M1JK

本科 2 期 12 月度

解答

Z 会東大進学教室

高 1 東大数学 K

２４章　三角関数（３）－三角関数の合成－

問題

【1】(1) $\mathrm{P}(\sqrt{3},\,1)$ とすると

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2,\ \alpha=\frac{\pi}{6}$$

だから

$$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}\qquad(答)$$

(2)　$\mathrm{P}(-1,\,1)$ とすると

$$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\ \alpha=\frac{3}{4}\pi$$

だから

$$-\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}\qquad(答)$$

(3)　$\mathrm{P}(2,\,-3)$ とすると，$r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ だから

$$2\sin\theta-3\cos\theta=\boldsymbol{\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)}$$

$$\left(\textbf{ただし，}\boldsymbol{\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}}\right)\qquad(答)$$

(4)

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\theta&=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}-\cos\theta\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta-\cos\theta\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\,-\dfrac{1}{2}\right)$ とすると

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1,\ \alpha=\frac{11}{6}\pi$$

だから

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\theta&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\\&=\boldsymbol{\sin\left(\theta+\frac{11}{6}\pi\right)}\qquad(答)\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin\theta+2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)&=\sqrt{2}\sin\theta+2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\sin\theta+\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\theta\\&=2\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta\end{aligned}$$

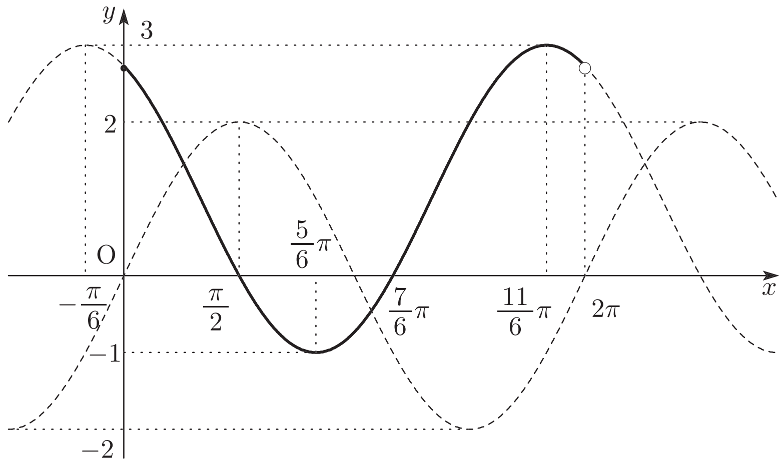
$\mathrm{P}(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ とすると，$r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$ だから

$$\sqrt{2}\sin\theta + 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)}$$
$$\left(\textbf{ただし，} \boldsymbol{\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}}\right) \qquad \text{(答)}$$

【2】(1)　$f(x) = -\sin x + \sqrt{3}\cos x + 1$ とおく．

$$y = f(x) = 2\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + 1$$

よって，$y = f(x)$ のグラフは，$y = 2\sin x$ のグラフを x 軸の正方向に $-\frac{2}{3}\pi$，y 軸の正方向に 1 平行移動したグラフだから，次の実線部分である．



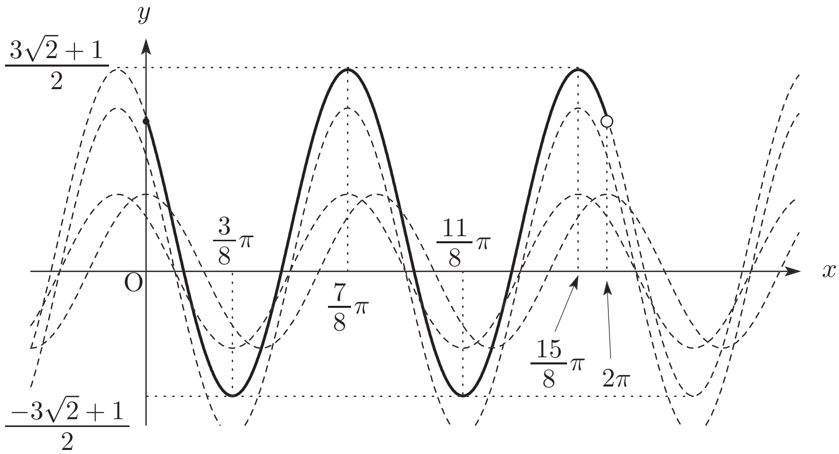
(答)

(2)　$f(x) = \cos^2 x + \cos 2x - 3\sin x\cos x$ とおく．

$$y = f(x)$$
$$= \frac{1+\cos 2x}{2} + \cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x$$
$$= \frac{3}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

であるから，まず，$y = \cos 2x$ のグラフを x 軸の正方向に $-\frac{\pi}{8}$ 平行移動して $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ とし，次に y 軸方向に $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 倍して $y = \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ とし，さらに y 軸の正方向に $\frac{1}{2}$ 平行移動したグラフが $y = \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$ である．

したがって，グラフは次の実線部分である．

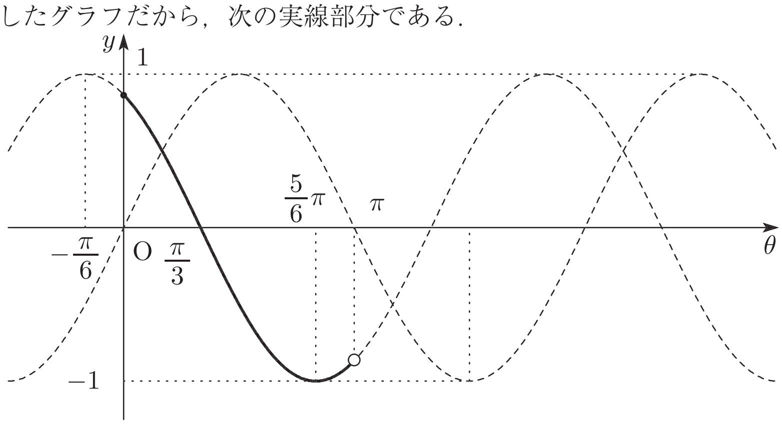


(答)

(3) $f(\theta)=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-2\sin\theta$ とおく.

$$
\begin{aligned}
y &= f(\theta)\\
&= \sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\theta\\
&= \sqrt{3}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\theta\\
&= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)-2\sin\theta\\
&= \frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-2\sin\theta\\
&= -\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\\
&= \sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)
\end{aligned}
$$

よって，$y=f(\theta)$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸の正方向に $-\dfrac{2}{3}\pi$ 平行移動したグラフだから，次の実線部分である.



(答)

【3】(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

よって

$$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$$
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

ここで，$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$ より，$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$，$\frac{13}{6}\pi$

したがって，$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$，$\boldsymbol{\frac{11}{6}\pi}$　　(答)

(2)

$$\sin\left(\theta-\frac{5}{6}\pi\right)+\cos\theta$$
$$=\sin\theta\cos\frac{5}{6}\pi-\cos\theta\sin\frac{5}{6}\pi+\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\cos\theta$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta=\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)$$

よって，$\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)=0$

ここで，$\frac{5}{6}\pi\leqq\theta+\frac{5}{6}\pi<\frac{17}{6}\pi$ より，$\theta+\frac{5}{6}\pi=\pi$，$2\pi$

したがって，$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$，$\boldsymbol{\frac{7}{6}\pi}$　　(答)

(3)

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

よって，$(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)=0$

ここで，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

また，$1-\sin\theta\cos\theta=1-\frac{1}{2}\sin2\theta$ だから，$-1\leqq\sin2\theta\leqq1$ より，

$\frac{1}{2}\leqq1-\sin\theta\cos\theta\leqq\frac{3}{2}$ だから，$1-\sin\theta\cos\theta\fallingdotseq0$

ゆえに，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$ より，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ より，$\theta+\frac{\pi}{4}=\pi$，2π

したがって，$\theta=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}$，$\boldsymbol{\frac{7}{4}\pi}$　　(答)

(4) 積→和の公式より

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$$
$$\frac{1}{2}\left\{\sin\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}+\sin\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right\}=1$$
$$\frac{1}{2}\left\{\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1\right\}=1$$
$$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$$

ここで，$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{25}{6}\pi$ より，$2\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{2}\pi$

よって，$\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7}{6}\pi}$　　(答)

＜別解＞

角を $\theta - \dfrac{\pi}{6}$ に統一すると

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$
$$\sin\left\{\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right\}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$
$$\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$
$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \pm 1$$

ここで，$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{11}{6}\pi$ より，$\theta - \dfrac{\pi}{6} = 0, \pi$

よって，$\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7}{6}\pi}$　　(答)

【4】(1)

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= 0 \\ (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x &= 0 \\ 2\sin 2x \cos(-x) + \sin 2x &= 0 \\ 2\sin 2x \cos x + \sin 2x &= 0 \\ \sin 2x(2\cos x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$\sin 2x = 0$ のとき，$0 \leqq 2x \leqq 2\pi$ より，$2x = 0$，π，2π だから，$x = 0$，$\dfrac{\pi}{2}$，π

$2\cos x + 1 = 0$ のとき，$\cos x = -\dfrac{1}{2}$

よって，$x = \dfrac{2}{3}\pi$

以上より，$x = \boldsymbol{0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi}$　　(答)

＜別解＞

2 倍角，3 倍角の公式を用いて

$$\begin{aligned} \sin x + 2\sin x\cos x + (3\sin x - 4\sin^3 x) &= 0 \\ 4\sin^3 x - 2\sin x\cos x - 4\sin x &= 0 \\ 2\sin x(2\sin^2 x - \cos x - 2) &= 0 \\ 2\sin x\{2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 2\} &= 0 \\ 2\sin x(-2\cos^2 x - \cos x) &= 0 \\ -2\sin x\cos x(2\cos x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

よって

$\sin x = 0$ より，$x = 0$, π

$\cos x = 0$ より，$x = \dfrac{\pi}{2}$

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$ より，$x = \dfrac{2}{3}\pi$

以上より，$x = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{\pi}{2}},\ \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi},\ \boldsymbol{\pi}$　　(答)

(2)　半角の公式，2 倍角の公式より

$$\cos^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta = 1$$
$$\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sqrt{3}\times\frac{\sin 2\theta}{2} = 1$$
$$\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta = 1$$
$$2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$
$$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{25}{6}\pi$

よって，$2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi$ より

$\boldsymbol{\theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi}$　　(答)

＜別解＞

明らかに，$\cos\theta \fallingdotseq 0$ より，両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$1 + \sqrt{3}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$1 + \sqrt{3}\tan\theta = \tan^2\theta + 1$$
$$\tan^2\theta - \sqrt{3}\tan\theta = 0$$
$$\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$$

$\tan\theta = 0$ のとき，$\theta = 0,\ \pi$

$\tan\theta = \sqrt{3}$ のとき，$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

以上より，$\theta = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{\pi}{3}},\ \boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi}$　　(答)

【5】(1)

$$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta > \sqrt{2}$$
$$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$$
$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$

よって，$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{3}{4}\pi$

したがって，$\boldsymbol{\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{7}{12}\pi}$　　(答)

(2)

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) &= \sin\left\{(\pi - \theta) + \frac{\pi}{2}\right\}\\ &= \cos(\pi - \theta)\\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

よって

$$\sin\theta+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\geqq 1$$
$$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\geqq 1$$
$$2\sin\left(\theta+\frac{5}{3}\pi\right)\geqq 1$$
$$\sin\left(\theta+\frac{5}{3}\pi\right)\geqq \frac{1}{2}$$

$\frac{5}{3}\pi\leqq\theta+\frac{5}{3}\pi<\frac{11}{3}\pi$ より

$$\frac{13}{6}\pi\leqq\theta+\frac{5}{3}\pi\leqq\frac{17}{6}\pi$$

したがって，$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi}$　　(答)

(3)　3 倍角の公式より

$$2\cos x+\cos 3x>0$$
$$2\cos x+4\cos^3 x-3\cos x>0$$
$$4\cos^3 x-\cos x>0$$
$$\cos x(2\cos x+1)(2\cos x-1)>0$$

$\cos x=0$ では与式は不成立であるから，$\cos x\neq 0$ である．

(i) $\cos x>0$ のとき

つまり，$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$2\cos x+1>0$ より

$$2\cos x-1>0$$
$$\cos x>\frac{1}{2}$$
$$\therefore 0\leqq x<\frac{\pi}{3}$$

(ii) $\cos x<0$ のとき

つまり，$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき，$2\cos x-1<0$ より

$$2\cos x+1>0$$
$$\cos x>-\frac{1}{2}$$
$$\therefore \frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi$$

よって，$\boldsymbol{0\leqq x<\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi}$　　(答)

(4) $\cos^2\theta - 3\cos\theta - \sin^2\theta + 3\sin\theta \geqq 0$

$(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 3(\cos\theta - \sin\theta) \geqq 0$

$(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) - 3(\cos\theta - \sin\theta) \geqq 0$

$(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta - 3) \geqq 0$

ここで

$\cos\theta + \sin\theta - 3 = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) - 3 \leqq \sqrt{2} - 3 < 0$

よって，$\cos\theta - \sin\theta \leqq 0$ より

$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{3}{4}\pi\right) \leqq 0$

ゆえに，$\sin\left(\theta + \dfrac{3}{4}\pi\right) \leqq 0$ であり，$\dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta + \dfrac{3}{4}\pi < \dfrac{11}{4}\pi$ であることより，

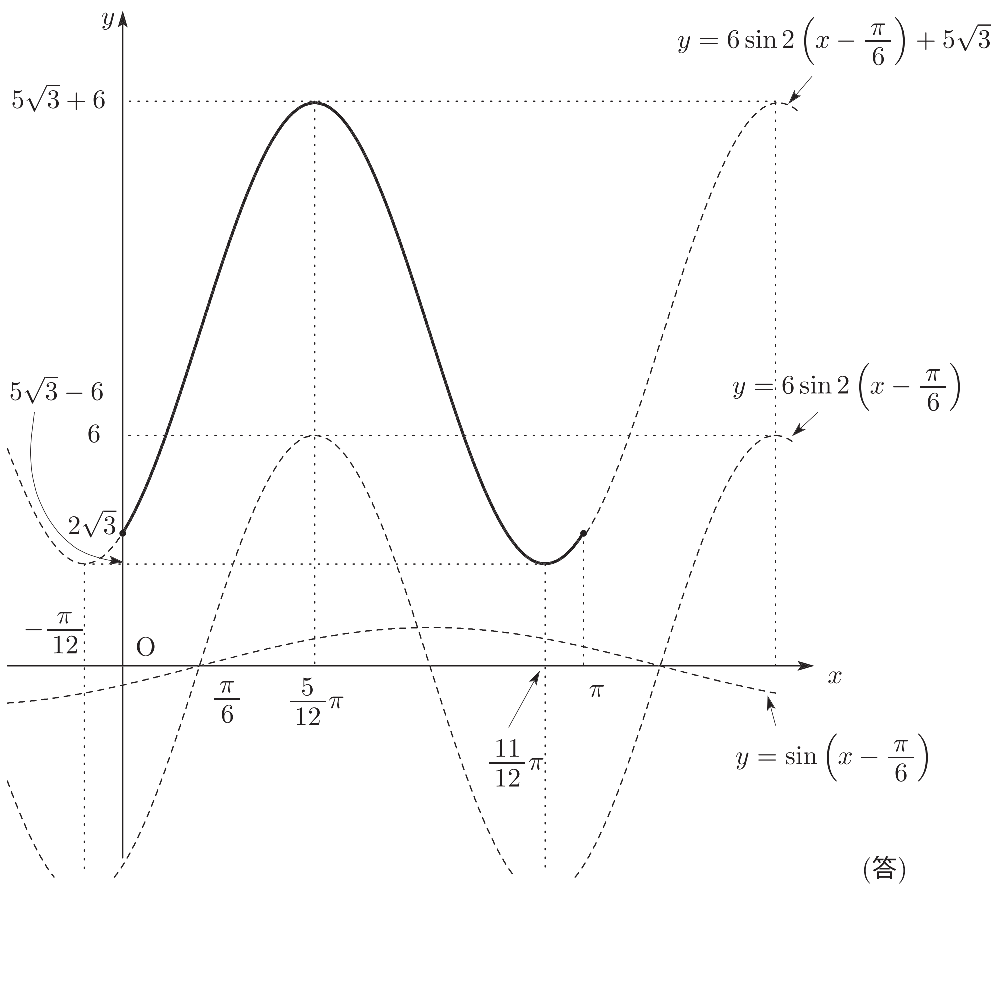
$\pi \leqq \theta + \dfrac{3}{4}\pi \leqq 2\pi$

$\therefore\ \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{4}\pi}$ (答)

【6】半角の公式，2 倍角の公式より

$$\begin{aligned}
y &= 8\sqrt{3}\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x \\
&= 6\sqrt{3} \times \frac{1-\cos 2x}{2} + 3 \times \sin 2x + 2\sqrt{3}(\sin^2 x + \cos^2 x) \\
&= 3\sqrt{3}(1-\cos 2x) + 3\sin 2x + 2\sqrt{3} \\
&= 3\sin 2x - 3\sqrt{3}\cos 2x + 5\sqrt{3} \\
&= 6\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 5\sqrt{3} \\
&= 6\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

である．この関数のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを x 軸の正方向に $\dfrac{\pi}{6}$ 平行移動して $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ とし，さらに，x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍，y 軸方向に 6 倍して $y = 6\sin 2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ とし，最後に，y 軸の正方向に $5\sqrt{3}$ 平行移動したものである．
よって，グラフは次のとおり．



(答)

問題

【1】(1) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = \mathbf{2\sqrt[3]{3}}$　　(答)

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{162}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\dfrac{162}{6}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^1 = \mathbf{3}$　　(答)

(3) $1024 = 2^{10}$ だから，

$$(\text{与式}) = \left\{(2^{10})^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{5}} = (2^{10})^{\frac{1}{10}} = \mathbf{2}$$　　(答)

(4) $\left(\dfrac{49}{64}\right)^{-1.5} = \left\{\left(\dfrac{7}{8}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{-3} = \mathbf{\dfrac{512}{343}}$　　(答)

(5)
$$\begin{aligned} 4^{-\frac{3}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}} \div \sqrt{16^{-3}} &= (2^2)^{-\frac{3}{2}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} \div \left\{(2^4)^{-3}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-3} \times 3^1 \div 2^{-6} = 2^{-3-(-6)} \times 3^1 \\ &= \mathbf{24} \end{aligned}$$　　(答)

(6) $\left(\sqrt[4]{5^3} \times \sqrt{27}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(5^{\frac{3}{4}} \times (3^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}} = 5 \times 3^2 = \mathbf{45}$　　(答)

(7)
$$\begin{aligned} &2\sqrt{3} \times \sqrt[3]{24} \div \sqrt{6} \div \sqrt[6]{72} \\ =&\left(2^1 \times 3^{\frac{1}{2}}\right) \times (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times (2 \times 3)^{-\frac{1}{2}} \times (2^3 \times 3^2)^{-\frac{1}{6}} \\ =&\left(2^1 \times 3^{\frac{1}{2}}\right) \times \left(2^1 \times 3^{\frac{1}{3}}\right) \times \left(2^{-\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(2^{-\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{3}}\right) \\ =&2^{1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^1 \times 3^0 = \mathbf{2} \end{aligned}$$　　(答)

(8)
$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{-54} \div \sqrt[3]{\sqrt[2]{128}} \div \sqrt[3]{-4} \\ =&-\sqrt[3]{54} \times \frac{1}{\sqrt[6]{128}} \times \frac{1}{-\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{54}{4}} \times \frac{1}{\sqrt[6]{128}} = \sqrt[3]{\frac{27}{2}} \times \frac{1}{\sqrt[6]{128}} \\ =&\frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{1}{\sqrt[6]{2^7}} = 3 \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{7}{6}} = 3 \times 2^{-\frac{1}{3}-\frac{7}{6}} = 3 \times 2^{-\frac{3}{2}} \\ =&\frac{3}{2\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \end{aligned}$$　　(答)

(9) $81 = 3^4$ だから，

$$(\text{与式}) = (3^4)^{-\frac{3}{4}} = 3^{-3} = \mathbf{\frac{1}{27}}$$　　(答)

(10)
$$\begin{aligned} &(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \\ =&(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \\ =&5 - 3 = \mathbf{2} \end{aligned}$$　　(答)

(11)
$$\begin{aligned} &\left(5^{\frac{1}{2}} + 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(5^{\frac{1}{2}} - 5^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(5^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \\ =&5^1 - 5^{-1} = 5 - \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{24}{5}} \end{aligned}$$　　(答)

(12) (与式) $= (\sqrt[3]{4})^3 - (\sqrt[3]{3})^3 = 4 - 3 = \mathbf{1}$ **(答)**

【2】(1)
$$\left(8\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{x^2} = \left(2^3 \times x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{2}{3}}$$
$$= 2^{3\times\frac{2}{3}} \times x^{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = 2^2 \times x^1 = \boldsymbol{4x} \quad \textbf{(答)}$$

(2)
$$\left(64x^3y^{-9}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^6 \times x^3 \times y^{-9}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(2^6\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(x^3\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(y^{-9}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 2^2 \times x^1 \times y^{-3} = \boldsymbol{\frac{4x}{y^3}} \quad \textbf{(答)}$$

(3) (与式) $= x^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x^1y^0 = \boldsymbol{x}$ **(答)**

(4)
$$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = x^1 + 2x^0 + x^{-1}$$
$$= \boldsymbol{x + 2 + \frac{1}{x}} \quad \textbf{(答)}$$

＜参考＞

(与式) $= \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \boldsymbol{x + 2 + \dfrac{1}{x}}$ **(答)**

(5) (与式) $= (x^{\frac{1}{2}} - 1)(x^{\frac{1}{2}} + 1) = \boldsymbol{x - 1}$ **(答)**

(6) $(x-y) \div \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) = \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) \div \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) = \boldsymbol{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ **(答)**

(7)
$$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\right)$$
$$= \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^1 + 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y^1 - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$
$$= \boldsymbol{x + \sqrt{xy} + y} \quad \textbf{(答)}$$

(8)
$$\left(x^{\frac{a}{3}} + y^{-\frac{a}{3}}\right)\left\{x^{\frac{2a}{3}} - \left(xy^{-1}\right)^{\frac{a}{3}} + y^{-\frac{2a}{3}}\right\} = \left(x^{\frac{a}{3}}\right)^3 + \left(y^{-\frac{a}{3}}\right)^3 = x^a + y^{-a}$$
$$= \boldsymbol{x^a + \frac{1}{y^a}} \quad \textbf{(答)}$$

(9)
$$\left(xy^{-3}z^3\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(x^7y^4z^2\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(x^{-5}yz\right)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{7}{3}-\frac{5}{6}}y^{-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}}z^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} = x^2y^0z^{\frac{7}{3}}$$
$$= \boldsymbol{x^2z^{\frac{7}{3}}} \quad \textbf{(答)}$$

(10) $\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}}\left(x^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}} = x^{\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}} = x^0 = \mathbf{1}$ **(答)**

(11)
$$\text{(与式)} = (x^3 - y^{-3}) \div (x^2 + xy^{-1} + y^{-2})$$
$$= (x - y^{-1})(x^2 + xy^{-1} + y^{-2}) \div (x^2 + xy^{-1} + y^{-2})$$
$$= \boldsymbol{x - \frac{1}{y}} \quad \textbf{(答)}$$

【3】(1) $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=9$ より，

$$x+x^{-1}+2=9$$

よって，

$$x+x^{-1}=\mathbf{7} \qquad \textbf{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned} x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}} &= \left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)\left\{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right\} \\ &= \left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x+x^{-1}-1\right) \\ &= 3\times(7-1)=\mathbf{18} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

【4】(1) $3^x-3^{-x}=3$ より，

$$\begin{aligned} (3^x-3^{-x})^2=3^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 3^{2x}-2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}+3^{-2x}=9 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3^{2x}+3^{-2x}=11 \end{aligned}$$

そして

$$(3^x+3^{-x})^2=3^{2x}+2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}+3^{-2x}=11+2=13$$

であり，$3^x+3^{-x}>0$ だから，

$$3^x+3^{-x}=\boldsymbol{\sqrt{13}} \qquad \textbf{(答)}$$

また，

$$\begin{aligned} 3^{3x}+3^{-3x} &= (3^x+3^{-x})(3^{2x}-3^x\cdot 3^{-x}+3^{-2x}) \\ &= \sqrt{13}\cdot(11-1) \\ &= \boldsymbol{10\sqrt{13}} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} a^2 &= 3^{10}+2\cdot 3^5\cdot 3^{-5}+3^{-10}=3^{10}+3^{-10}+2 \\ b^2 &= 3^{10}-2\cdot 3^5\cdot 3^{-5}+3^{-10}=3^{10}+3^{-10}-2 \end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 2(3^{10}+3^{-10}) \\ \therefore \quad 3^{10}+3^{-10} &= \boldsymbol{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

【5】(1) **$\boldsymbol{x}$ 軸方向に $\boldsymbol{-1}$，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に 2 平行移動したグラフ**　　**(答)**

(2) **$\boldsymbol{y}$ 軸について対称移動したグラフ**　　**(答)**

(3) **$\boldsymbol{y}$ 軸について対称移動したグラフを，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に 4 平行移動したグラフ**　　**(答)**

(4) $y=10^{-(x-1)}$ とみると，

$\boldsymbol{y}$ 軸について対称移動したグラフを，$\boldsymbol{x}$ 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフ(答)

あるいは，$y=10\cdot 10^{-x}$ とみると，

$\boldsymbol{y}$ 軸について対称移動したグラフを，$\boldsymbol{y}$ 軸の方向に 10 倍したグラフ　　**(答)**

(5) $y=10^{-(x-2)}-1$ とみると，

y 軸について対称移動したグラフを，

x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフ　　(答)

あるいは，$y=100\cdot 10^{-x}-1$ とみると，

y 軸について対称移動したグラフを，

y 軸の方向に 100 倍してから，y 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフ　　(答)

(6) $y=10^{2x}$ だから，

x 軸の方向に $\frac{1}{2}$ 倍したグラフ　　(答)

【6】(1) $10^{0.3}$，$10^{0.4}$，$0.1^{-2}=10^2$，$0.1^{\frac{1}{2}}=10^{-\frac{1}{2}}$ だから，

$$\mathbf{0.1^{\frac{1}{2}}}(<1)<\mathbf{10^{0.3}}<\mathbf{10^{0.4}}<\mathbf{0.1^{-2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $\dfrac{5^{999}}{2^{2331}}=\left(\dfrac{5^3}{2^7}\right)^{333}=\left(\dfrac{10^3}{2^{10}}\right)^{333}=\left(\dfrac{1000}{1024}\right)^{333}<1$ だから，

$$\mathbf{5^{999}}<\mathbf{2^{2331}} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) すべての数を 6 乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\quad \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=9,\quad \left(6^{\frac{1}{6}}\right)^6=6$$

だから，

$$\mathbf{6^{\frac{1}{6}}}<\mathbf{2^{\frac{1}{2}}}<\mathbf{3^{\frac{1}{3}}} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) $2^{30}=8^{10}$，$3^{20}=9^{10}$，7^{10} だから，$\mathbf{7^{10}}<\mathbf{2^{30}}<\mathbf{3^{20}}$ **(答)**

(5) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$ を 6 乗すると，

$$\left(\sqrt{2}\right)^6=2^3=8,\quad \left(\sqrt[3]{3}\right)^6=3^2=9$$
$$\therefore\quad \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$$

そして $\sqrt{2}$，$\sqrt[5]{5}$ を 10 乗すると

$$\left(\sqrt{2}\right)^{10}=2^5=32,\quad \left(\sqrt[5]{5}\right)^{10}=5^2=25$$
$$\therefore\quad \sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$$

以上より，

$$\boldsymbol{\sqrt[5]{5}}<\boldsymbol{\sqrt{2}}<\boldsymbol{\sqrt[3]{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(6) すべての数を 12 乗すると

$$\left(\sqrt{3}\right)^{12}=3^6=27^2=729,\quad \left(\sqrt[3]{5}\right)^{12}=5^4=25^2=625,$$
$$\left(\sqrt[4]{10}\right)^{12}=10^3=1000,\quad \left(\sqrt[6]{30}\right)^{12}=30^2=900$$

なので，

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{5}}<\boldsymbol{\sqrt{3}}<\boldsymbol{\sqrt[6]{30}}<\boldsymbol{\sqrt[4]{10}} \qquad \textbf{(答)}$$

(7) $\sqrt[3]{5}$，$\sqrt{3}$ を 6 乗すると，

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^6 = 5^2 = 25, \quad \left(\sqrt{3}\right)^6 = 3^3 = 27$$
$$\therefore \quad \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$$

そして $\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[4]{8}$ を 12 乗すると

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{12} = 5^4 = 625, \quad \left(\sqrt[4]{8}\right)^{12} = 8^3 = 512$$
$$\therefore \quad \sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5}$$

以上より，

$\boldsymbol{\sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}}$ **(答)**

(8) まず，$1.01^2 = 1.0201$ より

$$1.0201^{50} > 1.02^{50} \qquad \therefore (1.01^2)^{50} > 1.02^{50}$$

よって

$$1.01^{100} > 1.02^{50}$$

また，$1.02^5 = 1.104\cdots$，すなわち $1.02^5 > 1.10$ だから

$$(1.02^5)^5 > 1.10^5 = 1.610\cdots \qquad \therefore 1.02^{25} > 1.610$$

ここで，$\sqrt{2} = 1.414\cdots$ だから

$$\sqrt{2} < 1.02^{25}$$

両辺正だから，両辺を 2 乗して

$$2 < 1.02^{50}$$

以上より

$\boldsymbol{2 < 1.02^{50} < 1.01^{100}}$ (答)

【7】(1) $27^x = 3^{3x}$，$\dfrac{1}{3} = 3^{-1}$ だから，

$3x = -1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x = -\dfrac{1}{3}}$ (答)

(2) 与式より，

$$16^{10} = 1024^x$$

ここで，

$$16^{10} = \left(2^4\right)^{10} = 2^{40} = 1024^x = 2^{10x}$$

よって，$2^{10x} = 2^{40}$ より，

$10x = 40 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x = 4}$ (答)

(3) $2^x = X$ とおくと

$$2X^2 - 8X - 64 = 0 \iff (X+4)(X-8) = 0$$

$X > 0$ より,

$$X = 8$$

よって,

$$2^x = 8$$

ゆえに,

$$\boldsymbol{x = 3} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) $\dfrac{1}{3^x} = X$ とおくと,

$$\begin{aligned} 3X^2 - 10X + 3 = 0 &\iff (3X-1)(X-3) = 0 \\ &\iff X = \frac{1}{3},\ 3 \end{aligned}$$

よって,

$$3^{-x} = 3^{-1},\ 3^1$$

ゆえに,

$$\boldsymbol{x = 1,\ -1} \qquad \textbf{(答)}$$

(5) $$3^{-x} > 3^{-3} > 3^{2(1-x)}$$

底が 1 より大きいから,

$$-x > -3 > 2(1-x)$$

これを解くと,

$$\boldsymbol{\frac{5}{2} < x < 3} \qquad \textbf{(答)}$$

(6) $2^x = X$ とおくと $X > 0$ で,

$$X^2 - 2X < 0 \iff X(X-2) < 0$$

なので,

$$0 < X < 2$$

よって,

$$0 < 2^x < 2^1$$

底が 1 より大きいから,

$$\boldsymbol{x < 1} \qquad \textbf{(答)}$$

(7) $3^x = X$ とおくと $X > 0$ で,

$$
\begin{aligned}
9^x - 3^{x+2} &> 3^x - 9 \\
(3^x)^2 - 3^2 \cdot 3^x &> 3^x - 9 \\
X^2 - 9X &> X - 9 \\
X^2 - 10X + 9 &> 0 \\
(X-1)(X-9) &> 0 \\
\therefore 0 < X < 1,\ 9 < X
\end{aligned}
$$

よって,

$$0 < 3^x < 1,\ 9 < 3^x$$

底が 1 より大きいから,求めるべき範囲は

$$\boldsymbol{x < 0,\ 2 < x} \qquad \textbf{(答)}$$

【8】(1) $y = -3^{x-2}$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ において単調減少なので,

$$\begin{cases} \textbf{最大値} \quad \boldsymbol{-\dfrac{1}{27}} \quad \boldsymbol{(x = -1\text{ のとき})} \\ \textbf{最小値} \quad \boldsymbol{-\dfrac{1}{3}} \quad \boldsymbol{(x = 1\text{ のとき})} \end{cases} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $2^x = X$ とおくと,$-1 \leqq x \leqq 2$ より,$\dfrac{1}{2} \leqq X \leqq 4$ で,

$$
\begin{aligned}
y &= X^2 - 4X + 1 \\
&= (X-2)^2 - 3 \qquad \left(\frac{1}{2} \leqq X \leqq 4\right)
\end{aligned}
$$

よって,$X = 2$ のとき,つまり,$x = 1$ のとき,y は最小値 -3
$X = 4$ のとき,つまり,$x = 2$ のとき,y は最大値 1 をとる.
したがって,

$$\begin{cases} \textbf{最大値} \quad \boldsymbol{1} \quad (\boldsymbol{x = 2}\textbf{ のとき}) \\ \textbf{最小値} \quad \boldsymbol{-3} \quad (\boldsymbol{x = 1}\textbf{ のとき}) \end{cases} \qquad \textbf{(答)}$$

２６章　指数・対数関数（２）－対数関数－

問題

【1】(1) $\log_2 64=\log_2 2^6=\mathbf{6}$　(答)

(2) $\log_{10} 0.1=\log_{10} 10^{-1}=-\mathbf{1}$　(答)

(3) $\log_{\sqrt{2}} 16=\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^8=\mathbf{8}$　(答)

(4) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$　(答)

(5) $\log_8 128=\log_8 8^{\frac{7}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$　(答)

＜参考＞ $\log_8 128=\log_{2^3} 2^7=\log_{2^3}\left(2^3\right)^{\frac{7}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$　(答)

(6) $\log_{125}\dfrac{1}{25}=\log_{125} 125^{-\frac{2}{3}}=-\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$　(答)

＜参考＞ $\log_{125}\dfrac{1}{25}=\log_{5^3} 5^{-2}=\log_{5^3}\left(5^3\right)^{-\frac{2}{3}}=-\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$　(答)

(7) $\log_a b=c$ とおくと,

$a^{\log_a b}=a^c=\boldsymbol{b}$　(答)

(8) $8^{\log_2 3}=2^{3\log_2 3}=2^{\log_2 3^3}=3^3=\mathbf{27}$　(答)

【2】(1) $\log_2 45=\log_2\left(3^2\times 5\right)=\log_2 3^2+\log_2 5=\boldsymbol{2a+b}$　(答)

(2) $\log_2 0.6=\log_2\dfrac{3}{5}=\log_2 3-\log_2 5=\boldsymbol{a-b}$　(答)

(3) $\log_2\dfrac{10}{9}=\log_2(2\times 5\div 3^2)=\log_2 2+\log_2 5-\log_2 3^2=\boldsymbol{1+b-2a}$　(答)

(4)
$$\begin{aligned}\log_2\frac{\sqrt[4]{27}\sqrt{6}}{\sqrt[3]{0.4}}&=\log_2\left(3^{\frac{3}{4}}\times(2\times 3)^{\frac{1}{2}}\div\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\\&=\log_2\left(3^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}\right)\\&=\log_2\left(2^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{5}{4}}\times 5^{\frac{1}{3}}\right)\\&=\log_2 2^{\frac{1}{6}}+\log_2 3^{\frac{5}{4}}+\log_2 5^{\frac{1}{3}}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}+\frac{5}{4}a+\frac{1}{3}b}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$

【3】(1) (与式) $=\log_6(3\times 12)=\log_6 6^2=\mathbf{2}$　(答)

(2) (与式) $=\log_5(10\div 2)=\log_5 5=\mathbf{1}$　(答)

(3) (与式) $=\log_{10}\left(4\div 5\times\left(\sqrt{125}\right)^2\right)=\log_{10} 10^2=\mathbf{2}$　(答)

(4) (与式) $=\log_2\left(\sqrt{\dfrac{7}{48}}\times 12\div 21^{\frac{1}{2}}\right)=\log_2 1=\mathbf{0}$　(答)

(5) $(与式) = \log_{0.5}\left(\dfrac{8}{13}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\times\dfrac{26}{9}\right)$

$= \log_{0.5} 4 = \log_{0.5} 2^2 = \log_{0.5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{0.5} 0.5^{-2}$

$= \mathbf{-2}$ (答)

(6) $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

よって,

$(与式) = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{2} = \mathbf{1}$ (答)

【4】(1) $(与式) = \dfrac{\log_{10} 27}{\log_{10} 4}\cdot\dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 9} = \dfrac{3\log_{10} 3}{2\log_{10} 2}\cdot\dfrac{3\log_{10} 2}{2\log_{10} 3} = \mathbf{\dfrac{9}{4}}$ (答)

(2) $(与式) = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} + \dfrac{2\log_{10} 7}{\log_{10} 4} - \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10}\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} + \dfrac{2\log_{10} 7}{2\log_{10} 2} - \dfrac{\log_{10} 7}{\frac{1}{2}\log_{10} 2}$

$= \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} + \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} - \dfrac{2\log_{10} 7}{\log_{10} 2}$

$= \mathbf{0}$ (答)

＜別解＞

$(与式) = \dfrac{\log_2 7}{\log_2 2} + \dfrac{2\log_2 7}{\log_2 4} - \dfrac{\log_2 7}{\log_2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\log_2 7}{\log_2 2} + \dfrac{2\log_2 7}{2\log_2 2} - \dfrac{\log_2 7}{\frac{1}{2}\log_2 2}$

$= \dfrac{\log_2 7}{1} + \dfrac{\log_2 7}{1} - \dfrac{2\log_2 7}{1} = \mathbf{0}$ (答)

(3) $\log_a b\times\log_b c\left(=\log_a b\times\dfrac{\log_a c}{\log_a b}\right) = \log_a c$ を利用して,

$(与式) = \log_3 2\cdot\log_2 9 - \log_3 2\cdot\log_4 3 - \log_9 2\cdot\log_2 9 + \log_9 2\cdot\log_4 3$

$= \log_3 9 - \log_4 2 - \log_2 2 + \log_9 2\cdot\log_4 3$

$= 2 - \dfrac{1}{2} - 1 + \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 9}\cdot\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\log_{10} 2}{2\log_{10} 3}\cdot\dfrac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 2}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$ (答)

(4) $(与式) = \log_{a^3} c^2\cdot\log_{\sqrt{c}} a^3 = \log_{\sqrt{c}} c^2 = \log_{\sqrt{c}}(\sqrt{c})^4 = \mathbf{4}$ (答)

【5】(1) 底を 2 にそろえると

$$\log_3 0.5 = \frac{\log_2 0.5}{\log_2 3} = \frac{\log_2 2^{-1}}{\log_2 3} = -\frac{1}{\log_2 3}$$

$$\log_2 0.5 = \log_2 2^{-1} = -1$$

$$\log_{0.2} 0.5 = \frac{\log_2 0.5}{\log_2 0.2} = \frac{\log_2 2^{-1}}{\log_2 5^{-1}} = \frac{1}{\log_2 5}$$

ここで，

$$(\log_2 2 =)\ 1 < \log_2 3$$

より

$$1 > \frac{1}{\log_2 3}\ (> 0) \qquad \therefore\ -1 < -\frac{1}{\log_2 3} \quad \cdots\cdots①$$

また

$$-\frac{1}{\log_2 3}\ (< 0)\ < \frac{1}{\log_2 5} \quad \cdots\cdots②$$

①，② より

$$-1 < -\frac{1}{\log_2 3} < \frac{1}{\log_2 5}$$

よって

$$\boldsymbol{\log_2 0.5 < \log_3 0.5 < \log_{0.2} 0.5} \qquad \text{(答)}$$

(2) 底を 2 にそろえると

$$1 = \log_2 2$$

$$\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3}$$

$$\log_6 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 6} = \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{1}{1 + \log_2 3}$$

これより

$$1 < \log_2 3$$

だから

$$\frac{1}{1 + \log_2 3} < \frac{1}{\log_2 3} < 1 < \log_2 3$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\log_6 2 < \log_3 2 < 1 < \log_2 3} \qquad \text{(答)}$$

(3) $a > 1$ より，

$$\log_a a < \log_a b < \log_a a^2 \qquad \therefore\ 1 < \log_a b < 2 \quad \cdots①$$

したがって，$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ より，$\dfrac{1}{2} < \log_b a < 1 \quad \cdots②$

また，$\log_a \dfrac{a}{b} = \log_a a - \log_a b = 1 - \log_a b$ だから，①より，

$$-1 < \log_a \frac{a}{b} < 0 \quad \cdots③$$

さらに，$\log_b \dfrac{b}{a} = \log_b b - \log_b a = 1 - \log_b a$ だから② より，

$$0 < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2}$$

①，②，③，④より，

$$-1 < \log_a \frac{a}{b} < 0 < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2} < \log_b a < 1 < \log_a b < 2$$

つまり，

$$\boldsymbol{\log_a \frac{a}{b} < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2} < \log_b a < \log_a b} \qquad \textbf{(答)}$$

【6】(1) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

与式より

$$x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

であり，これは①をみたすから

$$\boldsymbol{x = \sqrt{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 底の条件より，

$$0 < x < 1,\ x > 1 \quad \cdots ①$$

与式より，

$$x^{-2} = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{9} \qquad \therefore\ x = \pm\frac{1}{3}$$

①より

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) 真数条件より，

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-5)(x+2) > 0 \quad \therefore\ x < -2,\ x > 5$$
$$x - 2 > 0 \qquad \therefore\ x > 2$$

よって，

$$x > 5 \quad \cdots ①$$

また，与式の左辺は

$$\log_4(x^2 - 3x - 10) = \frac{\log_2(x^2 - 3x - 10)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x^2 - 3x - 10)$$

なので，与式は

$$\log_2(x^2 - 3x - 10) = \log_2(x-2)^2$$

よって，

$$x^2 - 3x - 10 = (x-2)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 14$$

これは ① をみたすから

$$\boldsymbol{x = 14} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) 真数条件より，

$$x-1>0,\ x+5>0$$

よって，

$$x>1 \quad \cdots ①$$

$$\log_4(x+5)=\frac{\log_2(x+5)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x+5)$$

だから，与式は

$$\begin{aligned}\log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(x+5) &\iff 2\log_2(x-1)=\log_2(x+5)\\ &\iff \log_2(x-1)^2=\log_2(x+5)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}(x-1)^2=x+5 &\iff x^2-2x+1=x+5\\ &\iff x^2-3x-4=0\\ &\iff (x-4)(x+1)=0\\ &\therefore\quad x=4,\ -1\end{aligned}$$

これと①より

$\boldsymbol{x=4}$ (答)

(5) 真数条件より

$$x>0,\ x+2>0$$

よって， $x>0 \quad \cdots ①$

与えられた方程式の底を3に変換して，

$$\begin{aligned}\log_3 x=\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9} &\iff \log_3 x=\frac{1}{2}\log_3(x+2)\\ &\iff 2\log_3 x=\log_3(x+2)\\ &\iff \log_3 x^2=\log_3(x+2)\end{aligned}$$

したがって

$$x^2=x+2 \iff x^2-x-2=0$$

より，

$$(x-2)(x+1)=0 \qquad \therefore x=2,\ -1$$

したがって，①より

$\boldsymbol{x=2}$ **(答)**

【7】(1) 真数条件より

$$x>0 \quad \cdots ①$$

底は1より大きいから

$$x\leqq 27$$

これと①より

$\boldsymbol{0<x\leqq 27}$ (答)

(2) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

底は1より小さいから

$$x < (0.1)^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 1000$$

これと①より

$$\boldsymbol{0 < x < 1000} \qquad \text{(答)}$$

(3) 真数条件より

$$x^2 - 2x - 15 > 0$$
$$(x-5)(x+3) > 0 \qquad \therefore \quad x < -3,\ x > 5$$
$$3x - 9 > 0 \qquad \therefore \quad x > 3$$

よって

$$x > 5 \quad \cdots ①$$

与式の対数の底は両辺ともに1より小さいので

$$x^2 - 2x - 15 < 3x - 9$$
$$x^2 - 5x - 6 < 0$$
$$(x-6)(x+1) < 0 \qquad \therefore \quad -1 < x < 6$$

よって

$$\boldsymbol{5 < x < 6} \qquad \text{(答)}$$

(4) $x^2-8x+6=0$ の解は

$$x=4\pm\sqrt{10}$$

だから，真数条件より

$$\frac{1}{2}<x<4-\sqrt{10},\ x>4+\sqrt{10}\quad\cdots①$$

$$\begin{aligned}\log_4(x^2-8x+6)&=\frac{\log_2(x^2-8x+6)}{\log_2 4}\\&=\frac{1}{2}\log_2(x^2-8x+6)\end{aligned}$$

より，与式は

$$\begin{aligned}\log_2(2x-1)&>\frac{1}{2}\log_2(x^2-8x+6)\\2\log_2(2x-1)&>\log_2(x^2-8x+6)\\\log_2(2x-1)^2&>\log_2(x^2-8x+6)\end{aligned}$$

底は 1 より大きいから

$$\begin{aligned}(2x-1)^2&>x^2-8x+6\\4x^2-4x+1&>x^2-8x+6\\3x^2+4x-5&>0\end{aligned}$$

これより

$$x<\frac{-2-\sqrt{19}}{3},\ x>\frac{-2+\sqrt{19}}{3}$$

ここで，$4-\sqrt{10}$ と $\dfrac{-2+\sqrt{19}}{3}$ の大小を比較する．
$\sqrt{19}<\sqrt{19.36}=4.4$ より，

$$\frac{-2+\sqrt{19}}{3}<\frac{-2+4.4}{3}=\frac{4}{5}$$

また，

$$4-\sqrt{10}-\frac{4}{5}=\frac{16-5\sqrt{10}}{5}>0\qquad\left(\because\ 16^2=256>250=\left(5\sqrt{10}\right)^2\right)$$

よって，$\dfrac{-2+\sqrt{19}}{3}<4-\sqrt{10}$
これと ① より

$$\boldsymbol{\frac{-2+\sqrt{19}}{3}<x<4-\sqrt{10},\ x>4+\sqrt{10}}\qquad\text{(答)}$$

(5) 真数条件より

$$\begin{aligned} &x-2>0 \quad &\therefore\ \ x>2 \\ &x+4>0 \quad &\therefore\ \ x>-4 \end{aligned}$$

よって

$$x>2 \quad \cdots ①$$

与式の対数の底はともに 1 より小さいから

$$\begin{aligned} (x-2)^2<x+4 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2-5x<0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x(x-5)<0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0<x<5 \end{aligned}$$

これと①より

$$\boldsymbol{2<x<5} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) 真数条件および底の条件より

$$0<x<1,\ x>1 \quad \cdots ①$$

そして底を 3 にそろえると

$$\begin{aligned} \log_4 x &= \frac{\log_3 x}{\log_3 4} \\ \log_x 3 &= \frac{\log_3 3}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_3 x} \end{aligned}$$

だから与式は

$$\begin{aligned} \log_3 \sqrt{2}\cdot\frac{\log_3 x}{\log_3 4} &= \frac{1}{\log_3 x} \\ \log_3 2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\log_3 x}{\log_3 2^2} &= \frac{1}{\log_3 x} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_3 x}{2} &= \frac{1}{\log_3 x} \\ (\log_3 x)^2 &= 4 \end{aligned}$$

これより

$$\log_3 x = \pm 2$$

よって

$$x=3^2=9,\ x=3^{-2}=\frac{1}{9}$$

であるが，これは①をみたすので

$$\boldsymbol{x=9,\ \frac{1}{9}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 真数条件より

$$x < 2 \quad \cdots ①$$

与式は

$$\log_2 (2-x)(3-x) \geqq \log_2 2$$

であり，底は 1 より大きいから

$$\begin{aligned}(2-x)(3-x) \geqq 2 &\iff x^2 - 5x + 4 \geqq 0 \\ &\iff (x-4)(x-1) \geqq 0\end{aligned}$$

よって

$$x \leqq 1,\ x \geqq 4$$

これと①より

$$\boldsymbol{x \leqq 1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 真数条件より

$$x < -\sqrt{6},\ x > \sqrt{6} \quad \cdots ①$$

底の条件より

$$2 < x < 4,\ x > 4 \quad \cdots ②$$

①，②より

$$\sqrt{6} < x < 4,\ x > 4 \quad \cdots ③$$

ここで，与式は

$$\log_{\frac{x}{2}-1}(x^2-6) > \log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

(i) $\dfrac{x}{2} - 1 > 1$ すなわち $x > 4 \cdots ④$ の場合

$$\begin{aligned}x^2 - 6 > \frac{x}{2} - 1 &\iff 2x^2 - x - 10 > 0 \\ &\iff (x+2)(2x-5) > 0 \\ &\iff x < -2,\ x > \frac{5}{2}\end{aligned}$$

であるが，これと④より

$$x > 4 \quad \cdots ⑤$$

(ii) $\dfrac{x}{2} - 1 < 1$ すなわち $x < 4 \cdots ⑥$ の場合

$$\begin{aligned}x^2 - 6 < \frac{x}{2} - 1 &\iff 2x^2 - x - 10 < 0 \\ &\iff (x+2)(2x-5) < 0 \\ &\iff -2 < x < \frac{5}{2}\end{aligned}$$

これと⑥より

$$-2 < x < \frac{5}{2} \quad \cdots ⑦$$

③，⑤，⑦より

$$\boldsymbol{\sqrt{6} < x < \frac{5}{2},\ x > 4} \qquad \text{(答)}$$

(4) 真数条件より

$$x<-\sqrt{2},\ x>\sqrt{2}\quad \cdots①$$

(i) $a>1$ の場合

$$x^2-2\leqq|x+1|\quad\cdots②$$

であるが，$x^2-2=x+1$ すなわち $x^2-x-3=0$ の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ であり，$x^2-2=-x-1$ すなわち $x^2+x-1=0$ の解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ だから，② の解は

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

これと，① より

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq x<-\sqrt{2},\sqrt{2}<x\leqq\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

(ii) $0<a<1$ の場合

$$x^2-2\geqq|x+1|$$

であるが，この解は，① とあわせて

$$x\leqq\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x\geqq\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

よって

$$\begin{cases}\boldsymbol{a>1}\ \textbf{の場合} & \boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq x<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<x\leqq\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}}\\ \boldsymbol{0<a<1}\ \textbf{の場合} & \boldsymbol{x\leqq\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x\geqq\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}}\end{cases}$$

(答)

M1JK

高 1 東大数学 K

Z-KAI

会員番号		氏　名	