

本科 2 期 12 月度

解答

Z会東大進学教室

高 2 東大物理導入



11章 単振動（3）

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) それぞれの場合の運動方程式は,

$$\begin{cases} \text{図 1 の場合} \cdots ma = -mg & \therefore a = -g \\ \text{図 2 の場合} \cdots ma = -ky - mg & \cdots (*) \end{cases}$$

(2) 振動の中心位置を $y = y_0$ とすると、この位置では $a = 0$ なので、

$$m \cdot 0 = -ky_0 - mg \quad \therefore y_0 = -\frac{mg}{k}$$

y_0 を用いて (*) を書き換えると、

$$ma = ky_0 - ky \quad \therefore a = -\frac{k}{m}(y - y_0)$$

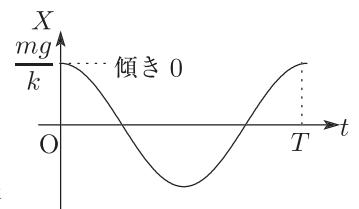
$y - y_0 = X$ とおくと $a = -\frac{k}{m}X$ となるので、図 2 の場合の運動は単振動と分かり、角振動数を ω 、周期を T とする

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(3) 図 1 の場合は、 $v - t$ グラフと t 軸の間の面積より、

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

図 2 の場合は、初期条件をふまえると $X - t$ グラフは右図のようになり、つり合いの位置からのずれが $X = \frac{mg}{k} \cos(\omega t)$ と表せるので、



$$y - y_0 = \frac{mg}{k} \cos(\omega t) \quad \therefore y = -\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

【2】

《解答》

(ア) つり合いの位置を $x = x_1$ とすると,

$$0 = mg - kx_1 \quad \therefore \quad x_1 = \frac{mg}{k}$$

(イ) (ア) をふまえると,

$$mg \cdot (-x_1) + \frac{1}{2}kx_1^2 = -\frac{(mg)^2}{2k}$$

(ウ) 位置 x における運動方程式は,

$$\begin{cases} 2m \cdot a = 2mg - N & \cdots \textcircled{1} \\ m \cdot a = mg + N - kx & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① + ② より,

$$3ma = 3mg - kx \quad \cdots (*)$$

振動の中心位置を $x = x_2$ とすると, この位置では $a = 0$ なので,

$$3mg - kx_2 = 0 \quad \therefore \quad x_2 = \frac{3mg}{k}$$

(エ) x_2 を用いて (*) を書き換えると,

$$3ma = kx_2 - kx \quad \therefore \quad a = -\frac{k}{3m}(x - x_2)$$

$x - x_2 = X$ とおくと, $a = -\frac{k}{3m}X$ となるので, 運動は単振動と分かり,

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{k}{3m}} \quad \therefore \quad \text{周期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{k}}$$

(オ) $2mg - N$

(カ) $mg + N - kx$

(キ) ① - ② × 2 より,

$$0 = -N - 2(N - kx) \quad \therefore \quad N = \frac{2}{3}kx$$

おもりが板から離れる位置を $x = x_3$ とすると, この位置では $N = 0$ なので,

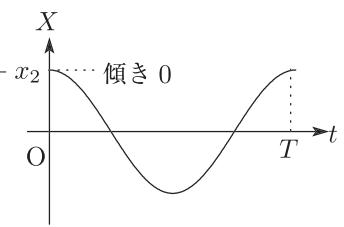
$$\frac{2}{3}kx_3 = 0 \quad \therefore \quad x_3 = 0$$

(ク) 初期条件をふまえると, $X - t$ グラフは右図で表され,

つり合いの位置からのずれは $X = (x_0 - x_2) \cos(\omega t)$
と表せるので,

$$x - x_2 = (x_0 - x_2) \cos(\omega t)$$

$$\therefore x = x_2 + (x_0 - x_2) \cos(\omega t)$$



(キ) より, おもりが板から離れないための条件が $x_{\min} \geq 0$ なので, 離れるための条件は形
式上 $x_{\min} < 0$ として得られ,

$$\frac{3mg}{k} + \left(x_0 - \frac{3mg}{k} \right) \cdot (-1) < 0 \quad \therefore x_0 > \frac{6mg}{k}$$

【3】

《解答》

(a) 鉛直方向の力のつり合いより、垂直抗力 N は $N = mg$ と分かる。よって、滑り出すための条件は、

$$ka > \mu mg \quad \therefore \quad a > \frac{\mu mg}{k}$$

(b) 小物体が左へ滑っているとき、ばねの伸びが x の位置における加速度の x 成分を α とするとき、 x 方向の運動方程式は、

$$m\alpha = -kx + \mu' \cdot mg \quad \cdots (*)$$

振動の中心位置を $x = x_0$ とすると、この位置では $\alpha = 0$ なので、

$$m \cdot 0 = -kx_0 + \mu' mg \quad \therefore \quad x_0 = \frac{\mu' mg}{k}$$

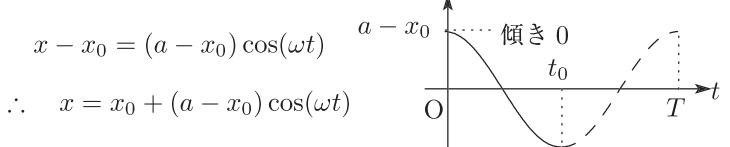
x_0 を用いて (*) を書き換えると、

$$m\alpha = -kx + kx_0 \quad \therefore \quad \alpha = -\frac{k}{m}(x - x_0)$$

$x - x_0 = X$ とおくと $\alpha = -\frac{k}{m}X$ となるので、運動は単振動と分かり、

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore \quad \text{周期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

初期条件をふまえると、 $X - t$ グラフは右下図のようになり、つり合いの位置からのずれは $X = (a - x_0) \cos(\omega t)$ と表せるので、



以上より、左端の位置は、

$$x_{\min} = \frac{\mu' mg}{k} + \left(a - \frac{\mu' mg}{k} \right) \cdot (-1) = \frac{2\mu' mg}{k} - a$$

(c) 求める時間を t_0 とおくと、

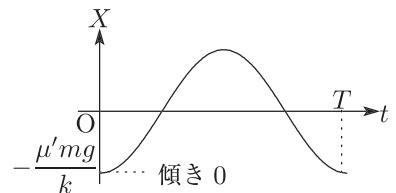
$$t_0 = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(d) 小物体は常に左向きに滑った状態にあるので、小物体の速度が右向きのときも運動方程式は (*) で表され、周期は $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ と分かる。

(b) のときと同様に初期条件をふまえると、 $X - t$ グラフは右図のようになるので、

$$X = -\frac{\mu' mg}{k} \cos(\omega t) \quad \therefore \text{(振幅)} = \frac{\mu' mg}{k}$$

(e) 変位の符号に注意すると、



$$\begin{cases} \text{右向きに移動する間の仕事} \cdots \mu' mg \times \frac{2\mu' mg}{k} = \frac{2(\mu' mg)^2}{k} \\ \text{左向きに移動する間の仕事} \cdots \mu' mg \times \left(-\frac{2\mu' mg}{k}\right) = -\frac{2(\mu' mg)^2}{k} \end{cases}$$

【4】

《解答》

I (1) $\beta = \alpha \sin \theta \quad \dots \textcircled{1}$

(2) $m\alpha = -kl \sin \theta \quad \dots \textcircled{2}$

II (1) 斜面から受ける垂直抗力を N として、斜面に垂直方向の力のつり合いより、

$$N - kl \cos \theta = 0 \quad \therefore N = kl \cos \theta$$

$l = l_1$ のとき、 $N = 0$ となるので、

$$kl_1 \cos \theta = 0 \quad \therefore l_1 = 0$$

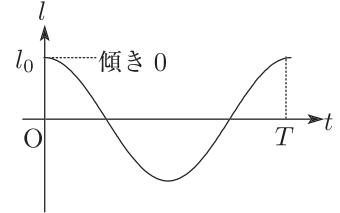
(2) ①、②より、 α を消去すると、 l 方向の運動について、

$$m \cdot \frac{\beta}{\sin \theta} = -kl \sin \theta \quad \therefore \beta = -\frac{k \sin^2 \theta}{m} l$$

運動は単振動と分かり、

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{k \sin^2 \theta}{m}} \quad \therefore \text{ 周期 } T = \frac{2\pi}{\sin \theta} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

初期条件をふまえると、 $l - t$ グラフは右図のようになる
ので、



$$t_1 = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2 \sin \theta} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

III 小球が斜面から離れた後における加速度の l 方向成分を β' とすると、運動方程式は、

$$m\beta' = -kl \quad \therefore \beta' = -\frac{k}{m}l$$

運動は単振動と分かり、

$$\text{角振動数 } \omega' = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore \text{ 周期 } T' = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

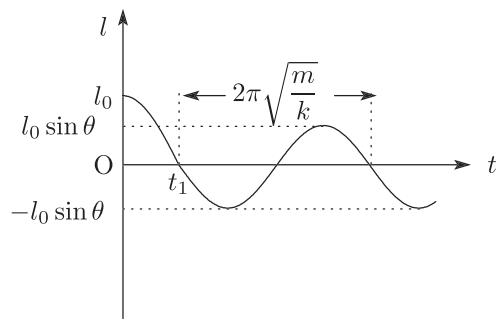
また、小球が斜面から離れるときの速さを v_1 として、力学的エネルギーの保存より、

$$0 + \frac{1}{2}kl_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \quad \therefore v_1 = l_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

小球が斜面から離れた後では水平方向で力が作用しないので、速度の水平成分は変化せず $v_1 \cos \theta$ と表せる。さらに小球が斜面から離れた後の単振動の振幅を A とすると、力学的エネルギーの保存より、

$$0 + \frac{1}{2}kl_0^2 = \frac{1}{2}m \left(l_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2}kA^2 \quad \therefore A = l_0 \sin \theta$$

以上より、小球の位置 l の時間変化を表すグラフは下図のようになる。



12章 力積と運動量

問題

■演習

【1】

《解答》

(ア) $m_1 v$

(イ) $0 - m_1 v = -F_1 \Delta T_1$

(ウ) 与えられた数値を(イ)に代入すると,

$$-5.0 \times 10 = -F_1 \times 0.025 \quad \therefore F_1 = 2.0 \times 10^3 \text{ N}$$

(エ) $\frac{2.0 \times 10^3 \text{ N}}{5.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 4.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

(オ) 求める質量を M とすると,

$$M \cdot 10 = 4.0 \times 10^6 \quad \therefore M = 4.0 \times 10^5 \text{ kg}$$

(カ) (イ)と同様に立式して、与えられた数値を代入すると、

$$-70 \times 10 = -F_2 \times 0.50 \quad \therefore F_2 = 1.4 \times 10^3 \text{ N}$$

(ア) 力の作用する時間が長いから

(キ)

$$\frac{1.4 \times 10^3 \text{ N}}{0.10 \text{ m}^2} = 1.4 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

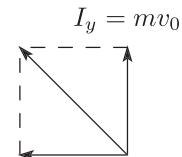
(б) 作用する力の大きさを小さくすること及び力を受ける面積を大きくすること。

[2]

《解答》

- (1) x 軸方向の正の向きに大きさ mv_0
- (2) y 軸方向の正の向きに大きさ mv_0
- (3) 求める力積の x 成分を I_x , y 成分を I_y として, 運動量と力積の関係より,

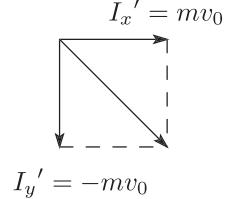
$$\begin{cases} 0 - mv_0 = I_x \\ mv_0 - 0 = I_y \end{cases}$$



これらを図示すると右図のようになる.

- (4) パイプが球から受ける反作用による力積の x 成分を I'_x , y 成分を I'_y とすると,

$$\begin{cases} I'_x = +mv_0 \\ I'_y = -mv_0 \end{cases}$$



これらを図示すると右図のようになる.

- (5) パイプの中を球ではなく水が通過する場合にも, パイプには (4) と同様に力積が加わる. このため, スプリンクラーは水が噴き出すと逆向きに回転することになり, 別な動力を用いることなしに回転しながら散水できる.

【3】

《解答》

(a) A は下向きを正, B は上向きを正とすると,

$$\begin{cases} m_A a = m_A g - T & \cdots ① \\ m_B a = T - m_B g & \cdots ② \end{cases}$$

(b) ① + ② より,

$$(m_A + m_B)a = (m_A - m_B)g \quad \therefore \quad a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}g$$

① × m_B - ② × m_A より,

$$0 = m_B(m_A g - T) - m_A(T - m_B g) \quad \therefore \quad T = \frac{2m_A m_B g}{m_A + m_B}$$

(c) 所要時間を t とすると,

$$\begin{cases} v = at & \therefore t = \frac{v}{a} \\ H = \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

これらより, t を消去すると,

$$H = \frac{a}{2} \left(\frac{v}{a} \right)^2 \quad \therefore \quad v^2 = 2aH$$

これと (b) より,

$$v^2 = \frac{2gH(m_A - m_B)}{m_A + m_B} \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{2gH(m_A - m_B)}{m_A + m_B}}$$

(ア) 力学的エネルギーの保存より,

$$0 + m_A g x_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + 0 \quad \therefore \quad x_A = \frac{v_A^2}{2g}$$

(イ) (ア) と同様に,

$$0 + m_B g x_B = \frac{1}{2} m_B v^2 + 0 \quad \therefore \quad x_B = \frac{v^2}{2g}$$

(ウ) $v_A = ev$

(エ) (ア), (イ) より,

$$v_A = \sqrt{2gx_A}, \quad v = \sqrt{2gx_B}$$

これらと (ウ) より,

$$\sqrt{2gx_A} = e\sqrt{2gx_B} \quad \therefore \quad e = \sqrt{\frac{x_A}{x_B}}$$

[4]

《解答》

$$(1) (\text{ア}) \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_0$$

$$(\text{イ}) v_1 = \sqrt{2gh_0}$$

(ウ) 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_A \quad \therefore v_A = \sqrt{2gh_A}$$

$$(\text{エ}) e_A = \frac{v_A}{v_1} = \sqrt{\frac{h_A}{h_0}}$$

(オ) 球Bの場合、(エ)で h_A が h_B に置き換わるので、

$$e_B = \frac{v_B}{v_1} = \sqrt{\frac{h_B}{h_0}} \quad \therefore \frac{e_A}{e_B} = \sqrt{\frac{h_A}{h_B}}$$

(2) (a) 点Qにおける速さを v として、力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgd \sin 30^\circ \quad \therefore v = \sqrt{gd}$$

点Qにおける速度の向きも考えると、

$$\begin{cases} v_x = v \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}gd}{2} \\ v_z = v \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{gd}}{2} \end{cases}$$

(b) 点Qを出てから板Pに到達するまでの時間を t_1 とおき、 z 方向の運動に注目すると、

$$\frac{\sqrt{gd}}{2} \cdot t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 = d \quad \therefore \left(t_1 - \sqrt{\frac{d}{g}} \right) \left(t_1 + 2\sqrt{\frac{d}{g}} \right) = 0$$

$t_1 > 0$ をふまえると $t_1 = \sqrt{\frac{d}{g}}$ と分かる。また、速度の x 成分は一定なので、

$$a = \frac{\sqrt{3gd}}{2} \cdot \sqrt{\frac{d}{g}} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$$

(c) 板Pに衝突する直前における速度の z 成分を v_z' とすると、

$$v_z' = v_z + gt_1 = \frac{3}{2}\sqrt{gd}$$

はねかえり係数 e ではねかえった直後の速度の z 成分は $-ev_z'$ となる。剛体球が板Pではねかえってから床に達するまでの時間を t_2 とおき、 z 方向の運動に注目すると、

$$-ev_z't_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 = 0 \quad \therefore t_2 = \frac{2e}{g} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{gd}$$

速度の x 成分は v_x のままなので,

$$b = \frac{\sqrt{3gd}}{2} \cdot \frac{3e}{g} \sqrt{gd} = \frac{3\sqrt{3}}{2} ed \quad \therefore \quad \begin{cases} b_A = \frac{3\sqrt{3}}{2} e_A d \\ b_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} e_B d \end{cases}$$

13章 運動量の保存

問題

■演習

【1】

《解答》

- (a) 鉛直方向の力のつり合いより、垂直抗力 N は $N = mg$ と分かる。加速度を a とすると、運動方程式は、

$$ma = -\mu \cdot mg \quad \therefore \quad a = -\mu g$$

- (b) 求める速度 v は

$$v = v_0 - \mu g t$$

- (c) $t = t_1$ のとき、 $v = 0$ となるので、

$$v_0 - \mu g t_1 = 0 \quad \therefore \quad t_1 = \frac{v_0}{\mu g}$$

- (d) $t = 0$ から t_1 までに受けた力積は、

$$-\mu m g \cdot t_1 = -m v_0 \quad \cdots \text{運動量の変化と一致している}.$$

- (e) $\mu m g$

- (f) 時刻 t における物体の速度を v 、板の速度を V とすると、

$$\begin{cases} mv - m v_0 = -\mu m g \cdot t \\ M V - M \cdot 0 = +\mu m g \cdot t \end{cases}$$

(g)
$$\begin{cases} v = v_0 - \mu g t \\ V = \frac{\mu m g}{M} t \end{cases}$$

- (h) $t = t_2$ のとき、 $v = V$ となるので、

$$v_0 - \mu g t_2 = \frac{\mu m g}{M} t_2 \quad \therefore \quad t_2 = \frac{M v_0}{\mu g (M + m)}$$

- (i) (f) より、

$$M V + m v - m v_0 = 0 \quad \therefore \quad m v + M V = m v_0$$

- (j) 求める速度を u として、(i) より、

$$m u + M u = m v_0 \quad \therefore \quad u = \frac{m}{M + m} v_0$$

【2】

《解答》

(1) 所要時間を t_0 とすると,

$$d = \frac{1}{2}at_0^2 \quad \therefore \quad t_0 = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

$$(2) v = at_0 = \sqrt{2ad}$$

$$(3) D = Vt_0 = V\sqrt{\frac{2d}{a}}$$

$$(4) MV = (M+m)W \cos \theta \quad \cdots ①$$

(5) (2) をふまえると,

$$m\sqrt{2ad} = (M+m)W \sin \theta \quad \cdots ②$$

(6) ①² + ②² より,

$$M^2V^2 + 2m^2ad = (M+m)^2W^2 \quad \therefore \quad W = \frac{\sqrt{M^2V^2 + 2m^2ad}}{M+m}$$

(7) $\frac{②}{①}$ より,

$$\frac{m\sqrt{2ad}}{MV} = \frac{(M+m)W \sin \theta}{(M+m)W \cos \theta} \quad \therefore \quad \tan \theta = \frac{m\sqrt{2ad}}{MV}$$

[3]

《解答》

$$(1) mv_1 \cos \theta_1 + mv_2 \cos \theta_2 = mv_0$$

$$(2) mv_1 \sin \theta_1 - mv_2 \sin \theta_2 = 0$$

$$(3) \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

(4) (1) より、

$$v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2 = v_0 \quad \cdots (1)$$

(2) より、

$$v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2 = 0 \quad \cdots (2)$$

$(1)^2 + (2)^2$ より、

$$v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) = v_0^2$$

これと (3) より $\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = 0$ と分かり、

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad \therefore \quad \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

【4】

《解答》

(1) 鉛直方向の力のつり合いより、垂直抗力 N は $N = mg$ と表せるので、摩擦力がした仕事 W は、

$$W = -\mu' mg \cdot l \quad \therefore |W| = \mu' mgl$$

(2) 運動エネルギーと仕事の関係より、

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu' mgl \quad \therefore v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu' gl}$$

(3) (a) 衝突後の離反速度は $v_2' - v_1'$ なので、

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1}$$

(b) 運動量保存則より、

$$mv_1 = mv_1' + mv_2'$$

(c) (a), (b) より、

$$\begin{cases} v_2' - v_1' = ev_1 & \cdots \textcircled{1} \\ v_1' + v_2' = v_1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より、

$$2v_1' = (1 - e)v_1 \quad \therefore v_1' = \frac{1 - e}{2} \sqrt{v_0^2 - 2\mu' gl}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より、

$$2v_2' = (1 + e)v_1 \quad \therefore v_2' = \frac{1 + e}{2} \sqrt{v_0^2 - 2\mu' gl}$$

(4) $e = 1$ のとき、 $v_1' = 0$ となるのでストーン A は静止する。

$0 < e < 1$ のとき、 $0 < v_1' < v_2'$ となるのでストーン A は B よりも小さい速さで x 軸の正の向きに進む。



会員番号	
氏名	