M2JC

本科２期 12 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２東大理系数学Ⅲ

２４章　積分の計算

問題

【1】(1) $I_n = \int_0^\pi x^n \cos x dx$ より

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi x^n (\sin x)' dx = [x^n \sin x]_0^\pi - n\int_0^\pi x^{n-1} \sin x dx \\ &= -nJ_{n-1} \end{aligned}$$

(2) $J_n = \int_0^\pi x^n \sin x dx$ より

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^\pi x^n (-\cos x)' dx = \big[-x^n \cos x\big]_0^\pi + n\int_0^\pi x^{n-1} \cos x dx \\ &= \pi^n + nI_{n-1} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = x^n \cos x$ とおくと n が奇数のとき，$f(-x) = -f(x)$ より

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^n \cos x dx = 0$$

n が偶数のとき，$f(-x) = f(x)$ より

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^n \cos x dx = 2\int_0^\pi x^n \cos x dx$$

よって，与式を I とすると

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \cos x dx \\ &= 2\int_0^\pi (1 + x^2 + x^4) \cos x dx \\ &= 2(I_0 + I_2 + I_4) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\pi \cos x dx = \big[\sin x\big]_0^\pi = 0 \\ I_2 &= -2J_1 = -2(\pi + I_0) = -2\pi \\ I_4 &= -4J_3 = -4(\pi^3 + 3I_2) = -4\pi^3 + 24\pi \end{aligned}$$

であるから

$$I = 2(0 - 2\pi - 4\pi^3 + 24\pi) = -8\pi^3 + 44\pi$$

【2】(1) $\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおくと

$$\frac{dt}{dx}=-1$$

x	$0 \quad \to \quad \dfrac{\pi}{2}$
t	$\dfrac{\pi}{2} \quad \to \quad 0$

よって

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x\sin x}{1+\cos x}+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right)dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left\{\frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\right\}(-1)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos t}{1+\sin t}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t}{1+\cos t}\right\}dt \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos t}{1+\sin t}+\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t\cos t}{1+\sin t}+\frac{t\sin t}{1+\cos t}\right)dt \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx-I
\end{aligned}$$

であるから

$$2I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx$$

$$\therefore\quad I=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx \quad \cdots\cdots ①$$

〔証明終〕

(2) ① より

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}+\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}\right\}dx \\
&= \frac{\pi}{4}\Big[-\log|1+\cos x|+\log|1+\sin x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}\{(-\log 1+\log 2)-(-\log 2+\log 1)\} \\
&= \frac{\pi}{2}\log 2
\end{aligned}$$

【3】(1) $1+\tan^2\dfrac{x}{2}=1+t^2=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$ より

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2}$$

よって

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

一方，$\tan x=\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$ より

$$\sin x=\cos x\tan x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

また，$\tan\dfrac{x}{2}=t$ の両辺を x で微分すると，$\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{dt}{dx}$ であるから

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\dfrac{dt}{dx}}=2\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2}{1+t^2}$$

〔証明終〕

(2) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，(1) の結果より

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$$

このとき，$\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ であるから

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1}{\cos x}dx\\
=\ &\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{1-t^2}dt=\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt\\
=\ &\log|1+t|-\log|1-t|+C\quad(C\text{ は積分定数})\\
=\ &\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\log\left|\frac{1+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{x}{2}}\right|+C=\log\left|\frac{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}\right|+C\\
=\ &\log\left|\frac{1+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}\right|+C=\log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C
\end{aligned}$$

また

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1+\sin x}dx \\
&= \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{(1+t)^2}dt = -\frac{2}{1+t} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\
&= -\frac{2}{1+\tan\dfrac{x}{2}} + C = -\frac{2\cos\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}} + C = -\frac{2\cos^2\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}} + C \\
&= -\frac{\cos x + 1 - \sin x}{\cos x} + C = \frac{\sin x - \cos x - 1}{\cos x} + C
\end{aligned}
$$

≪注≫ 後半の積分は，次のように直接求めることができる．

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1+\sin x}dx \\
&= \int \frac{1+\sin x - \sin x}{1+\sin x}dx = \int dx - \int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx \\
&= \int dx - \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}dx = x - \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x}dx \\
&= x - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \int \tan^2 x dx = x - \frac{1}{\cos x} + \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx \\
&= x - \frac{1}{\cos x} + \tan x - x + C' \ (C' \text{ は積分定数}) \\
&= \frac{\sin x - 1}{\cos x} + C'
\end{aligned}
$$

見かけは異なるが，$-1+C = C'$ とおくと同一の不定積分であることが確認できる．

【4】 $$\frac{1}{\sin^3 x} = \frac{\sin x}{\sin^4 x} = \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^2}$$

$t=\cos x$ とおくと，$dt = -\sin x dx$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx &= -\int \frac{1}{(1-t^2)^2}\,dt\\ &= -\int \frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)^2}\,dt\\ &= -\int \frac{1}{1-t^2}\,dt - \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}\,dt\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}\,dt &= \int \frac{t}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-t^2}\right)'\,dt\\ &= \frac{t}{2}\cdot\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t^2}\,dt\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx &= -\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t^2}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{4}(\log|1+t| - \log|1-t|) + C \quad (C \text{ は積分定数})\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\cos^2 x - 1} - \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} - \log\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) + C\end{aligned}$$

添削課題

【1】(1)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \log x dx \\ &= \int_1^e (x)' \log x dx \\ &= [x\log x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= e - [x]_1^e = 1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e (\log x)^{n+1} dx \\ &= \int_1^e (x)'(\log x)^{n+1} dx \\ &= [x(\log x)^{n+1}]_1^e - \int_1^e x \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{x}(\log x)^n dx \\ &= e - (n+1)\int_1^e (\log x)^n dx \\ &= e - (n+1) I_n \end{aligned}$$

(3) (2) の結果より

$$\begin{aligned} I_4 &= e - 4I_3 \\ &= e - 4(e - 3I_2) = 12I_2 - 3e \\ &= 12(e - 2I_1) - 3e \\ &= 9e - 24I_1 = 9e - 24 \quad (\because\ (1)\ \text{より}) \end{aligned}$$

問題

【1】(1) $1-x=t$ とおくと，$-dx=dt$,

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

より

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=\int_1^0(1-t)\sqrt{t}(-1)dt=\int_0^1\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

(2)
$$\int_{-e}^{-1}\frac{1}{x}dx=\big[\log|x|\big]_{-e}^{-1}=\log 1-\log e=-1$$

(3) 部分積分法を用いると

$$\int_1^e x^2\log x dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x dx=\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}(\log x)'dx$$
$$=\frac{e^3}{3}-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e$$
$$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}\left(e^3-1\right)=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$$

(4)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 4x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 8x}{2}dx\quad(\because\ \text{半角公式})$$
$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{8}\sin 8x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

(5)
$$\int_1^2\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx=\int_1^2\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-2x+5\right)'}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\big[\log|x^2-2x+5|\big]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}(\log 5-\log 4)=\frac{1}{2}\log\frac{5}{4}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\\
&=\frac{1}{n}\left\{\frac{n^2}{(n+1)^2}+\frac{n^2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n^2}{(n+n)^2}\right\}\\
&=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right\}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}
\end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

(2) $\frac{1}{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$ より

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\frac{k}{n}}&=\int_0^1\sqrt{1+x}dx\\
&=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}$$

(3) $P_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}$ の自然対数をとると

$$\begin{aligned}
\log P_n&=\log\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}\\
&=\log\sqrt[n]{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{n^n}}\\
&=\log\sqrt[n]{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}}\\
&=\frac{1}{n}\left(\log\frac{1}{n}+\log\frac{2}{n}+\cdots+\log\frac{n-2}{n}+\log\frac{n-1}{n}+\log\frac{n}{n}\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}
\end{aligned}$$

であるから

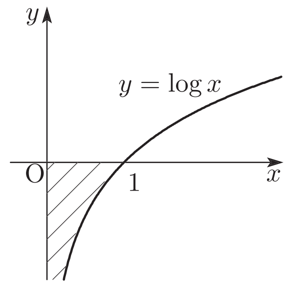
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\log P_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}=\int_0^1\log x dx\\
&=\left[x\log x\right]_0^1-\int_0^1 dx=-1=\log\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

よって，対数関数の連続性より

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{e}$$

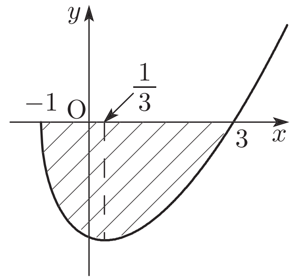
≪注≫ 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$ は正確には**広義積分**または**異常積分**と呼ばれる積分である．

この積分は右図の斜線部分の面積を S とすると $-S$ を表しているが，領域が閉じていないので厳密には次のように定義される．



$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \log x dx &= \lim_{h\to+0}\int_h^1 \log x dx \\
&= \lim_{h\to+0}\left(\Big[x\log x\Big]_h^1 - \int_h^1 dx\right) \\
&= \lim_{h\to+0}(-h\log h - 1 + h) \\
&= -1 \quad \left(\lim_{h\to+0} h\log h = -0 \text{ であることを用いた}\right)
\end{aligned}
$$

【3】(1) $y=(x-3)\sqrt{x+1}\ \ (x \geqq -1)$ より



$$y'=\sqrt{x+1}+(x-3)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x-1}{2\sqrt{x+1}}$$

であるから，次の増減表を得る．

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘	極小	↗

よって，グラフは右上図のようになるから，曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_{-1}^{3}-(x-3)\sqrt{x+1}dx$$

$x+1=t$ とおくと，$dx=dt$，

x	-1	$\to$	3
t	0	$\to$	4

より

$$S=\int_0^4 -(t-4)\sqrt{t}dt=\int_0^4\left(4t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt=\left[\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=\frac{8}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}\cdot 4^{\frac{5}{2}}=\frac{128}{15}$$

(2) 便宜上，$y_1=e^x\cos x$，$y_2=e^x\sin x$ とする．

$$y_1{}'=e^x(\cos x-\sin x)\quad\cdots①,\qquad y_2{}'=e^x(\sin x+\cos x)$$

であるから

$$y_1{}'=0\iff x=\frac{1}{4}\pi,\qquad y_2{}'=0\iff x=\frac{3}{4}\pi$$

より，それぞれ次の増減表を得る．

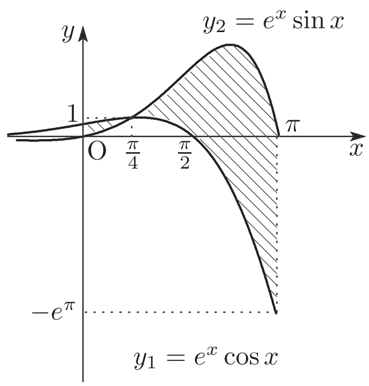
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}\pi$	$\cdots$	π
$y_1{}'$		$+$	0	$-$	
y_1	1	↗	極大	↘	$-e^{\pi}$

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$y_2{}'$		$+$	0	$-$	
y_2	0	↗	極大	↘	0

また

$$y_1=y_2\iff\cos x=\sin x\iff x=\frac{1}{4}\pi$$

であるから，2 曲線のグラフは右図のようになる．



よって，求める面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^x\cos x-e^x\sin x)\,dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(e^x\sin x-e^x\cos x)\,dx$$

$$=\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[e^x\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\quad(\because\ ①より)$$

$$=e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-e^0\cdot 1-e^{\pi}\cdot(-1)+e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}+e^{\pi}-1$$

≪注意≫ 面積を求めるだけなら，グラフをきちんと描く必要はないが，ここでは練習のため，2 つの曲線の増減を調べた．

【4】(1) $$y = e^{-x}\sin x = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = n\pi$$

より

$$\mathrm{P}_n(n\pi,\ 0)\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおける．よって，$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} = \{x \mid n\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi\}$ であるが，この範囲では $y = e^{-x}\sin x$ は一定符号となるので，曲線と $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ とで囲まれた部分の面積 S_n は

$$S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |e^{-x}\sin x|\,dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

ここで $x - n\pi = t$ とおくと，$dx = dt$，

x	$n\pi \to (n+1)\pi$
t	$0 \to \pi$

より

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_0^{\pi} e^{-(t+n\pi)}|\sin(t+n\pi)|\,dt = \int_0^{\pi} e^{-(t+n\pi)}|\sin t|\,dt \\
&= e^{-n\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt = e^{-n\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)\right]_0^{\pi} \quad (\to ≪注≫) \\
&= -\frac{e^{-n\pi}}{2}\left(-e^{-\pi} - 1\right) = \frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}
\end{aligned}$$

≪注≫

$$\begin{aligned}
(e^{-t}\sin t)' &= -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t & \cdots① \\
(e^{-t}\cos t)' &= -e^{-t}\cos t + e^{-t}(-\sin t) & \cdots②
\end{aligned}$$

① + ② より

$$\begin{aligned}
&(e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)' = -2e^{-t}\sin t \\
\therefore\quad &\left\{-\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)\right\}' = e^{-t}\sin t \\
\therefore\quad &\int e^{-t}\sin t dt = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) + C \quad (C:\text{積分定数})
\end{aligned}$$

(2) (1) より

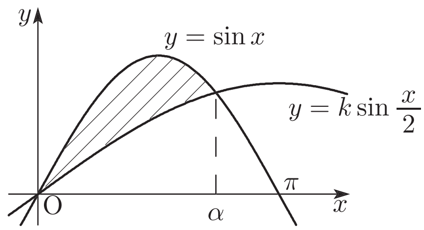
$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{e^{-\pi}+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\pi}\right)^n$$

$0 < e^{-\pi} < 1$ であるから，この等比級数は収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{e^{-\pi}+1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2\left(e^{\pi}-1\right)}$$

添削課題

【1】2 曲線の交点の x 座標を α $(0<\alpha<\pi)$ とおくと



$$\sin\alpha = k\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$\therefore\quad 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = k\sin\frac{\alpha}{2}$$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} \fallingdotseq 0$ より

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{2} \qquad \cdots ①$$

右上図の斜線部分の面積が $\dfrac{3}{4}$ になればよいから

$$\int_0^{\alpha}\left(\sin x - k\sin\frac{x}{2}\right)dx = \frac{3}{4}$$
$$\therefore\quad \left[-\cos x + 2k\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\alpha} = \frac{3}{4}$$
$$\therefore\quad (1-\cos\alpha) + 2k\left(\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right) = \frac{3}{4}$$

ここで $\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$ だから

$$2\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) + 2k\left(\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right) = \frac{3}{4}$$

① から

$$2\left\{1-\left(\frac{k}{2}\right)^2\right\} + 2k\left(\frac{k}{2} - 1\right) = \frac{3}{4}$$
$$\therefore\quad 2k^2 - 8k + 5 = 0$$
$$\therefore\quad k = \frac{4\pm\sqrt{6}}{2}$$

① から，$k = 2\cos\dfrac{\alpha}{2} < 2$ が必要であるから

$$k = \frac{4-\sqrt{6}}{2}$$

この値は $0<k<1$ をみたす.

問題

【1】(1) $\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$，$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから，$\tan^2 x$ の原始関数の 1 つは

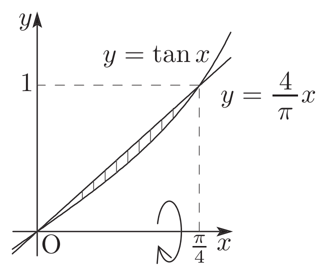
$$\tan x - x$$

(2) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において

$$\tan x = \frac{4x}{\pi} \iff x = 0,\ \frac{\pi}{4}$$

であるので，領域は図の斜線部分のようになる．

よって，図の斜線部分を x 軸のまわりに回転した回転体の体積 V は



$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi \left(\frac{4x}{\pi}\right)^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi(\tan x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{16}{\pi^2}x^2 - \tan^2 x\right) dx \\ &= \pi \left[\frac{16}{3\pi^2}x^3 - (\tan x - x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad (\because\ (1)\text{ より}) \\ &= \pi\left(\frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \pi\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) \end{aligned}$$

【2】

$$2x^2+y^2-2xy-2x-2y+1=0 \quad \cdots ①$$

とすると，①で $y=0$ とおいてできる x の方程式

$$2x^2-2x+1=0$$

の判別式は

$$D=4-8=-4<0$$

だから，①は x 軸と交点をもたない．
また，①を y について解くと

$$y=x+1\pm\sqrt{4x-x^2}$$

であり，ここで

$$4x-x^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad x(x-4)\leqq 0 \qquad \therefore \quad 0\leqq x\leqq 4$$

だから，①で表される曲線は $0\leqq x\leqq 4$ の範囲に存在する．
よって，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^4\left(x+1+\sqrt{4x-x^2}\right)^2dx-\pi\int_0^4\left(x+1-\sqrt{4x-x^2}\right)^2dx\\&=4\pi\int_0^4(x+1)\sqrt{4x-x^2}dx\\&=4\pi\int_0^4(x+1)\sqrt{4-(x-2)^2}dx\end{aligned}$$

であり，$x-2=2\sin t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=2\cos t,\ x:0\to 4 \text{ のとき } t:-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$$

だから

$$\begin{aligned}V&=4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3+2\sin t)(2\cos t)^2dt\\&=4\pi\left[6\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)-\frac{8}{3}\cos^3 t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=24\pi^2\end{aligned}$$

【3】(1) $z=t$ のとき

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2 \leqq 1-t^2$$

より

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

このとき

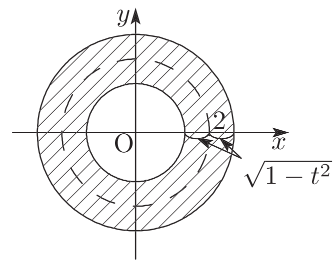
$$-\sqrt{1-t^2} \leqq \sqrt{x^2+y^2}-2 \leqq \sqrt{1-t^2}$$
$$\therefore\quad 2-\sqrt{1-t^2} \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 2+\sqrt{1-t^2}$$
$$\therefore\quad \left(2-\sqrt{1-t^2}\right)^2 \leqq x^2+y^2 \leqq \left(2+\sqrt{1-t^2}\right)^2$$

これは，平面 $z=t$ で z 軸中心，半径 $2-\sqrt{1-t^2}$ の円と半径 $2+\sqrt{1-t^2}$ の円で挟まれた部分の周および内部 (円環部分) を表すので

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi\left(2+\sqrt{1-t^2}\right)^2-\pi\left(2-\sqrt{1-t^2}\right)^2 \\ &= 8\pi\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より

$$V=\int_{-1}^{1} S(t)dt = 16\pi\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$$



ここで

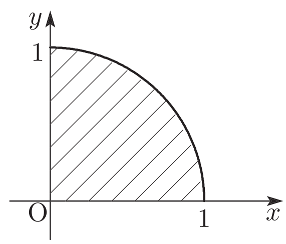
$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{4}$$

であるから

$$V=16\pi\cdot\frac{\pi}{4}=4\pi^2$$

≪注≫

定積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{4}$ は右図参照.



【4】(1) A(1, 0, 0), D(0, 1, 1) より

$$\mathrm{AD}=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$

(2) 直線 AD 上の点は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+h\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-h \\ h \\ h \end{pmatrix} \quad (h:\text{実数})$$

と表せるから, H$(1-h,\ h,\ h)$ とおける.

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} 1-h-1 \\ h-1 \\ h-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -h \\ h-1 \\ h \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -h \\ h-1 \\ h \end{pmatrix}=0$$

したがって

$$h+h-1+h=0 \qquad \therefore \quad h=\frac{1}{3}$$

これより, H $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ であるから

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

同様に, K$(1-s,\ s,\ s)$ $(s:\text{実数})$ とおけて

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}}=\begin{pmatrix} 1-s-1 \\ s-1 \\ s-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -s \\ s-1 \\ s-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CK}}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -s \\ s-1 \\ s-1 \end{pmatrix}=0$$

したがって

$$s+s-1+s-1=0 \qquad \therefore \quad s=\frac{2}{3}$$

これより, K $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ であるから

$$\mathrm{AK}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(3) P$(1,\ 1,\ p)$ とおける．一方，線分 AD 上の Q$(x,\ y,\ z)$ は AQ $= t$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と同じ向きの単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{t}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (t : \text{実数})$$

と表せる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{t}{\sqrt{3}}-1 \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}-1 \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{t}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}-1 \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}-p \end{pmatrix}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\dfrac{t}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}-1 \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}-p \end{pmatrix} = 0$$

したがって

$$\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{t}{\sqrt{3}}-1+\frac{t}{\sqrt{3}}-p=0 \qquad \therefore\quad p=\sqrt{3}t-1 \qquad \cdots①$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{t}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}-1 \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}-\left(\sqrt{3}t-1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{t}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}-1 \\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}t+1 \end{pmatrix}$$

よって

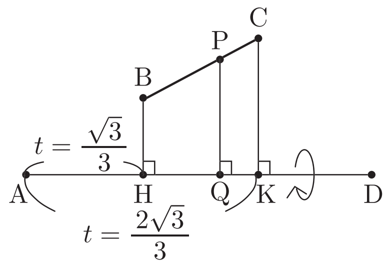
$$\mathrm{PQ} = \sqrt{\left(-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}-1\right)^2+\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}t+1\right)^2} = \sqrt{2\left(t^2-\sqrt{3}t+1\right)}$$

(4) 曲面の AD に垂直な平面による切り口は PQ は半径とする円である．

よって，求める体積は

$$V = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \pi\mathrm{PQ}^2\,dt = \pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} 2\left(t^2-\sqrt{3}t+1\right)dt$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{\sqrt{3}}{2}t^2+t\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{27}\pi$$



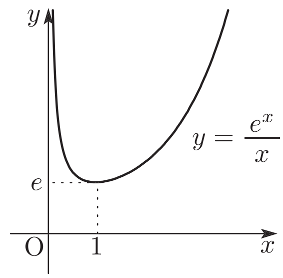
添削課題

【1】(1) $y=\dfrac{e^x}{x}$ より

$$y'=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

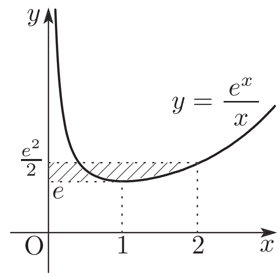
であるから，増減表は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$



よって，グラフは右上図のようになる．

(2) 求める体積を V とすると



$$V=\pi\int_e^{\frac{e^2}{2}}x^2dy$$

ここで，$y=\dfrac{e^x}{x}$ とおくと

$$dy=\frac{(x-1)e^x}{x^2}dx$$

より

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_1^2 x^2\cdot\frac{(x-1)e^x}{x^2}dx\\&=\pi\int_1^2(x-1)e^xdx\\&=\pi\Big[(x-1)e^x\Big]_1^2-\pi\int_1^2 e^xdx\\&=\pi e^2-\pi\Big[e^x\Big]_1^2\\&=\pi e\end{aligned}$$

M2JC

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号		氏　名	