds\\
=&2\left\{\int_0^1 ds-\frac{3}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2+s}+\frac{1}{2-s}\right)ds\right\}\\
=&2\left(\Big[s\Big]_0^1-\frac{3}{4}\Big[\log|2+s|-\log|2-s|\Big]_0^1\right)\\
=&2\left(1-\frac{3}{4}\log 3\right)\end{aligned}$$

よって求める定積分は

$$\boldsymbol{\pi\left(1-\frac{3}{4}\log 3\right)}\qquad \text{(答)}$$

【3】

$$\cos(x-t)=\cos x\cos t+\sin x\sin t$$

だから，与式は

$$f_n(x)=\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t f_{n-1}(t)dt+\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t f_{n-1}(t)dt$$

と変形できる．ここで

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t f_{n-1}(t)dt\quad\cdots\cdots①\qquad b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t f_{n-1}(t)dt\quad\cdots\cdots②$$

とおくと,

$$f_n(x)=a_n\cos x+b_n\sin x\qquad (n\geqq 1)\quad\cdots\cdots③$$

と表せる．

$n\geqq 2$ のとき，③ を ① に代入して

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(a_{n-1}\cos t+b_{n-1}\sin t)dt\\
&=a_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt+b_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2t}{2}dt\\
&=a_{n-1}\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+b_{n-1}\left[-\frac{\cos 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{\pi}{4}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}\qquad (n\geqq 2)\end{aligned}$$

次に，③ を ② に代入して，同様に計算すると

$$b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{\pi}{4}b_{n-1}\qquad (n\geqq 2)$$

以上より

$$a_n=\frac{\pi}{4}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1},\qquad b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{\pi}{4}b_{n-1}$$

ここで,

$$a_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt=1,\quad b_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt=1$$

よって

$$\begin{aligned}a_n+b_n&=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}+b_{n-1})=(a_1+b_1)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\a_n-b_n&=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-b_{n-1})=(a_1-b_1)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad a_n=b_n=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad(n\geqq 1)$$

これを ③ に代入して,

$$f_n(x)=\boldsymbol{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\cos x+\sin x)}\qquad(n\geqq 1)\qquad(\text{答})$$

【4】

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx$$

であり, $\dfrac{k-1}{2n}\pi\leqq x\leqq\dfrac{k}{2n}\pi$ において

$$\frac{\sin^2 nx}{1+\frac{k}{2n}\pi}\leqq\frac{\sin^2 nx}{1+x}\leqq\frac{\sin^2 nx}{1+\frac{k-1}{2n}\pi}$$

だから

$$\begin{aligned}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin^2 nx dx&=\frac{1}{2}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}(1-\cos 2nx)dx\\&=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\\&=\frac{\pi}{4n}\end{aligned}$$

より

$$\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{2n}\pi}\leqq\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx\leqq\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k-1}{2n}\pi}$$

ここで各辺 $k=1$ から n まで和をとると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{2n}\pi}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k-1}{2n}\pi}$$

そして

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{2n}\pi}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k-1}{2n}\pi}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2}x} dx \\
&= \left[\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\pi}{2}x \right) \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned}
$$

だから，はさみうちの原理より

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{1+x} dx = \boldsymbol{\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)} \qquad \text{(答)}
$$

添削課題

【1】$f''(x)=e^x>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは下に凸である．

これより，$\dfrac{k}{n} \leqq x \leqq \dfrac{k+1}{n}$ のとき

$$f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x-\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right) \leqq f(x)$$

$$\leqq \frac{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Longleftrightarrow e^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right) \leqq f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right) \leqq ne^{\frac{k}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\left(x-\frac{k}{n}\right)$$

であるから

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)dx \leqq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left\{f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}dx$$

$$\leqq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} ne^{\frac{k}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\left(x-\frac{k}{n}\right)dx$$

ここで

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)dx = e^{\frac{k}{n}}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} = \frac{1}{2n^2}e^{\frac{k}{n}}$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} ne^{\frac{k}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\left(x-\frac{k}{n}\right)dx = \frac{1}{2n}e^{\frac{k}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

であるから

$$\frac{1}{2n^2}e^{\frac{k}{n}} \leqq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left\{f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}dx \leqq \frac{1}{2n}e^{\frac{k}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \quad (k=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,n-1)$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}e^{\frac{k}{n}} \leqq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left\{f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}dx \leqq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n}e^{\frac{k}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}} \leqq \int_0^1 f(x)dx-K_n \leqq \frac{1}{2n}\cdot n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}n^{k-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}} \leqq n^k\left\{\int_0^1 f(x)dx-K_n\right\} \leqq \frac{1}{2}n^{k-1}\cdot n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 e^x dx = e-1, \quad \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$$

より，$\dfrac{1}{2}n^{k-1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}$, $\dfrac{1}{2}n^{k-1}\cdot n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}$ はともに，$k>1$ のとき $+\infty$ に発散，$k=1$ のとき $\dfrac{1}{2}(e-1)$ に収束するから，求める最大の自然数 k は

$k=\mathbf{1}$　　(答)

そのときの極限値は，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} n^k \left\{ \int_0^1 f(x)dx - K_n \right\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(e-1)} \qquad \text{(答)}$$

２５章－１　入試問題研究（２）

問題

【1】（１）$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ に $x=6n$ を代入すると

$$y=\frac{1}{3}\cdot(6n)^2+\frac{1}{2}\cdot 6n=12n^2+3n$$

よって，n を整数とすると $(6n,\ 12n^2+3n)$ は $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上の格子点である．すべての整数 n に対してこれは成立するので $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上には無限個の格子点が存在する．［証明終］

（２）$y=ax^2+bx$ のグラフ上に，$(0,\ 0)$ でない 2 つの異なる格子点 $(l_1,\ m_1)$，$(l_2,\ m_2)$ が存在するとき

$$\begin{cases} m_1=a{l_1}^2+bl_1 \\ m_2=a{l_2}^2+bl_2 \end{cases}$$

$l_1\fallingdotseq 0$，$l_2\fallingdotseq 0$，$l_1\fallingdotseq l_2$ より

$$a=\frac{m_1l_2-m_2l_1}{l_1l_2(l_1-l_2)},\ b=\frac{m_2{l_1}^2-m_1{l_2}^2}{l_1l_2(l_1-l_2)}$$

よって，a，b はともに有理数であり，整数 p，q_1，q_2 $(p\fallingdotseq 0)$ を用いて

$$a=\frac{q_1}{p},\ b=\frac{q_2}{p}$$

とおける．

そこで，$y=\dfrac{q_1}{p}x^2+\dfrac{q_2}{p}x$ に $x=pk$ を代入すると

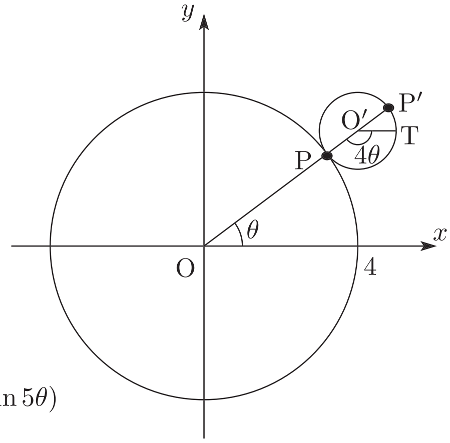
$$\begin{aligned} y&=\frac{q_1}{p}\cdot(pk)^2+\frac{q_2}{p}\cdot pk \\ &=pq_1k^2+q_2k \end{aligned}$$

よって，k を整数とすると $(pk,\ pq_1k^2+q_2k)$ は $y=ax^2+bx$ 上の格子点である．$p\fallingdotseq 0$ より $\{pk\,|\,k$ は整数$\}$ は無限集合となるので，$y=ax^2+bx$ のグラフ上に，点 $(0,\ 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば，無限個存在する．［証明終］

【2】(1) C_0 の中心を原点 O にとり，C 上の点 T は最初 (4,0) にあるとする．

C が C_0 上を転がるとき,C と C_0 が接する点を P とする．また,C の中心を O$'$ とする．また，直線 OP と C の交点のうち P でない方を P$'$ とする．

このとき，OO$'$ と x 軸のなす角を θ とすると，$\angle \mathrm{OO'T} = 4\theta$ となる．C は 4 周するが，対称性から，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を考えて，4 倍すればよい．



$\overrightarrow{\mathrm{O'P'}} = (\cos\theta, \sin\theta)$ を $\pi + 4\theta$ 回転すると，$\overrightarrow{\mathrm{O'T}}$ となるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{O'T}} &= (\cos(\pi+5\theta), \sin(\pi+5\theta))\\ &= (-\cos 5\theta, -\sin 5\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OT}} &= \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'T}}\\ &= (5\cos\theta - \cos 5\theta, 5\sin\theta - \sin 5\theta)\end{aligned}$$

ここで,

$$x = 5\cos\theta - \cos 5\theta, \quad y = 5\sin\theta - \sin 5\theta$$

とすると,

$$\frac{dx}{d\theta} = -5\sin\theta + 5\sin 5\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 5\cos\theta - 5\cos 5\theta$$

だから，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $-\sin\theta + \sin 5\theta = 0$ を満たす θ を α, $\cos\theta - \cos 5\theta = 0$ を満たす θ を β とすると，x, y の増減は右のようになる．

	0		α		β		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
x		$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	
y		$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$	

そして,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \quad \cos 5\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin 5\theta$$

だから，T の軌跡は $y = x$ に関して対称であるので $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ で考えて 8 倍すればよい．このとき，T の軌跡と x 軸，$y = x$ に囲まれた部分の面積は，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，P$'\left(\dfrac{6}{\sqrt{2}}, \dfrac{6}{\sqrt{2}}\right)$ だから

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{6}{\sqrt{2}}} x\,dy - \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{2}}\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\frac{dy}{d\theta}d\theta - 9\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5\cos\theta - \cos 5\theta)\cdot(5\cos\theta - 5\cos 5\theta)d\theta - 9\\ =5&\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5\cos^2\theta - 6\cos\theta\cdot\cos 5\theta + \cos^2 5\theta)d\theta - 9\\ =5&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{5\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 3(\cos 6\theta + \cos 4\theta) + \frac{1+\cos 10\theta}{2}\right\}d\theta - 9\end{aligned}$$

$$=5\left[\frac{5}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)-3\left(\frac{1}{6}\sin 6\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)+\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{10}\sin 10\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-9$$
$$=5\left\{\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-3\left(\frac{1}{6}\sin\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\sin\pi\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{10}\sin\frac{5}{2}\pi\right)\right\}-9$$
$$=\frac{15}{4}\pi+9-9$$
$$=\frac{15}{4}\pi$$

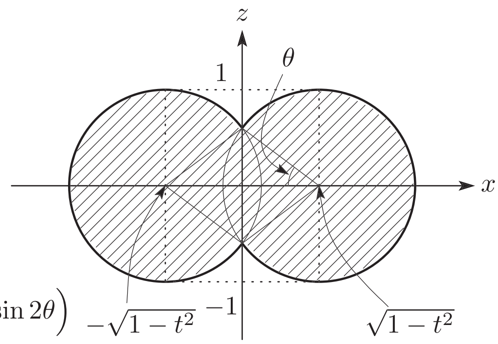
そして，これを 8 倍し，円の面積を引くと，

$$30\pi-16\pi$$
$$=\mathbf{14\pi}\quad(\text{答})$$

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ で考えて 8 倍すればよい．

$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$$
$$=40\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{(-\sin\theta+\sin 5\theta)^2+(\cos\theta-\cos 5\theta)^2}d\theta$$
$$=40\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2(\sin\theta\sin 5\theta+\cos\theta\cos 5\theta)}d\theta$$
$$=40\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos 4\theta}d\theta$$
$$=40\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-(1-2\sin^2 2\theta)}d\theta$$
$$=80\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin 2\theta|d\theta$$
$$=80\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\text{のとき，}\sin 2\theta\geqq 0\text{ より}\right)$$
$$=\mathbf{40}\quad(\text{答})$$

【3】通過する部分は xz 平面に関して対称であるから，$y \geqq 0$ の部分について考える．平面 $y=t$ (ただし，$0 \leqq t \leqq 1$) における断面は図のようになる．θ を図のようにとると



$$\cos\theta = \sqrt{1-t^2} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

であり，断面積 S は

$$S = 2\left(\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{2\pi - 2\theta}{2\pi} + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 2\theta\right)$$
$$= 2(\pi - \theta + \sin\theta\cos\theta)$$

したがって，求める体積を V とすると

$$\frac{V}{2} = \int_0^1 2(\pi - \theta + \sin\theta\cos\theta)dy$$

であり，$\cos\theta = \sqrt{1-y^2}$ すなわち $y = \sin\theta$ であるから

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta, \qquad \begin{array}{c|ccc} y & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

より

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - \theta + \sin\theta\cos\theta)\cos\theta d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - \theta)\cos\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin\theta d\theta$$
$$= \Big[(\pi - \theta)\sin\theta - \cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad V = \boldsymbol{2\pi + \frac{16}{3}} \qquad \text{(答)}$$

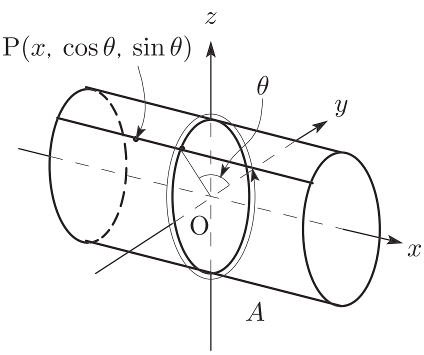
【4】点 (0, 1, 0) より，正の方向に中心角 θ (ただし，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$) をもつ点を通る柱面 A 上にあり，x 軸と平行な直線上の任意の点 P の座標は

P $(x,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$

と表される．P が柱面 B 上にあるためには

$$x^2-\sqrt{3}x\sin\theta+\sin^2\theta-\frac{1}{4}=0$$

であり，これを x について解くと



$$x=\frac{\sqrt{3}\sin\theta\pm\sqrt{3\sin^2\theta-4\cdot\left(\sin^2\theta-\frac{1}{4}\right)}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\theta\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2}=\frac{\sqrt{3}\sin\theta\pm\cos\theta}{2}=\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{6}\right)\qquad(\text{複号同順})$$

いま，yz 平面上の円 $y^2+z^2=1$ の中心角 θ に対する弧の長さが θ に対応する．

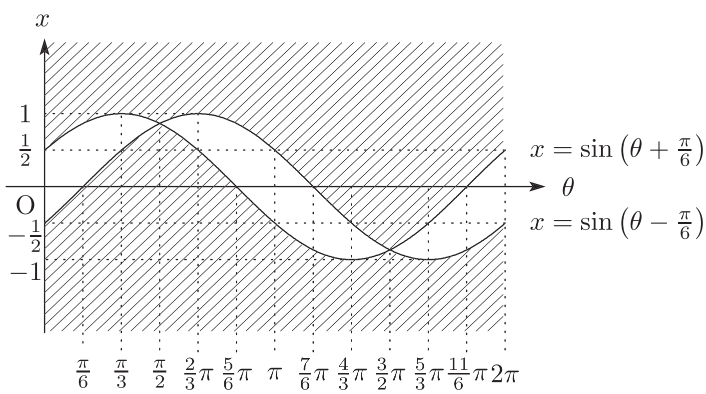
P が B の周上および外部にあるときを考えればよく，C の展開図は θx 平面上の不等式

$$x^2-\sqrt{3}x\sin\theta+\sin^2\theta-\frac{1}{4}\geqq 0$$

$$\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq 2\pi\ \text{のとき} & x\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right),\ \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq x\\ \dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi\ \text{のとき} & x\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right),\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq x\end{cases}$$

をみたす領域である．これを図示すると，図の斜線部分である (ただし，境界を含む)．

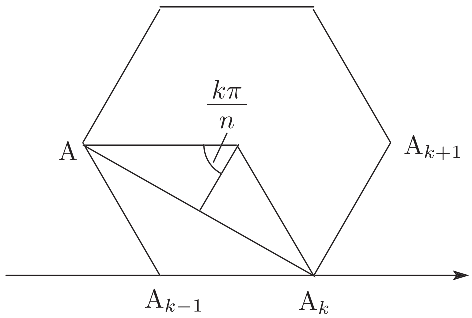
(答)



問題

【1】(1) 正 n 角形の頂点に $\mathrm{A}=\mathrm{A}_0$ として A から順に反時計回りに A_0，A_1，$\cdots\cdots$，A_{n-1}，$\mathrm{A}_n(=\mathrm{A}_0)$ と名前をつける．

$\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k$ が x 軸上にある状態から $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ が x 軸上にある状態になる回転を k 番目の回転とする．



k 番目の回転では A は A_k を中心として回転し，その時描く円弧の半径は

$$\mathrm{AA}_k=2\sin\frac{k\pi}{n}$$

である．

また，中心角は正 n 角形の 1 つの外角の大きさ $\dfrac{2\pi}{n}$ に等しいので，円弧の長さは

$$\mathrm{AA}_k\times\frac{2\pi}{n}=\frac{4\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

となる．

よって

$$L(n)=\frac{4\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

であり

$$\begin{aligned}L(6)&=\frac{2\pi}{3}\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2}{6}\pi+\sin\frac{3}{6}\pi+\sin\frac{4}{6}\pi+\sin\frac{5}{6}\pi\right)\\&=\boldsymbol{\frac{2(2+\sqrt{3})}{3}\pi}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}L(n)&=\lim_{n\to\infty}4\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\\&=4\int_0^{\pi}\sin x\,dx\\&=4\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}\\&=\mathbf{8}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【2】$0 < k \leqq n$ の自然数 k に対して，

$$k-1 \leqq x \leqq k, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x^2+y^2 \leqq n^2$$

をみたす正方形の数を S_k とする．

このとき

$$\sqrt{n^2-k^2}-1 \leqq S_k \leqq \sqrt{n^2-k^2}$$

であり，対称性を考えると

$$N(n) = 4\sum_{k=1}^{n} S_k$$

だから

$$\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2-k^2}-1) \leqq \frac{N(n)}{n^2} \leqq \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2-k^2}-1) &= \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2} - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}1 \\ &= \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} - \frac{4}{n}\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} &= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \\ &= 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2-k^2}-1) = \pi, \ \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2} = \pi$$

だから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n^2} = \boldsymbol{\pi} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\frac{k}{n}} \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^2 \\ &= \mathbf{log\,2} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $a > 0$ より

$$\frac{1}{a+k} < \frac{1}{k}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k} < \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = \log 2 \cdots\cdots ①$$

また，a の整数部分を m とすると，$a < m+1$ だから

$$\therefore \quad \frac{1}{m+1+k} < \frac{1}{a+k}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{m+1+k} < \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{a+k}$$

ここで，

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{m+1+k} = \sum_{l=m+1+n}^{m+1+2n} \frac{1}{l}$$

$$= \sum_{l=n}^{2n} \frac{1}{l} - \sum_{l=n}^{m+n} \frac{1}{l} + \sum_{l=2n+1}^{m+1+2n} \frac{1}{l} \cdots\cdots ②$$

$\displaystyle\sum_{l=n}^{m+n} \frac{1}{l}$，$\displaystyle\sum_{l=2n+1}^{m+1+2n} \frac{1}{l}$ はいずれも $n \to \infty$ で 0 に収束し，$\displaystyle\sum_{l=n}^{2n} \frac{1}{l}$ は (1) より $\log 2$ に収束するから②より

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{m+1+k} = \log 2$$

に収束する．

よって，①より，はさみうちの原理より，$\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{a+k}$ は (1) と同じ極限値をもつ．

〔証明終〕

【4】

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\frac{k}{2n}\right)^{100}$$

とすると

$$S_n = \sum_{l=1}^{n} \left\{-\left(\frac{2l-1}{2n}\right)^{100} + \left(\frac{2l}{2n}\right)^{100}\right\}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{(2l)^{100} - (2l-1)^{100}}{(2n)^{100}}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{\{2l-(2l-1)\}\{(2l)^{99} + (2l)^{98}(2l-1) + \cdots\cdots + (2l-1)^{99}\}}{(2n)^{100}}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{(2l)^{99} + (2l)^{98}(2l-1) + \cdots\cdots + (2l-1)^{99}}{(2n)^{100}}$$

であり

$$S_n \leqq \sum_{l=1}^{n} \frac{(2l)^{99} + (2l)^{99} + \cdots\cdots + (2l)^{99}}{(2n)^{100}}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{100(2l)^{99}}{(2n)^{100}}$$

$$= 50 \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^{99}$$

また

$$
\begin{aligned}
S_n &\geqq \sum_{l=1}^{n} \frac{(2l-1)^{99}+(2l-1)^{99}+\cdots\cdots+(2l-1)^{99}}{(2n)^{100}} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{100(2l-1)^{99}}{(2n)^{100}} \\
&= 50\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2l-1}{2n}\right)^{99} \\
&\geqq 50\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2l-2}{2n}\right)^{99} \\
&= 50\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{l-1}{n}\right)^{99}
\end{aligned}
$$

だから

$$
50\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{l-1}{n}\right)^{99} \leqq S_n \leqq 50\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{l}{n}\right)^{99}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&50\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{l-1}{n}\right)^{99} \leqq \lim_{n\to\infty} S_n \leqq 50\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{l}{n}\right)^{99} \\
&\iff \quad 50\int_0^1 x^{99}dx \leqq \lim_{n\to\infty} S_n \leqq 50\int_0^1 x^{99}dx
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\int_0^1 x^{99}dx = \left[\frac{1}{100}x^{100}\right]_0^1 = \frac{1}{100}
$$

だから

$$
50\cdot\frac{1}{100} \leqq \lim_{n\to\infty} S_n \leqq 50\cdot\frac{1}{100}
$$

よって，はさみうちの原理より

$$
\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad (\text{答})
$$

添削課題

【1】$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AD}=3,\ \angle\mathrm{DAB}=90^\circ$ から

$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{D}(0,\ 3,\ 0)$

となるように直交座標系をとることができる．

C の座標を

$\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$　(ただし，$c \geqq 0$)

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\angle\mathrm{BAC}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=1\cdot2\cdot\cos60^\circ \qquad \therefore\quad a=1$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\cos\angle\mathrm{CAD}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ \qquad \therefore\quad 3b=3 \qquad \therefore\quad b=1$$

さらに

$\mathrm{AC}^2=a^2+b^2+c^2=4$

より

$c=\sqrt{2}$

したがって

$\mathrm{C}(1,\ 1,\ \sqrt{2})$

次に，$\mathrm{E}(p,\ q,\ r)$ とおいて，$\mathrm{AE}=\mathrm{BE}=\mathrm{CE}=\mathrm{DE}$ より

$$p^2+q^2+r^2=(p-1)^2+q^2+r^2=(p-1)^2+(q-1)^2+(r-\sqrt{2})^2=p^2+(q-3)^2+r^2$$

を解いて

$$p=\frac{1}{2},\ q=\frac{3}{2},\ r=0 \qquad \therefore\quad \mathrm{E}\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 0\right)$$

よって

$$\mathrm{AE}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+0^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

２６章－１　入試問題研究（３）

問題

【1】次数が n 以上である整式 $P(x)$ に対して，命題

「$(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数である」

を A_k とおき，すべての正の整数 k に対して A_k が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する．

(I) $P(x)$ を x^{n+1} で割った商を $Q(x)$ とおくと

$$P(x) = x^{n+1}Q(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

とおくことができて

$$(1+x)\,P(x) = (1+x)\,x^{n+1}Q(x) + a_n x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(a_k + a_{k-1})\,x^k + a_0$$

となる．$(1+x)\,x^{n+1}Q(x) + a_n x^{n+1}$ の各項の次数はすべて n よりも大きいから，$(1+x)\,P(x)$ の n 次以下の項の係数は，それぞれ

$a_n + a_{n-1}$，$a_{n-1} + a_{n-2}$，$\cdots$，，$a_1 + a_0$，a_0

である．

したがって，これらがすべて整数ならば，

a_0，a_1，$\cdots$，a_n

はすべて整数であるから，A_1 は成り立つ．

(II) 正の整数 m に対して，A_m が成り立つと仮定する．このとき

$(1+x)^{m+1}\,P(x) = (1+x)^m\,\{(1+x)\,P(x)\}$

と表せて，$(1+x)\,P(x)$ は次数が n 以上の整式であるから，$(1+x)^{m+1}\,P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，仮定より，$(1+x)\,P(x)$ の n 次以下の項の係数もすべて整数である．よって，(I) より，$P(x)$ の n 次以下の項の係数もすべて整数である．すなわち，A_{m+1} も成り立つ．

(I), (II) より，A_k はすべての正の整数 k に対して成り立つ．すなわち，整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数である．

〔証明終〕

【2】(1) 実数 a, b において

$$\max\{a,\ b\} = \begin{cases} a & (a \geqq b \text{ のとき}) \\ b & (a < b \text{ のとき}) \end{cases}, \quad \min\{a,\ b\} = \begin{cases} b & (a \geqq b \text{ のとき}) \\ a & (a < b \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表すと

$b_n = \max\{a_{2n},\ a_{2n+1}\}$

である．

(i) $a_{2n} \geqq a_{2n+1}$ のとき

$b_n = a_{2n}$

$b_{n+1}=\max\{a_{2n+2},\ a_{2n+3}\}$

である．

ここで

$$a_{2n+2}=|a_{2n+1}-a_{2n}|=a_{2n}-a_{2n+1}$$
$$<a_{2n} \qquad (\because \quad a_{2n+1}>0)$$
$$a_{2n+3}=|a_{2n+2}-a_{2n+1}|=\max\{a_{2n+2},\ a_{2n+1}\}-\min\{a_{2n+2},\ a_{2n+1}\}$$
$$<\max\{a_{2n+2},\ a_{2n+1}\} \qquad (\because \quad a_{2n+2}>0,\ a_{2n+1}>0)$$
$$<a_{2n}$$

したがって　$b_{n+1}<b_n$

(ii) $a_{2n}<a_{2n+1}$ のとき

$b_n=a_{2n+1}$

$b_{n+1}=\max\{a_{2n+2},\ a_{2n+3}\}$

である．

ここで

$$a_{2n+2}=|a_{2n+1}-a_{2n}|=a_{2n+1}-a_{2n}$$
$$<a_{2n+1} \qquad (\because \quad a_{2n}>0)$$
$$a_{2n+3}=|a_{2n+2}-a_{2n+1}|=|(a_{2n+1}-a_{2n})-a_{2n+1}|=a_{2n}$$
$$<a_{2n+1}$$

したがって　$b_{n+1}<b_n$

よって

$b_n>b_{n+1}$　〔証明終〕

(2) 条件より，$a_n \geqq 0$ である．

ここで，$a_n=0$ となる n が存在しないと仮定すると，$a_n>0$ であり，したがって，$b_n>0$ である．

数列 $\{b_n\}$ は整数値をとり，かつ，$b_n>b_{n+1}$ であることから

$b_n<0$

となるときが存在する．

しかし，これは，$b_n>0$ であることに矛盾する．

よって，$a_n=0$ をみたす n が存在する．　〔証明終〕

【3】(1)　(i) $n=2$ のとき

$$b_2-2\cdot 2=\frac{1}{a_2}-4=\frac{(1+a_1)^2}{a_1}-4=\frac{1}{2}>0$$

より成立.

(ii) $n=k\ (>1)$ において

$b_k>2k\ (>0)$　$\cdots\cdots$①

が成立すると仮定すると

$$b_{k+1}-2(k+1)=\frac{1}{a_{k+1}}-2(k+1)$$
$$=\frac{(1+a_k)^2}{a_k}-2(k+1)$$

$$= a_k + \frac{1}{a_k} + 2 - 2(k+1)$$

$$= \frac{1}{b_k} + b_k - 2k$$

$$> \frac{1}{b_k} \qquad (\because \ ①)$$

$$> 0 \qquad (\because \ ①)$$

となり，$n = k+1$ においても成立する．

以上より，数学的帰納法により，$n > 1$ のとき

$b_n > 2n$　〔証明終〕

(2) (1) より

$$b_n > 2n \qquad \therefore \ 0 < a_n < \frac{1}{2n}$$

であるから

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n)$$

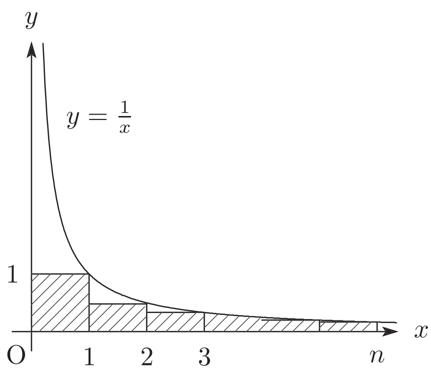
$$< \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n}\left\{1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$< \frac{1}{2n}\left(1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2n}\left(1 + \Big[\log x\Big]_1^n\right)$$

$$= \frac{1}{2n}(1 + \log n)$$



したがって

$$0 < \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n) < \frac{1}{2n}(1 + \log n)$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}(1 + \log n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\log n}{n}\right) = 0 \qquad \left(\because \ \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0\right)$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n) = \mathbf{0} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(1+a_n)^2}{a_n}$$

$$\therefore \ b_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 2 + a_n = b_n + 2 + a_n$$

$$\therefore \ a_k = (b_{k+1} - b_k) - 2$$

であるから，$k = 1$ から $k = n$ までの和をとると

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) - \sum_{k=1}^{n} 2$$

$$= b_{n+1} - b_1 - 2n$$

$$= b_{n+1} - 2 - 2n \qquad \left(\because \ b_1 = \frac{1}{a_1} = 2\right)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{b_{n+1}}{n} - \frac{2}{n} - 2$$

(2) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_{n+1}}{n} - \frac{2}{n} - 2\right) = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{n} = 2$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} na_{n+1} = \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

したがって

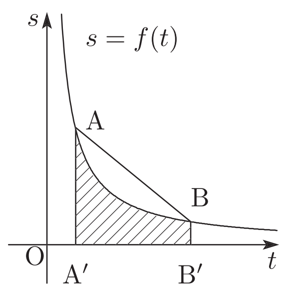
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} na_n &= \lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot na_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot na_{n+1} \\ &= 1\cdot\frac{1}{2} \qquad (\because \ ②) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【4】(1) $f(t) = \dfrac{1}{t}$ とおくと，$t > 0$ において

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$$

$$f''(t) = \frac{2}{t^3} > 0$$

よって，$f(t)$ は $t > 0$ において減少し，ts 平面上で $s = f(t)$ のグラフは下に凸である．よって，図のように 4 点



$\mathrm{A}\,(a-x,\ f(a-x))$，　$\mathrm{A}'\,(a-x,\ 0)$，　$\mathrm{B}\,(a+x,\ f(a+x))$，　$\mathrm{B}'\,(a+x,\ 0)$

を定めると

$$\int_{a-x}^{a+x} f(t)\,dt = \text{（上図の斜線部分の面積）}$$

$$x\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right) = \text{（台形 AA}'\text{B}'\text{B の面積）}$$

であるから，不等式

$$\int_{a-x}^{a+x} f(t)dt < x\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

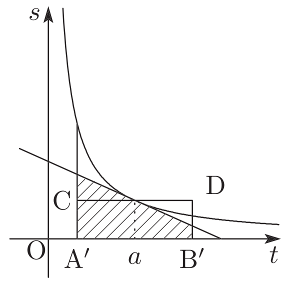
が成り立つ．

また，次ページの図のように

$\mathrm{C}\,(a-x,\ f(a))$，　$\mathrm{D}\,(a+x,\ f(a))$

を定めると，

$$\frac{2x}{a} = (\text{長方形 CA}'\text{B}'\text{D の面積})$$



であり，$s=f(t)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線上に 1 辺をもつ右図の斜線部分の台形の面積を S とすると，S は長方形 $\mathrm{CA'B'D}$ の面積に等しいから

$$S=\frac{2x}{a}$$

となる．よって

$$S<\int_{a-x}^{a+x} f(t)\,dt$$

であるから，不等式

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x} f(t)\,dt \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

①，②より，$0<x<a$ をみたす実数 x，a に対して，不等式

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right) \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ． 〔証明終〕

(2) $\log 2=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{t}\,dt$ であるから，

$$\log 2=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt+\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}\,dt \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．

ここで，③ において，$a=\dfrac{5}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とおくと

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}<\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+1\right)$$

$$\therefore\quad \frac{2}{5}<\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt<\frac{5}{12} \quad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．また，$a=\dfrac{7}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とおくと

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}<\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{2}{7}<\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}\,dt<\frac{7}{24} \quad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つ．④，⑤，⑥ より

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{7}<\log 2<\frac{5}{12}+\frac{7}{24}$$

$$\therefore\quad \frac{24}{35}<\log 2<\frac{17}{24}$$

が成り立つ．

ここで

$$\frac{24}{35}=0.685\cdots,\quad \frac{17}{24}=0.708\cdots$$

であるから，不等式

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

が成り立つ．〔証明終〕

問題

【1】$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\right)$ より

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

$$=2\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$$

$$=\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|\right)^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$$

であるから，問題の等式は

$$\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|\right)^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2c$$

$$\iff\quad \mathrm{PA}+\mathrm{PB}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+2c}$$

と同値である．よって，求める軌跡は，**点 A, B を焦点とし，長軸の長さが $\boldsymbol{\sqrt{\mathrm{AB}^2+2c}}$ の楕円**である．　　(答)

【2】(1) $a\geqq 0,\ b\geqq 0$ として, P, Q は $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$, $\mathrm{Q}(-b\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と表せる．

ここで $\mathrm{M}(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{a-b}{2}\cos\theta$$

$$Y=\frac{a+b}{2}\sin\theta$$

と表せて, これらと

$$\mathrm{PQ}^2=(a+b)^2\cos^2\theta+(a-b)^2\sin^2\theta=4$$

から, $a,\ b$ を消去すると

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}Y^2+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}X^2=1$$

そして, $a\geqq 0,\ b\geqq 0$ より

$$a=\frac{X}{\cos\theta}+\frac{Y}{\sin\theta}\geqq 0,$$

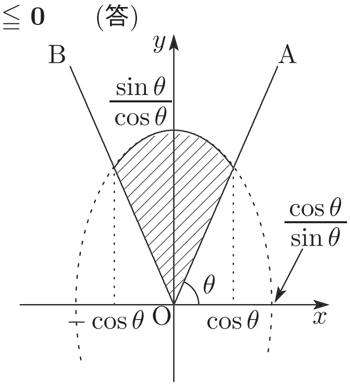
$$b=\frac{Y}{\sin\theta}-\frac{X}{\cos\theta}\geqq 0$$

だから C は

$$\boldsymbol{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}x^2+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}y^2=1,}$$

$$\boldsymbol{\frac{x}{\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}\geqq 0,\quad \frac{x}{\cos\theta}-\frac{y}{\sin\theta}\leqq 0}\qquad \text{(答)}$$

(2) 問題の領域は右図のようになる．



ここでこの領域を x 軸方向に $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 倍, y 軸方向に $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ 倍拡大した領域 D を考えると, D は

$$x^2+y^2\leqq 1,$$

$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}\geqq 0,\quad \frac{x}{\sin\theta}-\frac{y}{\cos\theta}\leqq 0$$

であり, $\dfrac{x}{\sin\theta}-\dfrac{y}{\cos\theta}=0$ より

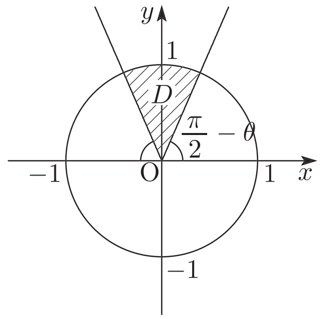
$$y=\frac{1}{\tan\theta}x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)x$$

となるから, D は右図のようになり, この面積は

$$\frac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta=\theta$$

だから, 求める面積は

$$\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\boldsymbol{\theta}\qquad\text{(答)}$$



【3】(1) 与えられた楕円を C とする.

P は

$$\mathrm{P}\ (a\cos\theta,\ b\sin\theta)\quad\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$$

と表せるから, $l,\ m$ は

$$l:\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

$$m:\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=0$$

と表せる. m の方程式は

$$y=-\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x$$

と変形できるから, これと C の方程式より

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{b^2}x^2=1$$

$$\therefore\quad x^2=a^2\sin^2\theta$$

$a>0,\ \sin\theta>0,\ (\mathrm{A}$ の x 座標$)>0$ に注意すると

$$x=a\sin\theta$$

よって

$$y=-b\cos\theta$$

だから

$$\mathrm{A}\ (a\sin\theta,\ -b\cos\theta)$$

これより

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{PB}&=2\triangle\mathrm{OAP}\\&=2\cdot\frac{1}{2}\left|a\sin\theta\cdot b\sin\theta-a\cos\theta\cdot(-b\cos\theta)\right|\\&=ab\qquad\text{〔証明終〕}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{F}\ (\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ だから, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{PF}&=\sqrt{(a\cos\theta-c)^2+(b\sin\theta)^2}\\&=\sqrt{a^2\cos^2\theta-2ac\cos\theta+(a^2-b^2)+b^2\sin^2\theta}\\&=\sqrt{(a^2-b^2)\cos^2\theta-2ac\cos\theta+a^2}\\&=\sqrt{(c\cos\theta-a)^2}=\left|c\cos\theta-a\right|\\&=a-c\cos\theta\end{aligned}$$

そして

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PC} : \mathrm{CF} &= \triangle\,\mathrm{OAP} : \triangle\,\mathrm{OFA} \\
&= \frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}c(-b\cos\theta) \\
&= a : (-c\cos\theta)
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PC} &= \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PC}+\mathrm{CF}}\cdot\mathrm{PF} \\
&= \frac{a}{a-c\cos\theta}(a-c\cos\theta) \\
&= a \qquad \text{〔証明終〕}
\end{aligned}
$$

M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA
選抜東大・医学部理系数学
東大理系数学ⅠＡⅡＢ
東大理系数学Ⅲ
東大理系数学
難関大理系数学Ｔ

Z-KAI

会員番号		氏　名	