M3MA

本科 2 期 12 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学 M

２４章　総合演習（７）

問題

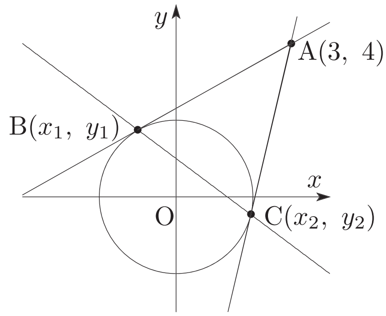
【1】(1) 点 $B(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x + y_1y = a^2$$

であり，この接線が点 $A(3, 4)$ を通るので

$$3x_1 + 4y_1 = a^2 \cdots\cdots ①$$

が成り立つ.　　　　　　　　　　　（証終）



(2) $C(x_2,\ y_2)$ とすると，(1) と同様に

$$3x_2 + 4y_2 = a^2 \cdots\cdots ②$$

が成り立つ.

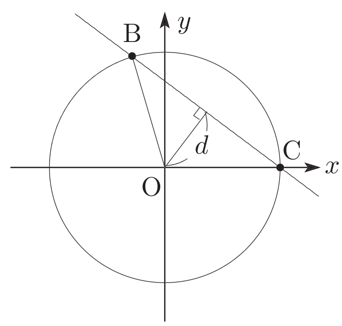
①, ② より 2 点 B，C が直線

$$3x + 4y = a^2$$

上にあることがわかるので，直線 BC の方程式は

$$\boldsymbol{3x + 4y = a^2} \qquad \text{(答)}$$

原点 O と直線 BC の距離を d とすると



$$d = \frac{|a^2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{a^2}{5}$$

よって

$$BC = 2\sqrt{a^2 - d^2} = 2\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{25}}$$

であるから $BC > 3$ より

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{25}} > 3 &\iff 4\left(a^2 - \frac{a^4}{25}\right) > 9 \\ &\iff 4(25a^2 - a^4) > 225 \\ &\iff 4a^4 - 100a^2 + 225 < 0 \\ &\iff (2a^2 - 45)(2a^2 - 5) < 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{5}{2} < a^2 < \frac{45}{2}$$

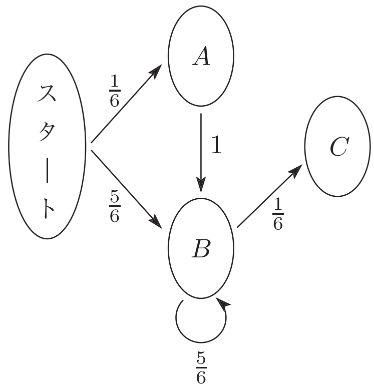
$0 < a < 5$ より

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2} < a < \frac{3\sqrt{10}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【2】事象 A, B, C を

$A:1$ の位置にある　　$B:2\sim7$ の位置にある　　$C:8$ の位置（ゴール）にある

とし，点の移動の仕方とその確率は



スタート→ A : 確率 $\dfrac{1}{6}$

スタート→ B : 確率 $\dfrac{5}{6}$

$A \to B$: 確率 1

$B \to B$: 確率 $\dfrac{5}{6}$

$B \to C$: 確率 $\dfrac{1}{6}$

のようになる．

(1) 2 回の移動でゴールするのは

スタート→ $B \to C$

の場合なので，その確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{5}{36}} \qquad \text{(答)}$$

3 回の移動でゴールするのは

スタート→ $A \to B \to C$　　スタート→ $B \to B \to C$

の場合なので，この確率 p_3 は

$$p_3 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{31}{216}} \qquad \text{(答)}$$

同様に，4 回の移動でゴールするのは

スタート→ $A \to B \to B \to C$　　スタート→ $B \to B \to B \to C$

の場合なので，この確率 p_4 は

$$p_4 = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{155}{1296}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $n \geqq 3$ のとき，n 回の移動でゴールするのは

スタート→ $A \to B \to \cdots \to B \to C$ （B が途中で $n-2$ 回起こる）

スタート→ $B \to B \to \cdots \to B \to C$ （B が途中で $n-1$ 回起こる）

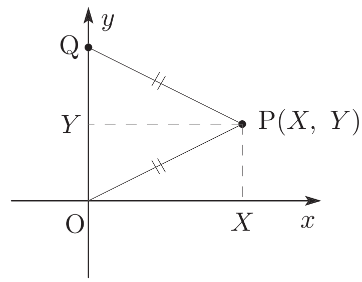
の場合なので，この確率 p_n は

$$p_n = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{31}{216}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}}$$

ただし，$\boldsymbol{p_1 = 0,\ p_2 = \frac{5}{36}}$ である．　　(答)

【3】(1) $\mathrm{P}(X,\ Y)$ $(X > 0,\ Y > 0)$ とすると，△OPQ は OP=PQ の 2 等辺三角形なので，点 Q は右図のような位置にあり



$$\mathrm{OP} = \mathrm{PQ} = \sqrt{X^2 + Y^2},\ \mathrm{OQ} = 2Y$$

よって，△OPQ の周の長さが 2 となるので

$$2\sqrt{X^2+Y^2} + 2Y = 2$$

$$\iff \sqrt{X^2+Y^2} = 1 - Y$$

$$\iff X^2 + Y^2 = (1-Y)^2 \text{かつ} 1 - Y \geqq 0$$

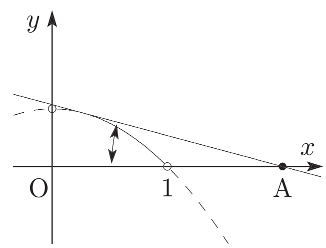
$$\therefore\quad Y = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2} \text{かつ} Y \leqq 1$$

よって，$X > 0,\ Y > 0$ より点 P の軌跡 T は

放物線 $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$ の $\boldsymbol{0 < x < 1}$ の部分

である．　　(答)

(2) 直線 $y = a(x-2)$ は定点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ を通り，傾き a の直線である．



$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\right)$ $(0 < t < 1)$ における接線の方程式は，$y' = -x$ より

$$y = -t(x-t) - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad y = -tx + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$$

であり，この直線が点 A を通るとき

$$0 = -2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad t^2 - 4t + 1 = 0$$

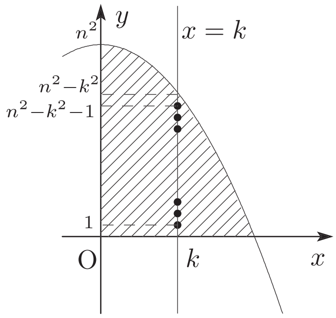
$0 < t < 1$ より

$$t = 2 - \sqrt{3}$$

よって，このときの傾きは $\sqrt{3} - 2$ であるから，求める a の範囲は

$\boldsymbol{\sqrt{3} - 2 \leqq a < 0}$　　(答)

【4】(1) 不等式 $y < -x^2 + n^2$, $x > 0$, $y > 0$ で表される領域 D は右図の斜線部分（ただし境界線上は含まない）のようになる．a_n は領域 D に含まれる格子点 (x 座標，y 座標がともに整数となる点) の個数に他ならない．



ここで，領域 D に含まれる格子点で直線 $x = k$ 上の格子点の個数は

$n^2 - k^2 - 1$ (個)

あるので，$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^{n-1}(n^2 - k^2 - 1) \\
&= (n^2-1)(n-1) - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \boldsymbol{\frac{(n-1)(4n^2+n-6)}{6}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

であり，$n = 1$ のときも成立する．

(2) $\sqrt{x^2+y}$ を超えない最大の整数が n なので

$n \leqq \sqrt{x^2+y} < n+1$

$\therefore \quad n^2 \leqq x^2 + y < (n+1)^2$

よって，b_n は

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_{n+1} - a_n \\
&= \frac{n\left\{4(n+1)^2 + (n+1) - 6\right\}}{6} - \frac{(n-1)(4n^2+n-6)}{6} \\
&= \boldsymbol{2n^2 + n - 1} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【5】(1) $\log(a_1-1)+\log(a_2-1)+\log(a_3-1)+\log(a_3+1)$

$=\log(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)(a_3+1)$

$=\log(a_1-1)(a_2-1)({a_3}^2-1)=\log(a_1-1)(a_2-1)(2+a_2-1)$

$=\log(a_1-1)({a_2}^2-1)=\log(a_1-1)(2+a_1-1)$

$=\log({a_1}^2-1)=\log 1$

$=\mathbf{0}$　　(答)

(2) 与えられた漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ より

$$2-a_{n+1}=2-\sqrt{2+a_n}=\frac{4-(2+a_n)}{2+\sqrt{2+a_n}}$$
$$=\frac{2-a_n}{2+\sqrt{2-a_n}}$$
$$\leqq\frac{1}{2}(2-a_n)$$

$a_n=2$ とすると，$a_{n-1}=2$，$\cdots$，$a_1=2$ となり不適なので，$a_n\fallingdotseq 2$ であり

$$0<2-a_n<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-a_1)<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

が成り立つ.　　（証終）

(3) $n\geqq 2$ とする。$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log(a_k-1)$ とおくと

$$S_n=\log(a_1-1)(a_2-1)\cdot\cdots(a_{n-1}-1)(a_n-1)$$
$$=\log(a_1-1)(a_2-1)\cdot\cdots\cdot(a_{n-1}-1)(\sqrt{2+a_{n-1}}-1)$$
$$=\log(a_1-1)(a_2-1)\cdot\cdots\cdot(a_{n-1}-1)\cdot\frac{a_{n-1}+1}{\sqrt{2+a_{n-1}}+1}$$
$$=\log(a_1-1)(a_2-1)\cdot\cdots\cdot({a_{n-1}}^2-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2+a_{n-1}}+1}$$
$$=\log(a_1-1)(a_2-1)\cdot\cdots\cdot(a_{n-2}+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2+a_{n-1}}+1}$$
$$\vdots$$
$$=\log\frac{{a_1}^2-1}{\sqrt{2+a_{n-1}}+1}$$
$$=\log\frac{1}{\sqrt{2+a_{n-1}}+1}$$

(2) の結果および，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(a_n-1)=\lim_{n\to\infty}S_n=\log\frac{1}{3}=\mathbf{-\log 3}\qquad(答)$$

<別解>

(1) をヒントに

$$S_n + \log(a_n + 1)$$

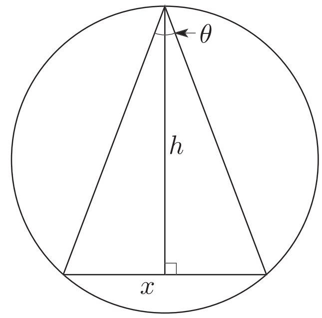
を計算してもよい．すると

$$\begin{aligned} S_n + \log(a_n + 1) &= \log(a_1 - 1)(a_2 - 1) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} - 1)(a_n - 1)(a_n + 1) \\ &= \log(a_1 - 1)(a_2 - 1) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} - 1)(a_{n-1} + 1) \\ &\quad \vdots \\ &= \log({a_1}^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \{-\log(a_n + 1)\} = -\log 3$$

【6】(1) 底辺の長さを x とおくと，外接円の半径が 1 なので，正弦定理より



$$\frac{x}{\sin\theta} = 2$$

$\therefore \quad x = 2\sin\theta$

高さを h とおくと

$$\frac{\frac{x}{2}}{h} = \tan\frac{\theta}{2}$$

であるから

$$h = \frac{\frac{x}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta$$

よって

$S = \frac{1}{2}\cdot x\cdot h = \boldsymbol{(1+\cos\theta)\sin\theta}$ (答)

(2) $0 < \theta < \pi$ もとで

$$S' = -\sin^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta = 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

であるから，$0 < \theta < \pi$ における S の増減は下表のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

よって，$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$ のとき，極大かつ最大で，その最大値は

$\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ (答)

【7】(1) 示すべき等式の左辺は

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\,dx$$

である．ここで，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\,dx$ において $t=\pi-x$ とおくと

$dt=-dx$

$x:\dfrac{\pi}{2}\longrightarrow\pi$ のとき $t:\dfrac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

であり

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\,dx&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)f\left(\sin(\pi-t)\right)(-dt)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)f(\sin t)\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-x)f(\sin x)\,dx\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-x)f(\sin x)\,dx\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx\end{aligned}$$

が成立する．　（証終）

(2) $f(x)=\dfrac{x}{3+x^2}$ とおくと

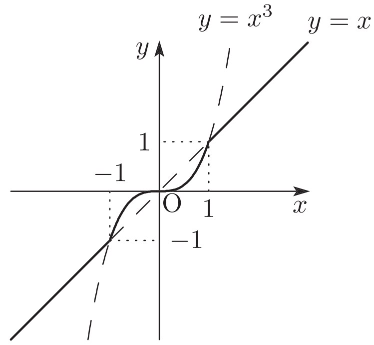
$$xf(\sin x)=\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}$$

であるから，(1) より

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(2-\cos x)(2+\cos x)}\,dx\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{2-\cos x}+\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)dx\\&=\frac{\pi}{4}\Big[\log|2-\cos x|-\log|2+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{4}\left\{\log 2-\log 1-(\log 2-\log 3)\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}\log 3}\qquad(\text{答})\end{aligned}$$

【8】(1) (i) $|x|>1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} x^{-n}=0$ なので

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^{5-2n}+x^{3-2n}}{1+x^{2-2n}+x^{-2n}}=x$$



(ii) $x=-1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-1-1-1}{1+1+1}=-1$$

(iii) $x=1$ のとき

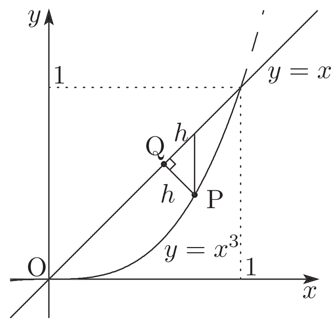
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1+1}{1+1+1}=1$$

(iv) $|x|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} x^{n}=0$ なので

$$f(x)=\frac{x^5+x^3}{x^2+1}=x^3$$

以上より，$y=f(x)$ のグラフは**右上図**のようになる．　　(答)

(2) 対称性より，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で考えればよい．



$y=x^3$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^3)$ から直線 $y=x$ に下ろした垂線の足を Q とし，$\mathrm{PQ}=h$ とすると

$$h=\frac{|x-x^3|}{\sqrt{2}}=\frac{x-x^3}{\sqrt{2}}$$

$\mathrm{OQ}=t$ とおくと

$$t+h=\sqrt{2}x \qquad \therefore\quad t=\sqrt{2}x-\frac{x-x^3}{\sqrt{2}}$$

であり

$$dt=\left(\sqrt{2}-\frac{1-3x^2}{\sqrt{2}}\right)dx=\frac{3x^2+1}{\sqrt{2}}dx$$

$$t:0\longrightarrow\sqrt{2} \text{ のとき } x:0\longrightarrow 1$$

であるから，求める体積は

$$\begin{aligned}2\pi\int_0^{\sqrt{2}}h^2\,dt&=2\pi\int_0^1\frac{x^2(1-x^2)^2}{2}\cdot\frac{3x^2+1}{\sqrt{2}}\,dx\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1(3x^8-5x^6+x^4+x^2)\,dx\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^9}{3}-\frac{5}{7}x^7+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{105}\pi}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【9】(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt = a \cdots\cdots$ ①

とおくと

$f(x) = 2x - a \cdots\cdots$ ②

①，②より

$$a = \int_0^{\pi}(2t-a)\sin t\,dt = 2\int_0^{\pi} t\sin t\,dt - a\int_0^{\pi}\sin t\,dt$$
$$= 2\Big[-t\cos t + \sin t\Big]_0^{\pi} - a\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi}$$
$$= 2\pi - 2a$$

よって

$$a = 2\pi - 2a \qquad \therefore\ a = \frac{2}{3}\pi$$

これを②に代入して

$\boldsymbol{f(x) = 2x - \dfrac{2}{3}\pi}$ （答）

(2) 与式の左辺は

$$（左辺）= \int_0^{2\pi}\sin y(\sin x\cos y + \cos x\sin y)\,dy$$
$$= \sin x\int_0^{2\pi}\sin y\cos y\,dy + \cos x\int_0^{2\pi}\sin^2 y\,dy$$

ここで

$$\int_0^{2\pi}\sin y\cos y\,dy = \int_0^{2\pi}\frac{\sin 2y}{2}dy = \left[-\frac{\cos 2y}{4}\right]_0^{2\pi} = 0$$
$$\int_0^{2\pi}\sin^2 y\,dy = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2y}{2}dy = \left[\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$
$$\int_0^{\pi}\sin^2 y\,dy = \left[\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

であるから

$$0\cdot\sin x + \pi\cdot\cos x = f(x)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(x) = 2\cos x}$ （答）

(3) (i) $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{t\sin t}{1+2^t}dt$ を微分して

$$f'(x) = \frac{x\sin x}{1+2^x}\cdot(x)' - \frac{(-x)\sin(-x)}{1+2^{-x}}\cdot(-x)'$$
$$= \frac{x\sin x}{1+2^x} + \frac{x\sin x}{1+2^{-x}}$$
$$= x\sin x\cdot\frac{1+2^{-x}+1+2^x}{(1+2^x)(1+2^{-x})}$$
$$= x\sin x\cdot\frac{2+2^{-x}+2^x}{1+2^{-x}+2^x+2^x\cdot 2^{-x}}$$
$$= \boldsymbol{x\sin x} \qquad （答）$$

(ii) (i) より，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0		π		2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

また，$f'(x) = x\sin x$ より

$$f(x) = \int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

とおけ，$f(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{t\sin t}{1+2^t}dt = 0$ より

$$f(0) = C = 0 \qquad \therefore \quad f(x) = -x\cos x + \sin x$$

よって

$$f(0) = 0,\ f(2\pi) = -2\pi \qquad \therefore \quad f(0) > f(2\pi)$$

なので，求める最小値は

$\boldsymbol{-2\pi}$　　(答)

２５章　総合演習（８）

問題

【1】$t=\sin x+\cos x$ とおくと

$$t^2=1+2\sin x\cos x$$

$$\therefore\quad \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

であるから

$$f(x)=at-\frac{t^2-1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}(t-a)^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\ (=g(t)\text{ とおく})$$

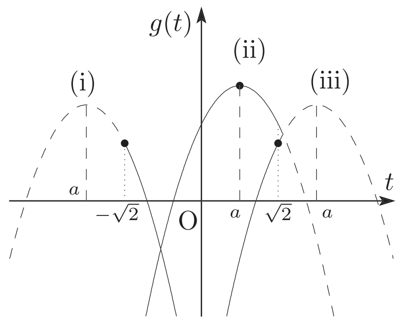
また

$$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，t のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

(i) $a\leqq-\sqrt{2}$ のとき，$g(t)$ は $t=-\sqrt{2}$ で最大となる．



よって，最大値が 3 であるから

$$g(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}a-\frac{1}{2}=3$$

$$\therefore\quad a=-\frac{7}{2\sqrt{2}}=-\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

となり，$a\leqq-\sqrt{2}$ をみたす．

(ii) $-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$ のとき，$g(t)$ は $t=a$ で最大となる．

よって，最大値が 3 であるから

$$g(a)=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}=3$$

$$\therefore\quad a=\pm\sqrt{5}$$

となるが，これは $-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$ をみたさない．

(iii) $a\geqq\sqrt{2}$ のとき，$g(t)$ は $t=\sqrt{2}$ で最大となる．よって，最大値が 3 であるから

$$g(\sqrt{2})=\sqrt{2}a-\frac{1}{2}=3$$

$$\therefore\quad a=\frac{7}{2\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

となり，$a\geqq\sqrt{2}$ をみたす．

以上より，求める a の値は

$$\boldsymbol{a=\pm\frac{7\sqrt{2}}{4}}\qquad\text{(答)}$$

【2】(1) $n+1$ 回目の操作で，取り出したカードの総和が偶数になるのは

n 回目の総和が偶数で，$n+1$ 回目に偶数を取り出す

n 回目の総和が奇数で，$n+1$ 回目に奇数を取り出す

という排反な場合にわけることができる．

よって，偶数を取り出す確率は $\dfrac{1}{3}$，奇数を取り出す確率は $\dfrac{2}{3}$ であるから

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}(1-p_n)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{p_{n+1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}p_n} \qquad \text{(答)}$$

(2) $n=1$ のとき，p_1 は偶数を取り出す確率であるから

$$p_1=\frac{1}{3}$$

(1) より

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

と変形できるので

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 点 Q は線分 OP 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\ (k \geqq 1)$$

と表せ

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = k\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$$

であり，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = 1$ より

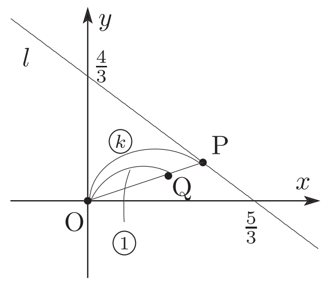
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}$ かつ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| \fallingdotseq 0$ なので

$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|} = k\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$$

$$\therefore\quad k = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2} = \frac{1}{X^2+Y^2}$$

よって

$$\boldsymbol{x = \frac{X}{X^2+Y^2},\ y = \frac{Y}{X^2+Y^2}}$$ (答)



(2) P が l 上を動くので

$$3x + 4y = 5$$

をみたす．よって，(1) より

$$\frac{3X}{X^2+Y^2} + \frac{4Y}{X^2+Y^2} = 5$$

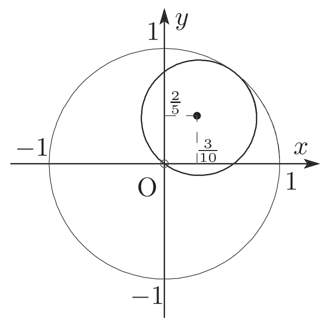
$$\therefore\quad X^2 + Y^2 - \frac{3}{5}X - \frac{4}{5}Y = 0$$

$$\therefore\quad \left(X - \frac{3}{10}\right)^2 + \left(Y - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

また，$k \geqq 1$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| \fallingdotseq 0$ より

$$\frac{1}{X^2+Y^2} \geqq 1,\ X^2+Y^2 \fallingdotseq 0$$

$$\therefore\quad 0 < X^2 + Y^2 \leqq 1$$



よって，点 Q の軌跡は

円 $\boldsymbol{\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{4}}$ **の原点 (0, 0) を除く部分**

である． (答)

【4】(1) 自然数 $a,\ b$ がともに 2 以上であるとすると

$$\frac{1}{a} \leqq \frac{1}{2},\ \frac{1}{b} \leqq \frac{1}{2}$$

すなわち

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqq 1$$

となり，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > 1$ をみたさない.

したがって，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > 1$ をみたす自然数 $a,\ b$ の少なくとも一方は 1 である.

（証終）

(2) $a = 1$ のとき $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} < 1$ は成立しないので，$a \geqq 2$ として考える.

(i) $a = 2$ のとき

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{b} < 1 \qquad \therefore\ \ b > 2 \text{ すなわち } b \geqq 3$$

であるから

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

(ii) $a \geqq 3$ のとき，$b \geqq 4$ であり

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}\left(< \frac{5}{6}\right)$$

以上より，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ は $a = 2,\ b = 3$ のとき最大で，最大値は

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{5}{6}$$

である.　（証終）

(3) $a = 1$ のとき

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$$

となり，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < 1$ をみたさないので，$a \geqq 2$ として考える.

(i) $a = 2$ のとき

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1 \qquad \therefore\ \ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$$

また，$b \geqq 3$ であるから

（ア）$b = 3$ のとき

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{c} < \frac{1}{2} \qquad \therefore\ \ c > 6 \text{ すなわち } c \geqq 7$$

であるから

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$$

（イ）$b \geqq 4$ のとき，$c \geqq 5$ であり

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{38}{40}\left(<\frac{41}{42}\right)$$

(ii) $a \geqq 3$ のとき，$b \geqq 4$，$c \geqq 5$ であり

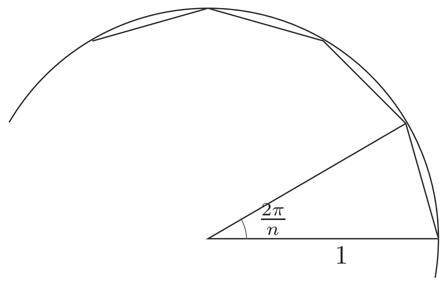
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}\left(<\frac{41}{42}\right)$$

以上より，$\frac{41}{42}>\frac{38}{40}>\frac{47}{60}$ であるから，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ は $a=2$，$b=3$，$c=7$ のとき最大で，最大値は

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{41}{42}$$

である．（証終）

【5】(1) 1 辺に対する中心角は $\dfrac{2\pi}{n}$ であるから



$$x_n = 2\sin\frac{\frac{2\pi}{n}}{2}$$
$$= \boldsymbol{2\sin\frac{\pi}{n}} \qquad (\text{答})$$

(2) (1) より

$$nx_n = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot 2\pi$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \boldsymbol{2\pi} \qquad (\text{答})$$

【6】(1) $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ はだ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点なので

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1$$

$\therefore\quad (b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)r^2=a^2b^2$

よって，$r>0$，$a>0$，$b>0$ より

$$\boldsymbol{r=\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}} \qquad (\text{答})$$

(2) $r(\theta)=\dfrac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，線分 OP，OQ の長さの積について

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r(\theta)\,r\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{a^2b^2}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)}}$$

であり，分母について

$$(\text{分母})^2=(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)$$
$$=b^4\sin^2\theta\cos^2\theta+a^2b^2\cos^4\theta+a^2b^2\sin^4\theta+a^4\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=(a^4+b^4)\sin^2\theta\cos^2\theta+a^2b^2\{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\}$$
$$=(a^4+b^4-2a^2b^2)\sin^2\theta\cos^2\theta+a^2b^2$$
$$=\frac{(a^2-b^2)^2}{4}\sin^2 2\theta+a^2b^2$$

なので

$$a^2b^2\leqq(\text{分母})^2\leqq\frac{(a^2-b^2)^2}{4}+a^2b^2 \qquad \therefore\quad a^2b^2\leqq(\text{分母})^2\leqq\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$$

よって，$\triangle \mathrm{POQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$ なので

$$\boldsymbol{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \leqq \triangle \mathrm{POQ} \leqq \frac{ab}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【7】 (1) $\dfrac{1+x}{1-x}>0$ より

$$-1<x<1$$

ここで，$0<x<1$ のとき，$g(x)=\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-x$ とおくと

$$g'(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$$

であるから，$g(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

よって，$x>0$ のとき $g(x)>0$ より

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}>x$$

が成立する． （証終）

(2) $\dfrac{1+x}{1-x}>0$ より

$$(1+x)(1-x)>0 \qquad \therefore \quad -1<x<1$$

このとき

$$\lim_{x\to-1+0}\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1-0}\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\infty$$

$y=\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ とおくと

$$e^{2y}=\frac{1+x}{1-x} \qquad \therefore \quad x=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

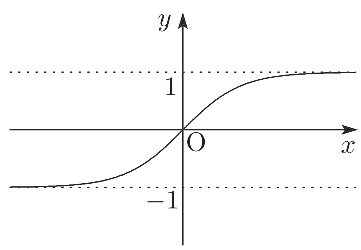
x と y を入れ替えて

$$y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \qquad \therefore \quad f^{-1}(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

定義域は実数全体で，値域は $-1<f^{-1}(x)<1$ である．

$$\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)'=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

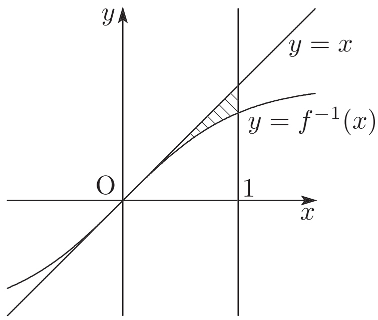
$$=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}>0$$



よって，$y=f^{-1}(x)$ のグラフは右図のようになる．

(答)

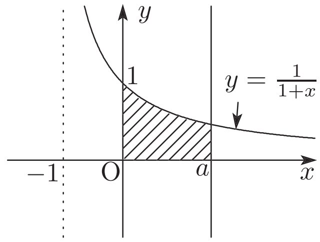
(3) 右図の斜線部分の面積 S を求めればよく



$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 (x - f^{-1}(x))\,dx \\
&= \int_0^1 \left(x - \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} + 1 \right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \log\left| e^{2x}+1 \right| + x \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \log(e^2+1) + \log 2 + 1 \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{2} - \log\frac{e^2+1}{2}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【8】(1)

$$V_1 = \pi\int_0^a \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx$$
$$= \pi\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^a$$
$$= \pi\left(-\frac{1}{1+a}+1\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi a}{1+a}} \quad \text{(答)}$$



(2)
$$y = \frac{1}{1+x} \iff x = \frac{1}{y}-1$$

また，$y = \dfrac{1}{1+x}$ と $x=a$ との交点は $\left(a,\ \dfrac{1}{1+a}\right)$ より

$$V_2 = \pi a^2 \cdot \frac{1}{1+a} + \pi\int_{\frac{1}{1+a}}^1 \left(\frac{1}{y}-1\right)^2 dy$$
$$= \frac{\pi a^2}{1+a} + \pi\int_{\frac{1}{1+a}}^1 \left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}+1\right) dy$$
$$= \frac{\pi a^2}{1+a} + \pi\left[-\frac{1}{y}-2\log|y|+y\right]_{\frac{1}{1+a}}^1$$
$$= \frac{\pi a^2}{1+a} + \pi\left\{(-1+1)-\left(-1-a-2\log\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+a}\right)\right\}$$
$$= \frac{\pi a^2}{1+a} + \pi(1+a) - 2\pi\log(1+a) - \frac{\pi}{1+a}$$
$$= \frac{(a+1)(a-1)\pi}{1+a} + \pi(1+a) - 2\pi\log(1+a)$$
$$= \boldsymbol{2\pi a - 2\pi\log(1+a)} \quad \text{(答)}$$

(3) $f(a) = \dfrac{V_1 - V_2}{\pi}$ とする．

$$f(a) = \frac{a}{1+a} - 2a + 2\log(1+a)$$
$$f'(a) = \frac{1+a-a}{(1+a)^2} - 2 + \frac{2}{1+a}$$
$$= \frac{1-2(1+a)^2+2(1+a)}{(1+a)^2}$$
$$= -\frac{2a^2+2a-1}{(1+a)^2}$$
$$= -\frac{2\left(a-\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(a-\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)}{(1+a)^2}$$

よって，$f(a)$ の増減は下表の通り．

a	0		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	
$f'(a)$		$+$	0	$-$
$f(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$f(a)$ が最大になる a の値，すなわち $V_1 - V_2$ が最大になる a の値 p は

$$p = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}} \quad \text{(答)}$$

【9】(1) $I=\int e^{-x}\sin x dx$ とおくと，部分積分法より

$$\begin{aligned} I &= \int(-e^{-x})'\sin x dx \\ &= -e^{-x}\sin x-\int(-e^{-x})\cos x dx \\ &= -e^{-x}\sin x-\int(e^{-x})'\cos x dx \\ &= -e^{-x}\sin x-\left\{e^{-x}\cos x-\int e^{-x}(-\sin x)dx\right\} \\ &= -e^{-x}(\sin x+\cos x)-I \end{aligned}$$

よって

$2I=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$ (C は積分定数)

$\therefore\quad \boldsymbol{I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C'}$ **(C'は積分定数)**　　(答)

(2) m を整数とすると，$m\pi \leqq x \leqq (m+1)\pi$ において

$|\sin x|=(-1)^m\sin x$

であるから

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{\pi}e^{-x}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x}\sin x dx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{-x}\sin x dx-\cdots \\ &\qquad +(-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}\sin x dx \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}\sin x dx \end{aligned}$$

ここで

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}\sin x dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$

$$=-\frac{e^{-k\pi}(-1)^k}{2}+\frac{e^{-(k-1)\pi}(-1)^{k-1}}{2}\quad(\because\quad \cos k\pi=(-1)^k,\ \sin k\pi=0)$$

$$=\frac{(1+e^{-\pi})(-e^{-\pi})^{k-1}}{2}$$

となるので

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{(1+e^{-\pi})(-e^{-\pi})^{k-1}}{2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+e^{-\pi})(e^{-\pi})^{k-1}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1+e^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}} \end{aligned}$$　　(答)

(3) (2) より

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}=\boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}$$　　(答)

２６章　総合演習（９）

問題

【1】(1) $(a-1)x+y=1$ の表す直線を l，$(a+1)x+(2a-1)y=3$ の表す直線を m とおくと，与えられた方程式の解の個数は2直線 l，m の共有点の個数に一致する．

l と m が平行でないとき，l と m はただ1つの共有点をもつので不適．よって，$l \mathbin{/\!/} m$ となるので

$(a-1)\cdot(2a-1)-(a+1)\cdot 1=0$

$a(a-2)=0 \qquad \therefore\ a=0,\ 2$

$a=0$ のとき

$l: -x+y=1$

$m: x-y=3$

となり，l と m は共有点をもたないので不適．

$a=2$ のとき

$l: x+y=1$

$m: 3x+3y=3$

となり，l と m は一致する，すなわち共有点を無数にもつ．

したがって，求める a の値は

$\boldsymbol{a=2}$ 　(答)

(2) 与えられた方程式の解は

$x+y=1$ をみたすすべての実数の組 $(x,\ y)$

であるから，$y=1-x$ であり

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= x^3+(1-x)^3 \\ &= 3x^2-3x+1 \\ &= 3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって，x^3+y^3 は $x=\dfrac{1}{2}$ で最小値をとり，このとき

$y=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

以上より，x^3+y^3 の値を最小とする $(x,\ y)$ は

$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}$ 　(答)

【2】 $\mathrm{PQ}^2 = (\cos 2\theta - \cos\theta)^2 + (\sin 2\theta - \sin\theta)^2$

$$= \cos^2 2\theta - 2\cos 2\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2 2\theta - 2\sin 2\theta\sin\theta + \sin^2\theta$$
$$= 2 - 2(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta)$$
$$= 2 - 2\cos(2\theta - \theta)$$
$$= 2 - 2\cos\theta$$

また，同様に

$$\mathrm{QR}^2 = 2 - 2\cos 2\theta$$

となるので

$$\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{QR}^2 = 4 - 2(\cos\theta + \cos 2\theta)$$
$$= 6 - 2\cos\theta - 4\cos^2\theta$$
$$= -4\left(\cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

よって，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より

$\mathbf{0 \leqq PQ^2 + QR^2 \leqq \dfrac{25}{4}}$ (答)

【3】(1) $\quad |qx+py| < pq+xy \quad \cdots ①$

$p > |x|,\ q > |y|$ より

$pq + xy > |x||y| + xy = |xy| + xy \geqq 0$

よって，①の両辺は正であり

$① \iff (qx+py)^2 < (pq+xy)^2$

ここで

$$\begin{aligned}(pq+xy)^2-(qx+py)^2 &= p^2q^2+2pqxy+x^2y^2-q^2x^2-2pqxy-p^2y^2\\ &= p^2q^2+x^2y^2-q^2x^2-p^2y^2\\ &= p^2(q^2-y^2)-x^2(q^2-y^2)\\ &= (p^2-x^2)(q^2-y^2)\end{aligned}$$

であり，$p > |x|,\ q > |y|$ より $p^2 > x^2,\ q^2 > y^2$ であるから

$(p^2-x^2)(q^2-y^2) > 0$

すなわち

$(pq+xy)^2 > (qx+py)^2$

が成立する．したがって，$|qx+py| < pq+xy$ が成立する．（証終）

(2) $\quad |qx+py| > pq+xy \quad \cdots ②$

(i) $pq+xy \geqq 0$ のとき

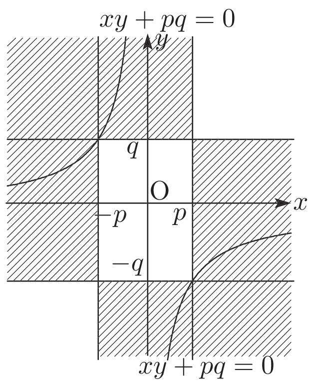
$$\begin{aligned}② &\iff (x^2-p^2)(y^2-q^2) < 0\\ &\iff \begin{cases}|x| < p,\ |y| > q\\ |x| > p,\ |y| < q\end{cases} \quad \cdots ②'\end{aligned}$$

(ii) $pq+xy < 0$ のとき，② はつねに成立する．

(i)，(ii) より，求める $(x,\ y)$ の領域は

$$\begin{cases}pq+xy \geqq 0 \text{ かつ } ②'\\ pq+xy < 0\end{cases}$$

であり，これを図示すると右図の斜線部分のようになる．ただし，境界はすべて含まない．



【4】(1) $f(x)=ax^2+bx+c$ より

$$f(0)=c \cdots\cdots ①$$

$$f(1)=a+b+c \cdots\cdots ②$$

$$f(2)=4a+2b+c \cdots\cdots ③$$

であり，③ $-$ ② $\times 2$ より

$$2a-c=f(2)-2f(1) \qquad \therefore \quad 2a=f(2)-2f(1)+f(0) \quad (\because \ ①)$$

であり，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ がいずれも整数であるから，$2a$ は整数である．

また，③より

$$2b=f(2)-2\{f(2)-2f(1)+f(0)\}-f(0)$$

$$=-f(2)+4f(1)-3f(0)$$

であり，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ がいずれも整数であるから，$2b$ は整数である．

以上より，$2a$，$2b$ はともに整数である．（証終）

(2) m を整数とする．$n=2m$ のとき

$$f(2m)=4am^2+2bm+c$$

$$=2a\cdot 2m^2+2b\cdot m+c$$

であり，$2a$，$2b$，$2m^2$，m，$c(=f(0))$ はいずれも整数なので，$f(2m)$ は整数である．

$n=2m+1$ のとき

$$f(2m+1)=a(4m^2+4m+1)+b(2m+1)+c$$

$$=2a(2m^2+2m)+2b\cdot m+a+b+c$$

であり，$2a$，$2b$，$2m^2+2m$，m，$a+b+c(=f(1))$ はいずれも整数なので，$f(2m+1)$ は整数である．

以上より，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数である．（証終）

【5】(1) 分母・分子を x^4 で割ると

$$\frac{(x+y)^4}{x^4+y^4}=\frac{\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^4}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^4}\quad\cdots\cdots ①$$

$\dfrac{y}{x}=t$ とおくと，$x>0$，$y>0$ より

$t>0$

であり，①の右辺は

$$\frac{(1+t)^4}{1+t^4}$$

と書け，これを $f(t)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{4(1+t)^3(1+t^4)-4t^3(1+t)^4}{(1+t^4)^2}$$
$$=\frac{4(1-t^3)(1+t)^3}{(1+t^4)^2}$$

であるから，$f(t)$ の増減は下表のようになる．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	8	$\searrow$

よって，$t=1$ すなわち $x=y$ のとき，極大かつ最大となるので，求める最大値は

8　(答)

(2) $x>0$，$y>0$ より x^xy^y の自然対数をとると

$x\log x+y\log y$

$x+y=1$ より

$x\log x+y\log y=x\log x+(1-x)\log(1-x)$

この右辺を $g(x)$ とおくと

$$g'(x)=\log x+1-\log(1-x)-1=\log\frac{x}{1-x}$$

また，$x>0$，$y>0$，$x+y=1$ より

$0<x<1$

なので，$0<x<1$ における $g(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\log\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

$g(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ のとき極小かつ最小であり，$g(x)$ が最小のとき，x^xy^y も最小になるので，求める最小値は

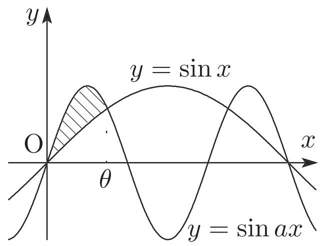
$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　(答)

【6】(1) θ は $\sin a\theta = \sin\theta$ を満たす最小の正の解であるから

$$a\theta = \pi - \theta$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{a+1}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 右図の斜線部分の面積を求めればよく



$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{\theta} (\sin ax - \sin x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{a}\cos ax + \cos x\right]_0^{\theta} \\ &= -\frac{1}{a}(\cos a\theta - 1) + \cos\theta - 1 \\ &= -\frac{1}{a}\cos(\pi - \theta) + \cos\theta + \frac{1}{a} - 1 \\ &= \frac{1}{a}\cos\theta + \cos\theta + \frac{1}{a} - 1 \ \cdots\cdots\ (*) \\ &= \boldsymbol{\frac{a+1}{a}\cos\frac{\pi}{a+1} - \frac{a-1}{a}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) $(*)$ より

$$\begin{aligned} (a+1)S(a) &= \frac{a+1}{a}\cos\theta + (a+1)\cos\theta + \frac{a+1}{a} - (a+1) \\ &= \frac{a+1}{a}\cos\theta + \frac{a+1}{a} + (a+1)(\cos\theta - 1) \\ &= \frac{a+1}{a}\cos\theta + \frac{a+1}{a} - \frac{\pi}{\theta}\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{a+1}{a}\cos\theta + \frac{a+1}{a} - \pi\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

(1) より，$a \to \infty$ のとき，$\theta \to 0$ であるから

$$\boldsymbol{\lim_{a\to\infty}(a+1)S(a) = 2} \qquad \text{(答)}$$

【7】R$(x,\ 0,\ 0)$ とおく．R を通り x 軸に垂直な平面でこの立体を切断すると，断面は△PQR となり，その面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{QR} = \frac{1}{2}\cos^2 x(1 - \sin x)$$

よって，求める立体の体積を V とおくと

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos^2 x(1 - \sin x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 2x + 1}{2} - \sin x\cos^2 x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\pi - 4}{24}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【8】半円の中心を O とすると

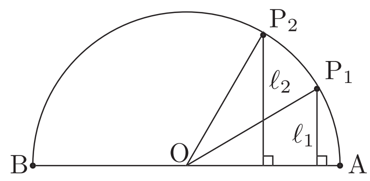
$$\angle \mathrm{AOP}_1 = \angle \mathrm{P}_k\mathrm{OP}_{k+1} = \angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{OB}$$
$$= \frac{\pi}{n}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2)$$

であるから

$$\ell_k = \sin\frac{k\pi}{n}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ell_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$= \int_0^1 \sin\pi x\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{\pi}} \qquad (答)$$



M3MA

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学 M

Z-KAI

会員番号		氏　名	

不許複製