M3JSB/M3JB/M3TB

本科 2 期 12 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大クラス文系数学

東大文系数学

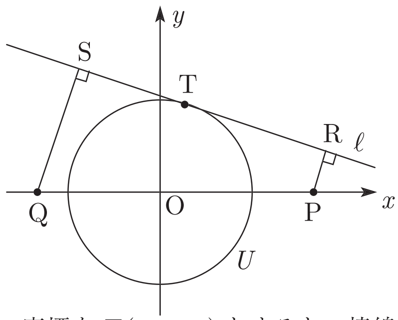
難関大文系数学 T

２４章　図形（２）

問題

【1】与えられた単位円を $U : x^2 + y^2 = 1$ とする.

図 1



(1) ℓ と U との接点 T の座標を $\mathrm{T}(x_1,\ y_1)$ とすると，接線 ℓ の方程式は

$\ell\ :\ x_1x + y_1y = 1$

である．ここで，点 $\mathrm{T}\,(x_1, y_1)$ は，単位円 U 上にあるから,

$x_1{}^2 + y_1{}^2 = 1\ \cdots\cdots\cdots①$

が成り立つ.

点と直線との距離公式から，①によって

$$\mathrm{PR} = \mathrm{dist}\,(\mathrm{P},\ \ell) = \frac{|px_1 - 1|}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}} = |px_1 - 1|$$

$$\mathrm{QS} = \mathrm{dist}\,(\mathrm{Q},\ \ell) = \frac{|-qx_1 - 1|}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}} = |-qx_1 - 1|$$

最小にしたい $\mathrm{PR}^2 + \mathrm{QS}^2$ について,

$$\begin{aligned}\mathrm{PR}^2 + \mathrm{QS}^2 &= \left(|px_1 - 1|\right)^2 + \left(|-qx - 1|\right)^2\\ &= (p^2 + q^2)x_1{}^2 - 2(p - q)x_1 + 2\\ &= (p^2 + q^2)\left(x_1 - \frac{p - q}{p^2 + q^2}\right)^2 + \frac{(p + q)^2}{p^2 + q^2}\end{aligned}$$

ここで,

$$0 < \frac{p - q}{p^2 + q^2} < \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} < 1 \qquad (\because 1 < q < p)$$

である.

①より，$-1 \leqq x_1 \leqq 1$ であるから，$x_1 = \dfrac{p - q}{p^2 + q^2}$ のとき，$\mathrm{PR}^2 + \mathrm{QS}^2$ は最小値 $\dfrac{(p + q)^2}{p^2 + q^2}$ をとる.

以上より

$$\min\left(\mathrm{PR}^2 + \mathrm{QS}^2\right) = \frac{(p + q)^2}{p^2 + q^2} \quad \left(\text{ただし } x_1 = \frac{p - q}{p^2 + q^2}\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) での考察から

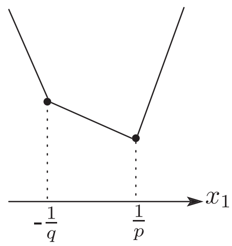
$\mathrm{PR} = |px_1 - 1|,\ \mathrm{QS} = |-qx_1 - 1| = |qx_1 + 1|$

である．従って

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PR}+\mathrm{QS} &= |px_1-1|+|qx_1+1| \\
&= \begin{cases} -(p+q)x_1 & \left(x_1 \leqq -\dfrac{1}{q}\right) \\ -(p-q)x_1+2 & \left(-\dfrac{1}{q} \leqq x_1 \leqq \dfrac{1}{p}\right) \\ (p+q)x_1 & \left(\dfrac{1}{p} \leqq x_1\right) \end{cases}
\end{aligned}
$$

これを グラフ に表せば，図 2 のようになる．

図 2



この グラフ から $x_1=\dfrac{1}{p}$ で $\mathrm{PR}+\mathrm{QS}$ は最小となる．

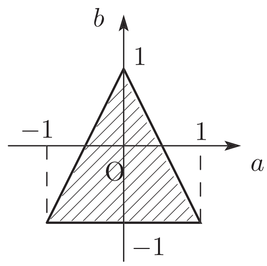
このとき, $y_1=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{p^2}}$ となるから, 求める ℓ の方程式は,

$$\ell\ :\ \frac{1}{p}\,x \pm \sqrt{1-\frac{1}{p^2}}\ y = 1 \qquad \text{(答)}$$

【2】$f(x,\ y)=1-ax-by-axy$ と置く．y を固定して，x のみの関数と考えると
$$f(x,\ y)=-(a+ay)x+1-by$$
は，x についての 1 次関数または定数関数となる．従って，$-1\leqq x\leqq 1$ における最小値は
$$f(-1,\ y)=(a-b)y+a+1$$
$$f(1,\ y)=-(a+b)y-a+1$$
の大きくない方である．

これらは，y についての 1 次関数または定数関数であるから，$-1\leqq y\leqq 1$ における最小値は
$$f(-1,\ -1)=b+1,\ f(-1,\ 1)=2a-b+1$$
の大きくない方，あるいは
$$f(1,\ -1)=b+1,\ f(1,\ 1)=-2a-b+1$$
の大きくない方である．よって，最小値が正である条件は
$$b+1>0,\ 2a-b+1>0,\ -2a-b+1>0$$
より
$$b>-1,\ b<2a+1,\ b<-2a+1$$
これを図示すると図 3 の斜線部となる．ただし，境界は含まない．　　　(答)

図 3



【3】(1) 真数条件より,

$0 < x < 2, \quad y > 0 \quad \cdots\cdots\cdots$ ①

与えられた不等式を変形・整理して

$$\text{与式} \iff \log_3\left(\frac{x}{3}\right)^2 \leqq \log_3\frac{y}{3} \leqq \log_3\left\{\frac{1}{3}x(2-x)\right\} \quad (\because 1 = \log_3 3)$$

$$\iff \left(\frac{x}{3}\right)^2 \leqq \frac{y}{3} \leqq \frac{1}{3}x(2-x)$$

$$\iff \frac{1}{3}x^2 \leqq y \leqq x(2-x)$$

境界をなす曲線の交点を求めると

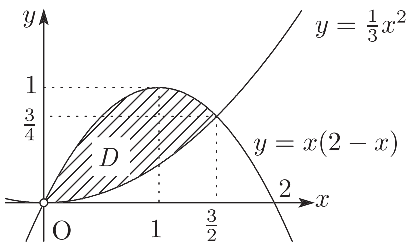
$$x^2 = 6x - 3x^2 \quad \iff \quad 4x\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \quad (x,\ y) = (0,\ 0),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)$$

よって求める領域 D は図 4 の斜線部分で，①より，$(0,\ 0)$ 以外の境界は含む.

(答)

図 4



(2) 与式の値を k と置くと,

$a < 2, \quad y - ax = k \quad \cdots\cdots\cdots$ ②

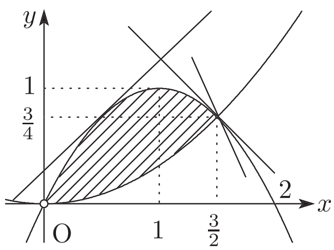
は傾き a の直線を表し, k は この直線の y 切片である.

$y = f(x) = x(2-x) = 2x - x^2$ と置くと, $y = f(x)$ と直線 ②が点 $(0,\ 0)$, $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)$ で接するとき，傾きについて

$$f'(x) = 2 - 2x$$

$$\therefore f'(0) = 2,\ f'\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - 2\cdot\frac{3}{2} = -1$$

図 5



(i) $a \leqq -1$ の場合,

直線 ②が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ を通るとき, k は最大となるので,

$$M(a) = \max k = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}a$$

(ii) $-1 < a < 2$ の場合,

直線 ②と $y = f(x)$ が $0 < x < \dfrac{3}{2}$ において接するとき k は最大となる. 2 次方程式

$$2x - x^2 = ax + k \Longleftrightarrow x^2 + (a-2)x + k = 0$$

の判別式を D として,

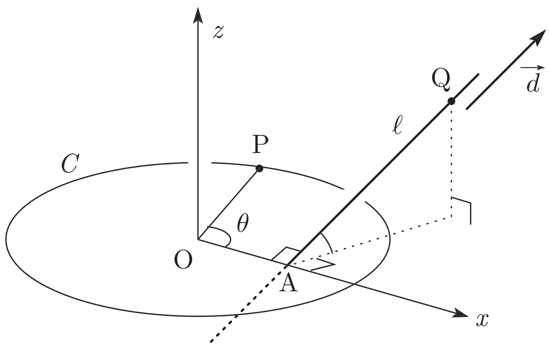
$$D = (a-2)^2 - 4k = 0 \Longleftrightarrow k = \frac{1}{4}(a-2)^2$$

以上をまとめて, 次を得る：

$$M(a) = \begin{cases} \dfrac{3-6a}{4} & (x,\ y) = \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right) \\ \dfrac{(a-2)^2}{4} & (x,\ y) = \left(-\dfrac{a-2}{2},\ -\dfrac{a^2}{4} + 1\right) \end{cases}$$ (答)

【4】中心 O を座標空間の原点にとり，線分 OA を x 軸正の部分に重ねると，A $(a, 0, 0)$ であり，また円 C を xy 平面の単位円と見なすことができる．図 6 を参照せよ．

図 6



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の偏角，つまり$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$が x 軸正方向となす角 (反時計回りに計る) を θ (ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$) とすれば，点 P の座標は P $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ である．

また，直線 ℓ の方向ベクトル は $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから，実数の パラメータ t を用いて，

点 Q (x, y, z) のパラメータ 表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

となり，Q (a, t, t) である．

従って 2 点 P, Q 間の距離の平方 PQ^2 について，次の計算ができる：

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= (\cos\theta - a)^2 + (\sin\theta - t)^2 + t^2 \\ &= 2\left(t - \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 - \frac{1}{2}\sin^2\theta - 2a\cos\theta + a^2 + 1 \\ &= 2\left(t - \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2}(\cos\theta - 2a)^2 - a^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

この値を V とすれば，V は t と $\cos\theta$ についての 2 次関数である：

$$V = 2\left(t - \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2}(\cos\theta - 2a)^2 - a^2 + \frac{1}{2}$$

t は実数全体を動き得るから，任意の θ について $t = \frac{1}{2}\sin\theta$ となる $t = t_0$ が存在し，t をこの値に定めれば $t - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$ となる．従って $t = t_0$ のとき，V は次の V_1 に等しい：

$$V_1 = \frac{1}{2}(\cos\theta - 2a)^2 - a^2 + \frac{1}{2}$$

ここで，$\cos\theta - 2a$ の値が 0 となり得るか否か，で場合を分ける：

Case 1.　$\cos\theta - 2a = 0$ となる θ が存在するとき．

これは $-1 \leqq 2a \leqq 1 \iff -\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$，ただし $a \geqq 0$ であるから，$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のときである．このとき，

$$\min V_1 = -a^2 + \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \min \mathrm{PQ} = \sqrt{-a^2 + \frac{1}{2}}$$

Case 2.　$\cos\theta - 2a = 0$ となる θ が存在しないとき．

これは $\dfrac{1}{2} < a$ のときであり，V_1 が最小となるのは $\left|\cos\theta - 2a\right|$ が最小のときである．$-2a < -1$ であるから，$\cos\theta = 1 \iff \theta = 0$ のとき，$\left|\cos\theta - 2a\right|$ は最小となる：

$$\min\left|\cos\theta - 2a\right| = \left|1 - 2a\right|$$

従って

$$\min V_1 = \frac{1}{2}\left|1 - 2a\right|^2 - a^2 + \frac{1}{2} = a^2 - 2a + 1 \qquad \therefore \quad \min \mathrm{PQ} = \left|a - 1\right|$$

以上，Cases 1, 2 より，

$$\min \mathrm{PQ} = \begin{cases} \sqrt{-a^2 + \dfrac{1}{2}} & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \left|a - 1\right| & \left(\dfrac{1}{2} < a\right) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

NOTE .

平面と直線のなす角の定義を確認しておくこと．

添削課題

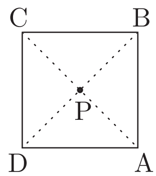
【1】 $|x-a| \leqq \dfrac{1}{2}$, $|y-b| \leqq \dfrac{1}{2}$ で表される正方形は，両辺が両軸に平行で, 一辺の長さが 1 となる．点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ は点 $(2,\ 1)$ を中心とした半径 1 の円周上を動くので, その軌跡は

$$(a-2)^2+(b-1)^2=1$$

である．これを媒介変数表示にすると

$$\begin{cases} a-2=\cos\theta \\ b-1=\sin\theta \end{cases} \quad \cdots ①$$

右図の正方形 ABCD の対角線の交点が P であるから



$$\mathrm{C}\left(a-\frac{1}{2},\ b+\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{D}\left(a-\frac{1}{2},\ b-\frac{1}{2}\right)$$

ここで

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{OC}}^2 &= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(b-\frac{1}{2}\right)+1 \\
&= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+2b \\
&\geqq \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=\overline{\mathrm{OD}}^2 \quad (\because ①\text{より},\ 0 \leqq b \leqq 2)
\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{OC}} \geqq \overline{\mathrm{OD}}$ より

$$f(\mathrm{P})=\overline{\mathrm{OD}}$$

また

$$\overline{\mathrm{OD}}^2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \quad \cdots ②$$

②式に, ①を代入して

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{OD}}^2 &= \left(\frac{3}{2}+\cos\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\sin\theta\right)^2 \\
&= \frac{10}{4}+1+3\cos\theta+\sin\theta \\
&= \frac{14}{4}+\sqrt{10}\cos(\theta-\phi) \quad \left(\text{ただし},\ \cos\phi=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin\phi=\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \\
&\leqq \frac{14+4\sqrt{10}}{4}=\left(\frac{\sqrt{10}+2}{2}\right)^2 \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

$$(\cos(\theta-\phi)=1 \text{ のとき等号成立})$$

よって

$$\overline{\mathrm{OD}} \leqq 1+\frac{\sqrt{10}}{2} \qquad (\text{答})$$

<参考>

$(*)$ に関して. $\cos(\theta-\phi)=1$ のとき

$3\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{10}$

$\sin\theta$ を右辺に移項してから, 平方すると

$$10\sin^2\theta-2\sqrt{10}\sin\theta+1=0 \quad \Longrightarrow \quad (\sqrt{10}\sin\theta-1)^2=0$$

$$\therefore \quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$(a,\ b)=\left(2+\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ 1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ より

$\mathrm{D}\left(\dfrac{3(2+\sqrt{10})}{2\sqrt{10}},\ \dfrac{2+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}\right)$

なお, このように図形に動きを与えて, 各種の値の最大, 最小を論ずる出題を東大は好む傾向にある.

２５章　図形（３）

問題

【1】題意を図示すれば，図 1 のようになる．

図 1

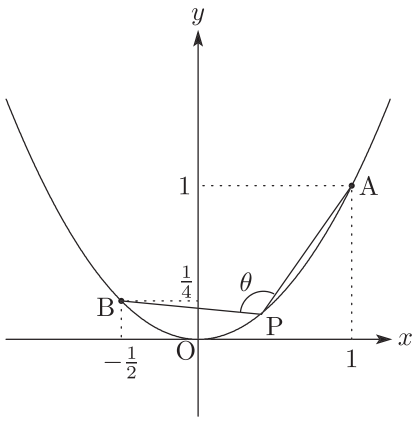


図 2 ：外角定理

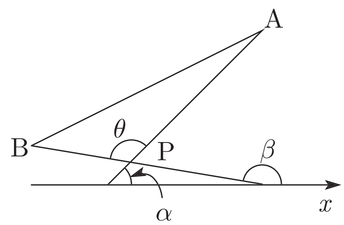


図 2 のように，$\angle\mathrm{APB} = \theta$，また $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ が x 軸正方向となす角を α，β とすれば，3 角形の外角定理より

$$\beta = \theta + \alpha, \quad \therefore\ \theta = \beta - \alpha$$

となる．従って，tan についての加法定理によって

$$\tan\theta = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

ここで $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ とすれば

$$\tan\alpha = \frac{1-t^2}{1-t} = 1 + t, \quad \tan\beta = \frac{\frac{1}{4} - t^2}{-\frac{1}{2} - t} = \frac{-\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)}{-\left(t + \frac{1}{2}\right)} = t - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \tan\theta &= \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) - (t+1)}{1 + \left(t - \frac{1}{2}\right)(t+1)} \\ &= \frac{-3}{2 + (2t-1)(t+1)} \\ &= \frac{-3}{2t^2 + t + 1}\end{aligned}$$

ここで

$$2t^2 + t + 1 = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geqq \frac{7}{8} > 0$$

より，$\tan\theta$ はつねに負である．よって θ はつねに鈍角である．

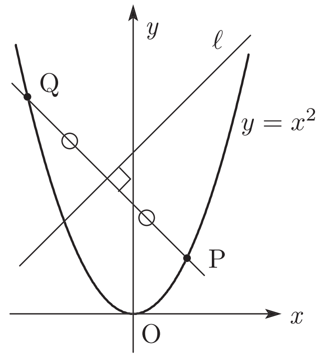
$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ では，$\tan\theta$ は単調に増加するから，$\theta = \angle\mathrm{APB}$ が最小になるのは，$\tan\theta$ が最小のときであり，これは $2t^2 + t + 1$ が最小になるときである．

以上より

$$t = -\frac{1}{4} \text{ のとき } \angle\mathrm{APB} \text{ は最小であり，そのとき } \mathrm{P}\left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{16}\right) \qquad \textbf{(答)}$$

【2】P$(p,\ p^2)$，Q$(q,\ q^2)$ $(p \neq q)$ とし，直線 $y = ax + 1$ を ℓ とする．

図 3



まず $a = 0$ ならば，ℓ は $y = 1$ となり，ℓ と垂直な直線と放物線との共有点はただ 1 個しか存在しない．これは題意をみたさないから，以下 $a \neq 0$ で考察する．

P と Q が直線 ℓ に関して対称ならば，PQ の中点が ℓ の上にあり，かつ，PQ $\perp \ell$ である．これより

$$\frac{p^2+q^2}{2} = a\frac{p+q}{2} + 1, \quad \frac{p^2-q^2}{p-q} \cdot a = -1$$

$$\therefore (p+q)^2 - 2pq = a(p+q) + 2, \quad a(p+q) = -1 \quad \cdots\cdots ①$$

① の第 2 式より，$a \neq 0$ であることに注意すると，① は

$$pq = \frac{(p+q)^2 - a(p+q) - 2}{2}, \quad p+q = -\frac{1}{a}$$

$$\therefore \quad pq = \frac{1-a^2}{2a^2}, \quad p+q = -\frac{1}{a}$$

と変形できて，p，q は，t に関する 2 次方程式

$$t^2 + \frac{1}{a}t + \frac{1-a^2}{2a^2} = 0 \qquad (\#)$$

の 2 解となる．よって題意の異なる点 P，Q の存在はこの 2 次方程式 (#) が異なる 2 実解をもつことと同値である．

よって (#) の判別式を $D_\#$ として，$D_\# > 0$ が成り立つことが必要かつ十分である：

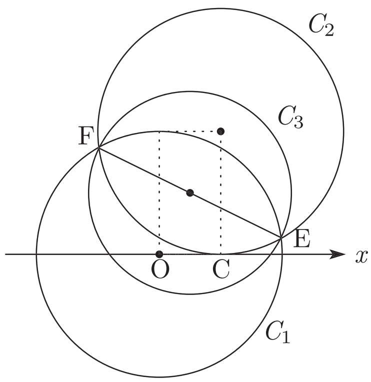
$$D_\# = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 4\frac{1-a^2}{2a^2} > 0 \qquad \therefore \quad 1 - 2(1-a^2) > 0,\ a \neq 0 \iff a^2 > \frac{1}{2}$$

よって

$$a < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ または } \frac{1}{\sqrt{2}} < a \qquad \text{(答)}$$

【3】 $C_1: x^2+y^2=28$ とする．折り返してできる円 C_2 は $\mathrm{C}(\sqrt{7},\ 0)$ で x 軸と接するから，C_2 の 中心の x 座標は $\sqrt{7}$ である．

図 4



また C_2 の半径は C_1 の半径と等しいから，C_2 の中心は $\left(\sqrt{7}, 2\sqrt{7}\right)$ となり，C_2 の方程式は

$$C_2 : (x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2=28$$

$$\therefore\quad x^2-2\sqrt{7}x+y^2-4\sqrt{7}y+7=0$$

となる．

C_1 と C_2 の 2 交点を通る円 C_3 の方程式は，k を $k \fallingdotseq -1$ の実数として

$$\begin{aligned}
&x^2-2\sqrt{7}x+y^2-4\sqrt{7}y+7+k(x^2+y^2-28)=0\\
\iff&(1+k)x^2-2\sqrt{7}x+(1+k)y^2-4\sqrt{7}y+7-28k=0\\
\iff&x^2-\frac{2\sqrt{7}}{1+k}x+y^2-\frac{4\sqrt{7}}{1+k}y+\frac{7-28k}{1+k}=0\\
\iff&\left(x-\frac{\sqrt{7}}{1+k}\right)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{7}}{1+k}\right)^2\\
&\qquad=\frac{28k-7}{1+k}+\left(\frac{\sqrt{7}}{1+k}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{1+k}\right)^2\quad\cdots\cdots①
\end{aligned}$$

と表されるから，C_3 の中心の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{1+k},\ \frac{2\sqrt{7}}{1+k}\right)$$

① のうち，EF を直径とする円の中心の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\ \sqrt{7}\right)$$

だからこれらを比較して

$$\frac{\sqrt{7}}{1+k}=\frac{\sqrt{7}}{2}\qquad\therefore\quad k=1$$

これより ① は

$$\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}$$

これと x 軸との交点の x 座標は

$$\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(0-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4} \qquad \therefore \quad \left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2=\frac{49}{4} \Longleftrightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{2}\pm\frac{7}{2}$$

よって求める距離は

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{7}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{7}{2}\right)=7 \qquad \text{(答)}$$

【4】直線 $\ell : y = ax + b$ について，一般形に直し，左辺を $f(x,\, y)$ とする：
$\ell : f(x,\, y) = ax - y + b = 0$

線分 AB と直線 ℓ がただ 1 個の共有点をもつのは，次のいずれかである：

- ℓ が開線分 AB (つまり端点 A, B を除いた線分) と共有点をもつ.
- ℓ が端点 A, B のいずれか一方のみを通る.

それぞれを Case 1，Case 2 とする.

Case 1. 直線 ℓ が開線分 AB と 1 点を共有するとき.

このとき，2 点 A と B は，x, y の 1 次式 $f(x,\, y)$ の正領域と負領域に分かれる.

従って，$f(0,\, 2)$ と $f(2,\, -2)$ は異符号になるから
$f(0,\, 2) \cdot f(2,\, -2) < 0$

$f(0,\, 2) = -2 + b,\ f(2,\, -2) = 2a + 2 + b$ であるから

$$\begin{aligned} f(0,\, 2) \cdot f(2,\, -2) < 0 &\iff (-2+b)(2a+2+b) < 0 \\ &\iff (b-2)(b+2a+2) < 0 \\ &\iff \begin{cases} b > 2 \\ b < -2a-2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} b < 2 \\ b > -2a-2 \end{cases} \end{aligned}$$

Case 2. ℓ が線分 AB の一方の端点を通るとき，

$f(0,\, 2) = 0$ または $f(2,\, -2) = 0 \iff b - 2 = 0$ または $2a + b + 2 = 0$

ただし，2 点 A と B の両方を通るとき，ℓ は直線 AB に一致してしまい，不適である．よって

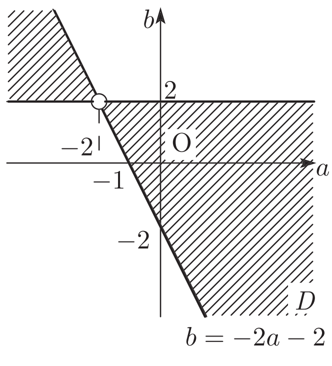
“$b - 2 = 0$ かつ $2a + b + 2 = 0$” であることはない

から，$b - 2 \fallingdotseq 0$ または $2a + b + 2 \fallingdotseq 0$ である．従って，点 $(-2,\, 2)$ を除く.

以上より，求める点 $(a,\, b)$ の存在領域 D は

$$\begin{cases} b \geqq 2 \\ b \leqq -2a-2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} b \leqq 2 \\ b \geqq -2a-2 \end{cases}$$ ただし，点 $(-2,\, 2)$ を除く. (答)

図 5



ab 座標平面に図示すれば，図 5 を得る.

【5】(1) y 軸に接する円 C_1, C_2 は中心の x 座標が半径に一致する．

2 円 C_1, C_2 が P で放物線の接線に接していることにより，C_1, C_2 の中心について，次が成り立つ：

- C_1, C_2 の中心は，いずれも放物線の P における法線上にある．
- C_1, C_2 の中心の x 座標は，それぞれの半径に等しい．

逆に, この条件が成り立てば，問題文の条件がみたされる．

2 円 C_1, C_2 の中心の x 座標を α として, α のみたすべき条件を求める．

P での法線は, $y=-\dfrac{1}{2t}(x-t)+t^2$ であるから, 中心の座標は $\left(\alpha,\ -\dfrac{1}{2t}(\alpha-t)+t^2\right)$ である．

これと $(t,\, t^2)$ との距離が α となるから

$$(t-\alpha)^2+\frac{1}{4t^2}(\alpha-t)^2=\alpha^2$$

従って

$$\alpha=t\sqrt{1+4t^2}\left(\sqrt{1+4t^2}\pm 2t\right)$$

この 2 つが C_1 と C_2 の中心である．

$R>r$ より，

$$\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{1+4t^2}+2t}{\sqrt{1+4t^2}-2t}=\left(\sqrt{1+4t^2}+2t\right)^2$$

$$\therefore\ \lim_{t\to 0}\frac{R}{r}=1$$

従って, $\dfrac{R}{r}$ の取り得る値の範囲は, $1<\dfrac{R}{r}$ である．　(答)

(2) $\dfrac{R}{r}=2$ より，

$$\left(\sqrt{1+4t^2}+2t\right)^2=2$$

$$\sqrt{4t^2+1}=\sqrt{2}-2t \quad \cdots(*)$$

$$4t^2+1=2-4\sqrt{2}t+4t^2$$

$$4\sqrt{2}t=1$$

$$\therefore\ t=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$\left((*)\text{ の右辺}=\sqrt{2}-2\cdot\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}>0\text{ となり適する.}\right)$

よって求める点 P の座標は　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{32}\right)$　(答)

添削課題

【1】$y=x^2$ より，

$$y'=2x$$

だから，C の Q における接線の傾きは $2t$.

よって，C の Q における法線の傾きは $-\dfrac{1}{2t}$ である.

よって，この法線の方向ベクトルは

$$(-2t,\ 1)$$

であり，この方向の単位ベクトルは

$$\left(\frac{-2t}{\sqrt{1+4t^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$$

である.

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$$

だから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}\left(\frac{-2t}{\sqrt{1+4t^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)\\&=(-2t(t-t^2),\ t-t^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\\&=(t-2t^2+2t^3,\ t^2+t-t^2)\\&=(t-2t^2+2t^3,\ t)\end{aligned}$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(X,\ Y)$$

とすると

$$X=t-2t^2+2t^3,\ Y=t$$

だから，t を消去して

$$X=Y-2Y^2+2Y^3$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=0$ の場合 C と C' は共有点をもつから

$$t-t^2=0 \qquad \therefore\quad t=0,\ 1$$

$$\therefore\quad y=0,\ 1$$

で共有点をもつ.

よって，とり得る値の範囲に注意して

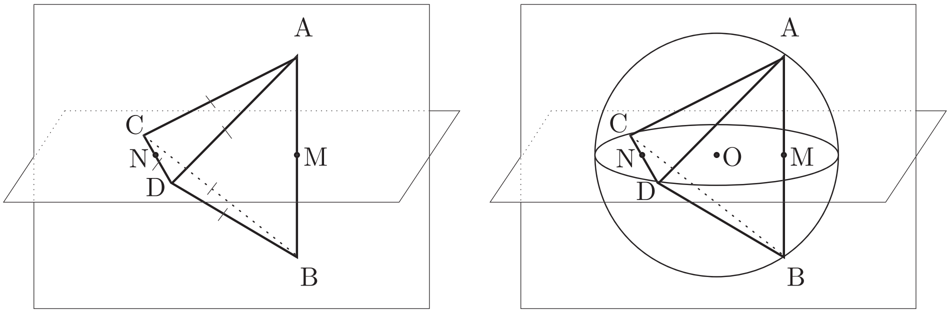
$$x=y-2y^2+2y^3\ \ (0\leqq y\leqq 1) \qquad \text{(答)}$$

２６章　図形（４）

問題

【1】題意の 4 面体を描くと，図 1 のように，対称面が２つ存在する．また，対称面と球の状態を考えると，対称面上に球の中心 O が存在することが解る．

図 1



線分 AB の中点を M，線分 CD の中点を N とすると，三平方の定理より

$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2$ が成り立つから，

$$r^2=\mathrm{OM}^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\mathrm{OM}^2+\frac{3}{4}\quad\cdots\cdots①$$

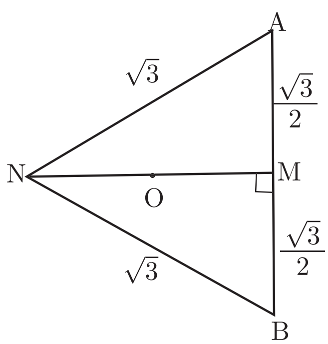
また，$\mathrm{OC}^2=\mathrm{ON}^2+\mathrm{CN}^2$ が成り立つから，

$$r^2=\mathrm{ON}^2+1\quad\cdots\cdots②$$

② − ① より，

$$0=\mathrm{ON}^2-\mathrm{OM}^2+\frac{1}{4}\qquad\therefore\quad(\mathrm{OM}+\mathrm{ON})(\mathrm{OM}-\mathrm{ON})=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots③$$

図 2



ここで，図 2 より，

$$\mathrm{OM}+\mathrm{ON}=\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots④$$

が成り立つから，③，④ より，

$$\mathrm{OM}-\mathrm{ON}=\frac{1}{6}\quad\cdots\cdots⑤$$

よって，④，⑤ より，

$$\mathrm{ON}=\frac{2}{3}$$

これを ② に代入して，

$$r^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{13}{9} \qquad \therefore \quad r=\frac{\sqrt{13}}{3} \qquad \text{(答)}$$

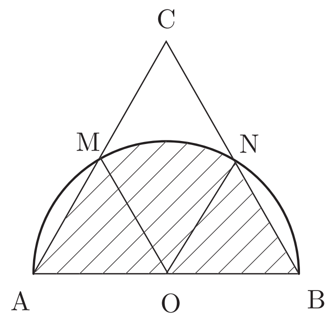
【2】(1) $\angle\mathrm{APB} \geqq 90^\circ$ より，P は AB を直径とする球面およびその内部にある．逆に AB を直径とする球面およびその内部の任意の点 P は $\angle\mathrm{APB} \geqq 90^\circ$ をみたす．

よって，S は AB を直径とする球面およびその内部である．　(答)

(2) 図 3 を参照せよ．

AB の中点を O とする．$\mathrm{AB}=2$ であるから，平面 ABC と S との交わりは O を中心とする半径 1 の円になる．

図 3

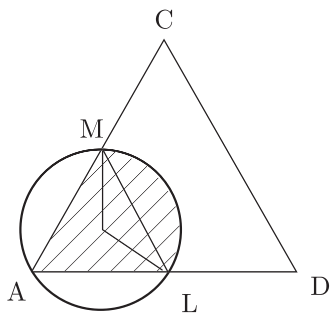


この円と辺 AC，BC との交点をそれぞれ M，N とすると，M，N は各辺の中点である．よって，求める面積は

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin 60^\circ+\pi\cdot\frac{60}{360}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6} \qquad \text{(答)}$$

(3) 3 角形 ABD と S との交わりの面積は，3 角形 ABC と S との交わりの面積に等しい．図 4 を参照せよ．

図 4



AD の中点を L とするとき，3 角形 ACD と S との交わりは 3 角形 AML の外接円

になるから，その半径 r は，正弦定理により

$$r=\frac{1}{2\sin 60^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって，交わりの面積は

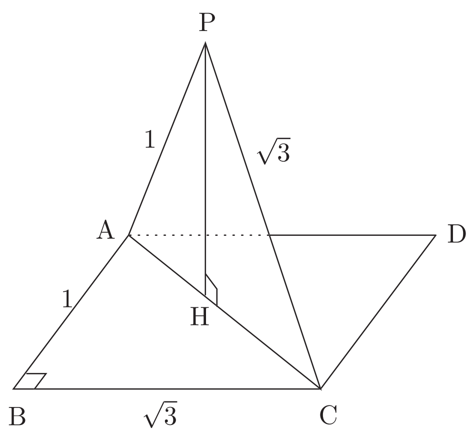
$$2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\sin 120^\circ+\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{120}{360}=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi}{9}$$

3 角形 BCD と S との交わりの面積も同様であるから，求める面積は

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+2\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi}{9}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{5\pi}{9}\qquad\text{(答)}$$

【3】A を始点とする位置ベクトルを B $\left(\vec{b}\right)$, C $\left(\vec{c}\right)$, D $\left(\vec{d}\right)$，P $\left(\vec{p}\right)$ とする．

図 5



(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{p}-\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{p}-\vec{d}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}&=\left(\vec{p}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{d}\right)\\&=\left|\vec{p}\right|^2-\left(\vec{b}+\vec{d}\right)\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{d}\\&=\left|\vec{p}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{p}\end{aligned}$$

ここで $\left|\vec{p}\right|=1$ であり，また $\triangle$APC で $\angle\mathrm{PAC}=60^\circ$，$\mathrm{AC}=2$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{p}=2\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=1$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=1^2-1=0\qquad\therefore\quad\angle\mathrm{BPD}=90^\circ\qquad\text{(答)}$$

(2) (1) より，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ であるから

$$\triangle\,\mathrm{BPD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$$

ここで

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2=\left|\vec{p}-\vec{b}\right|^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{p}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|^2=\left|\vec{p}+\vec{b}-\vec{c}\right|^2$$

$$= 1 + 1 + 4 + 2\vec{b}\cdot\vec{p} - 2\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$$
$$= 2 + 2\vec{b}\cdot\vec{p}$$
$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|^2 = 4\{1 - (\vec{b}\cdot\vec{p})^2\}$$

従って

$$\triangle\,\mathrm{BPD} = \sqrt{1 - (\vec{b}\cdot\vec{p})^2}$$

となり，$\left|\vec{b}\cdot\vec{p}\right|$ が最小のとき $\triangle$ BPD の面積は最大となる.

P から AC に下ろした垂線の足を H とすると

$$\vec{p}\cdot\vec{b} = (\overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{HP}})\cdot\vec{b}$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{b} + \overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\vec{b}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}})$$
$$= \frac{1}{4} + \overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ のなす角を θ とすれば

$$\vec{b}\cdot\vec{p} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\theta$$

であるから，$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\vec{b}\cdot\vec{p} = 0$ となり，このとき $\left|\vec{b}\cdot\vec{p}\right|$ は最小値 0 をとる.

このとき

$$\triangle\,\mathrm{BPD} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

だから，求める最大値 $\max\triangle$ BPD は

$\max\triangle\,\mathrm{BPD} = 1$ (答)

また，面 PAC と面 π とのなす角 α は，2 直線 BH，PH のなす角に等しい．ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{HP}}$のなす角 θ について，$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ であるから，$\theta > \dfrac{\pi}{2}$ である.

よって $\alpha = \pi - \theta$ であるから，求める α の余弦は

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\qquad (答)$$

【4】点 A を原点とすると AG 上の点は $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha,\ \alpha)$ と表されるから

$$x = \sqrt{3}\alpha \qquad \because\quad \alpha^2 = \frac{1}{3}x^2\ (ただし\ 0 \leqq \alpha \leqq 1)$$

P を通り AG に垂直な面 π 上の点 $\mathrm{T}(X,\ Y,\ Z)$ について

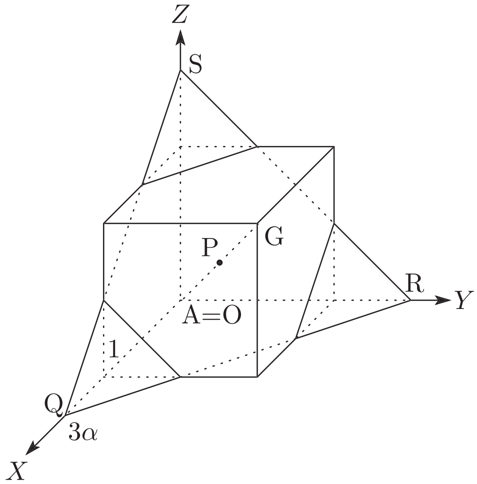
$$\overrightarrow{\mathrm{PT}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AG}}\quad より\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X-\alpha\\Y-\alpha\\Z-\alpha\end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore\quad X + Y + Z - 3\alpha = 0$$

よって，平面 π と軸との交点として

$\mathrm{Q}(3\alpha, 0, 0)$,　$\mathrm{R}(0, 3\alpha, 0)$,　$\mathrm{S}(0, 0, 3\alpha)$

(i) $0 < 3\alpha \leqq 1 \iff 0 < \alpha \leqq \dfrac{1}{3} \iff 0 < x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき．断面は，1 辺の長さが $3\sqrt{2}\alpha$ の正 3 角形となる.

図 6



$$\therefore \quad S=\frac{\sqrt{3}}{4}(3\sqrt{2}\alpha)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 18\alpha^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 18\cdot\frac{x^2}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

(ii) $1 \leqq 3\alpha \leqq 2 \iff \frac{1}{3} \leqq \alpha \leqq \frac{2}{3} \iff \frac{1}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき.

断面は 6 角形であり，その面積 S は 1 辺の長さが $3\sqrt{2}\alpha$ の正 3 角形の面積から，1 辺の長さが $\sqrt{2}(3\alpha-1)$ の正 3 角形の面積をを 3 つ分引いて得られる．よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{4}(3\sqrt{2}\alpha)^2-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\{\sqrt{2}(3\alpha-1)\}^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6\{3\alpha^2-(3\alpha-1)^2\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6(-6\alpha^2+6\alpha-1) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}(-2x^2+2\sqrt{3}x-1) \end{aligned}$$

(iii) $2 \leqq 3\alpha < 3 \iff \frac{2}{3} \leqq \alpha < 1 \iff \frac{2}{\sqrt{3}} \leqq x < \sqrt{3}$ のとき.

立方体の対角線 OG の中点に関する対称性に着目して，(i) の x を $\sqrt{3}-x$ にかえて，$S=\frac{3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-x)^2$

以上より

$$\begin{cases} 0<x\leqq\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき，} S=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ のとき，} S=\frac{3\sqrt{3}}{2}(-2x^2+2\sqrt{3}x-1) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\leqq x<\sqrt{3} \text{ のとき，} S=\frac{3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-x)^2 \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

M3JSB/M3JB/M3TB

選抜東大クラス文系数学

東大文系数学

難関大文系数学 T

Z-KAI

会員番号		氏　名	