1MJSS/1MJS/1MJ

本科 2 期 12 月度

解答

Z会東大進学教室

中 1 選抜東大・医学部数学

中 1 数学

中 1 東大数学

２４章　合同と証明（１）

問題

【1】(1) 命題は正しい．

逆 $\cdots a+c=b+c$ ならば，$a=b$ である．

これは正しい

(2) 命題は正しい．

逆 $\cdots ab>0$ ならば，$a>0$，$b>0$ である．

これは正しくない

〔反例〕$a=-2$，$b=-1$

(3) 命題は正しい．

逆 $\cdots$ 4 つの内角がいずれも直角である四角形は正方形である．

これは正しくない

〔反例〕長方形

(4) 命題は正しい．

逆 $\cdots$ 二等辺三角形は正三角形である．

これは正しくない

〔反例〕直角二等辺三角形

【2】(1) $\angle x=\mathbf{105^\circ}$，$\angle y=\mathbf{85^\circ}$　(2) $\angle x=\mathbf{60^\circ}$，$\angle y=\mathbf{120^\circ}$

(3) $\angle x=\mathbf{60^\circ}$　(4) $\angle x=\mathbf{30^\circ}$

【3】DA の延長上に E をとる．

CB//AE より，

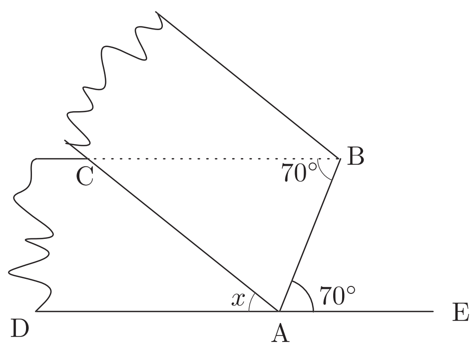
$\angle \mathrm{BAE}=\angle \mathrm{ABC}=70^\circ$（錯角）

また，テープを折り返したのだから，

$\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BAE}=70^\circ$

したがって，

$\angle x=180^\circ-70^\circ\times 2=\mathbf{40^\circ}$



【4】(1) $\angle x = \mathbf{97^\circ}$

(2) $\angle x = \mathbf{110^\circ}$

(3) $\angle x = \mathbf{30^\circ}$, $\angle y = \mathbf{115^\circ}$

(4) $\angle x = \mathbf{65^\circ}$

(5) $\angle x = \mathbf{25^\circ}$, $\angle y = \mathbf{65^\circ}$

【5】$\angle$APE$= 100^\circ$ より,

$\angle \mathrm{APD} = 80^\circ$

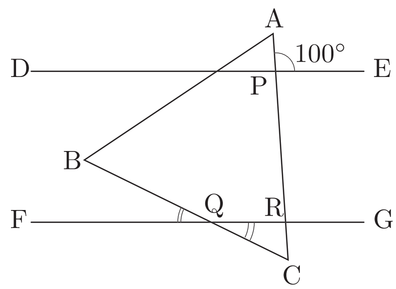
DE//FG だから,

$\angle \mathrm{ARQ} = \angle \mathrm{APD} = 80^\circ$(同位角)

$\angle \mathrm{BQF} = \angle \mathrm{RQC}$ (対頂角)

$\angle$C$= 60^\circ$ より,

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BQF} &= \angle \mathrm{RQC}\\ &= \angle \mathrm{ARQ} - \angle \mathrm{C}\\ &= 80^\circ - 60^\circ\\ &= \mathbf{20^\circ}\end{aligned}$$



【6】(1) $\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{ABC} = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$

よって,

$\angle \mathrm{DCE} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{ACE} = 50^\circ$

したがって,

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BDC} &= \angle \mathrm{DCE} - \angle \mathrm{DBC}\\ &= 50^\circ - 40^\circ \times \frac{1}{2}\\ &= \mathbf{30^\circ}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BDC} &= \angle \mathrm{DCE} - \angle \mathrm{DBC}\\ &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{ACE} - \frac{1}{2}\angle \mathrm{ABC}\\ &= \frac{1}{2}(\angle \mathrm{ACE} - \angle \mathrm{ABC})\\ &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{BAC}\\ &= \frac{1}{2} \times 80^\circ\\ &= \mathbf{40^\circ}\end{aligned}$$

【7】 ア **AOC**

イ **180°**

ウ **BOD**

エ **180°**

オ **BOD**

【8】 ア 同位角

イ **DAE**

ウ 錯角

エ **CAE**

オ **DAE**

カ **CAE**

【9】(1) **＜仮定＞ $\boldsymbol{\ell \,/\!/\, m}$(または AB // CD)，∠ABD=∠ACD**

＜結論＞ AC // BD

(2) **平行線の同位角・錯角は等しい．平行線の同側内角の和は 180°.**

同位角・錯角が等しければ平行である．同側内角の和が 180° ならば平行である.

(3) **同位角・錯角が等しければ平行である．同側内角の和が 180° ならば平行である.**

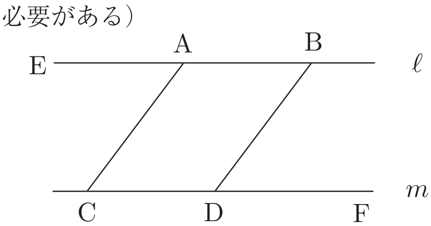
(4) 下の図のように，BA の延長上に点 E，CD の延長上に点 F をとる.

同位角としたとき　**∠ACD と ∠BDF または ∠ABD と ∠EAC**

同側内角としたとき　**∠ACD と ∠CDB または ∠ABD と ∠CAB**

（錯角を使うには，CA，BD を延長する必要がある）

(5) 右の図において，仮定 $\ell \,/\!/\, m$ より，



平行線の錯角は等しいので

∠EAC = ∠ACD ···①

一方，仮定より

∠ABD = ∠ACD ···②

①，② より

∠EAC = ∠ABD

よって同位角が等しいので

AC // BD　（証明終）

＜別証明＞

仮定 $\ell \,/\!/\, m$ より，平行線の同側内角の和は 180° より

∠CAB + ∠ACD = 180° ···①

仮定より

∠ABD = ∠ACD ···②

①，② より

∠CAB + ∠ABD = 180°

同側内角の和は 180° であるから

AC // BD　（証明終）

【10】$\angle$ABE=$\angle$EBC= b，$\angle$ACE=$\angle$ECD= c とおく．

$\triangle$ ABC の内角と外角の関係から，

$\angle \mathrm{A} + 2b = 2c$　　　　$2c - 2b = \angle \mathrm{A}$

よって，

$c - b = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{A} \cdots\cdots$ ①

同様にして，$\triangle$ EBC の内角と外角の関係から，

$\angle \mathrm{E} + b = c$

よって，

$c - b = \angle \mathrm{E} \cdots\cdots$ ②

①，② より，

$\angle \mathrm{E} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{A}$　（証明終）

【11】(1) $\angle x = \mathbf{30^\circ}$　　(2) $\angle x = \mathbf{115^\circ}$

(3) $\angle x = \mathbf{100^\circ}$　　(4) $\angle x = \mathbf{60^\circ}$

【12】(1) $180^\circ \times (22 - 2) = \mathbf{3600^\circ}$

(2) 辺の数を n とすると，

$180^\circ \times (n - 2) = 1260^\circ$

n についての方程式とみて解くと，

$n = \mathbf{9}$(本)

(3) $360^\circ \div 9 = \mathbf{40^\circ}$

(4) 1 つの外角の大きさを x 度とすると，1 つの内角は $3x$ 度であるから，

$x + 3x = 180$

より，$x = 45$(度)

したがって，

$n = 360 \div 45 = \mathbf{8}$

(5) $\dfrac{8 \times (8 - 3)}{2} = \mathbf{20}$(本)

(6) n 角形とすると，$\dfrac{180^\circ \times (n - 2)}{n} = 168^\circ$ より，

$180(n - 2) = 168n$

n についての方程式とみて解くと，$n = 30$

したがって，対角線の本数は，

$\dfrac{30 \times (30 - 3)}{2} = \mathbf{405}$(本)

添削課題

【1】(1) ① 『$a+b$ が偶数であるならば, a, b はともに奇数である』

② 正しくない.

[反例]　$a=4,\ b=2$ のとき.

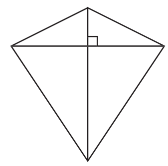
(2) ① 『同位角が等しければ, 2 つの直線は平行である』

② 正しい.

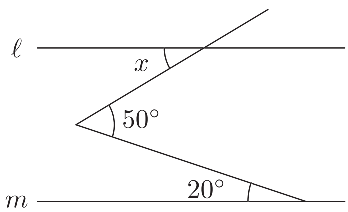
(3) ① 『ある四角形の対角線が直交するならば, その四角形はひし形である』

② 正しくない.

[反例] 右図のとき.

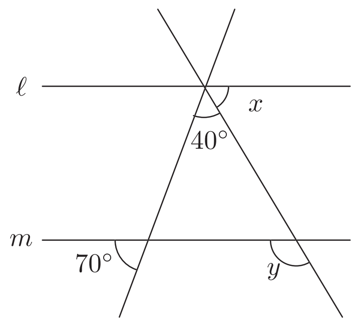


【2】(1)



$x=50^\circ-20^\circ=\mathbf{30^\circ}$

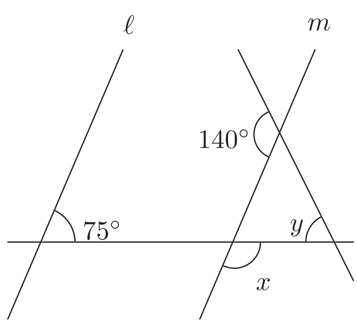
(2)



$x=180^\circ-70^\circ-40^\circ=\mathbf{70^\circ}$

$y=180^\circ-x=\mathbf{110^\circ}$

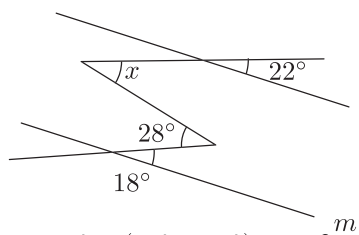
(3)



$x=180^\circ-75^\circ=\mathbf{105^\circ}$

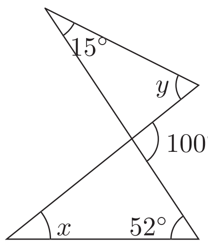
$y=140^\circ-75^\circ=\mathbf{65^\circ}$

(4)



$x=22^\circ+(28^\circ-18^\circ)=\mathbf{32^\circ}$

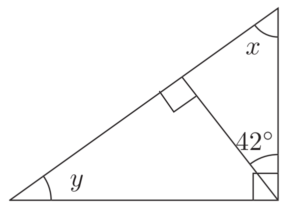
(5)



$x = 100° - 52° = \mathbf{48°}$

$y = 100° - 15° = \mathbf{85°}$

(6)



$x = 180° - 90° - 42° = \mathbf{48°}$

$y = 180° - 90° - x = \mathbf{42°}$

【3】(1) **AB // DC，AD // BC**

(2) **∠BAD=∠BCD**

(3) ア　同位角

イ　**∠EBC**

ウ　**AB // DC**

エ　錯角

オ　**∠EBC**

【4】(1) ＜仮定＞

・**AB // CD**

・**GI** は **∠EGB** の **2** 等分線

・**HJ** は **∠GHD** の **2** 等分線

＜結論＞

・**GI // HJ**

（∠EGB = ∠GHD は定理を用いて導かれるので，仮定とはいわない．）

(2) ア ··· 仮定

与えられた条件のことを仮定という．

イ ··· 同位角

ウ ··· 等しいから，

「から」は前にあることを理由として，後にくることが導かれることを示す．

エ ···**∠GHD**（∠EHD も可）

オ ··· また，

「よって」は前にあることを理由として，後にくることが導かれることを示す．「なぜなら」は前にある結論が，後にある理由で説明されることを示す．このかっこの前後は理由とその結論の関係にはないので「よって」「なぜなら」は入らない．ここで

は前の①とは別の話題に切り替わっているので，そのことを表す「また」を用いる．

カ $\cdots\angle$**EGB**

キ $\cdots\angle$**GHD**（$\angle$EHD も可）

ク $\cdots$ **①より，**
次にある $\angle\mathrm{EGI} = \angle\mathrm{GHJ}$ は②と③の左辺にあるものを等号で結んでいる．これが導かれるには②と③の右辺に入る $\angle$EGB と $\angle$GHD が等しいことが必要．したがって①の $\angle\mathrm{EGB} = \angle\mathrm{GHD}$ が理由として必要.

ケ $\cdots$ **よって，**
次の GI // HJ は同位角が等しいことから導かれる．したがって実際に同位角が等しいことが理由として必要．これは直前の $\angle\mathrm{EGI} = \angle\mathrm{GHJ}$ によって示されているので，かっこには直前のことがらが理由であることを示す「よって」が入る．

コ $\cdots$ **同位角**

【5】正しい証明は以下のようになる．
<仮定>
$\angle$B=$\angle$C
ア（**AE // BC**）
<結論>
イ（$\angle$**DAE** = $\angle$**CAE**）
<証明>
仮定ウ（**AE // BC**）より，
平行線の エ（**同位角**）は等しいので，
オ（$\angle$**DAE**）=$\angle$B $\cdots$①
同様に，
平行線の カ（**錯角**）は等しいので，
キ（$\angle$**CAE**）=$\angle$C $\cdots$②
①，② と ク（**仮定** $\angle$**B** = $\angle$**C**）より，
$\angle$DAE= ケ（$\angle$**CAE**）
コ（**したがって**）AE は $\angle$A の外角の二等分線である．　（証明終）

小テスト

【1】(1) ① もっとも小さい整数を m とおくと，4 つの整数は $\boldsymbol{m,\ m+2,\ m+4,\ m+6}$ と表せる．

② $\boxed{}$ に入る数 $\cdots$ **4**

下線部が整数でなければならない理由は，**整数ではなく小数や分数では, 4 倍しても 4 の倍数になるとは限らないから.**

<例> $4 \times \dfrac{1}{2} = 2 \quad 4 \times 0.25 = 1$ 　など

③ 4 つの整数の和は

$$m + (m+2) + (m+4) + (m+6) = 4m + 12 = 4(m+3)$$

$m+3$ は整数なので，これは 4 の倍数である．　〔説明終〕

(2) 真ん中の数を n として，連続する 3 つの整数を $n-1$，n，$n+1$ と表すと，

$$(n-1)+(n+1) = 2n$$

したがって，最小の数と最大の数の和は真ん中の数の 2 倍に等しい．　〔説明終〕

(3) 2 つの奇数をそれぞれ $2m+1$，$2n+1$(m，n は整数) とすると，これらの差は，

$$\begin{aligned}(2m+1)-(2n+1) &= 2m+1-2n-1 \\ &= 2(m-n)\end{aligned}$$

$m-n$ は整数であるから，$2(m-n)$ は偶数である．

したがって，奇数から奇数を引いた差は偶数である．　〔説明終〕

(4) 2 けたの整数の十の位の数字を a，一の位の数字を b(a，b は整数で，$a \neq 0$) とすると，この整数は $10a+b$ と表されるから，各位の数の和 $a+b$ を引くと，

$$(10a+b)-(a+b) = 10a+b-a-b = 9a$$

よって，a は整数だから $9a$ は 9 の倍数である．

したがって，2 けたの整数からその各位の和を引いた差は，9 の倍数である．

〔説明終〕

２５章　合同と証明（２）

問題

【1】(1) 3 辺がそれぞれ等しい．よって，合同である．

(2) 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい．よって，合同である．

(3) 3 つの角がそれぞれ等しい．これは合同とはいえない．

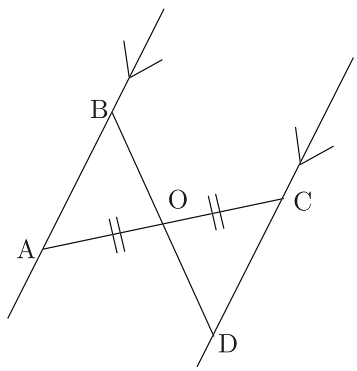
(4) 2 辺と 1 つの角がそれぞれ等しい．これは合同とはいえない．

(5) 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい．よって，合同である．

以上より，**(1), (2), (5)**

【2】(1) 仮定　**$\mathbf{AB \parallel CD,\ AO = CO}$**

結論　**$\triangle \mathbf{ABO} \equiv \triangle \mathbf{CDO}$**



(2) $\mathrm{AO} = \mathrm{CO}$（仮定 $\mathrm{AO} = \mathrm{CO}$ より）

$\angle\mathrm{ABO} = \angle\mathrm{CDO}$（仮定 $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$ より錯角は等しい）

$\angle\mathrm{BAO} = \angle\mathrm{DCO}$（仮定 $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$ より錯角は等しい）

(3) **1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい．**

(4) $\triangle\mathrm{ABO}$ と $\triangle\mathrm{CDO}$ において，

仮定より，

$\mathrm{AO} = \mathrm{CO}$ $\cdots$①

対頂角は等しいので，

$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{COD}$ $\cdots$②

$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$ より，錯角は等しいので，

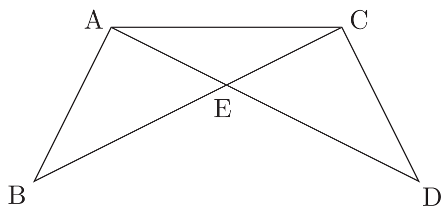
$\angle\mathrm{BAO} = \angle\mathrm{DCO}$ $\cdots$③

①，②，③ より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle\mathrm{ABO} \equiv \triangle\mathrm{CDO}$　（証明終）

【3】(1) 仮定　**AB = CD, BC = DA**

結論　△ **ABC**≡△ **CDA**



(2) AB = CD（仮定 AB = CD より）

BC = DA（仮定 BC = DA より）

(3) **3** 辺がそれぞれ等しい.

(4) △ ABC と△ CDA において

仮定より,

AB = CD ⋯①

BC = DA ⋯②

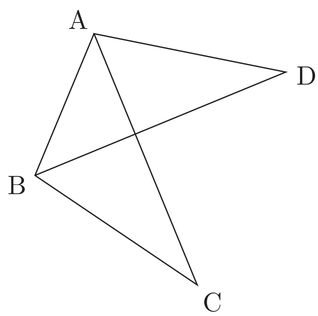
また,

AC は共通 ⋯③

①, ②, ③ より, 3 辺がそれぞれ等しいから,

△ ABC≡△ CDA　（証明終）

【4】△ ABC と△ BAD において



仮定より,

BC = AD ⋯①

∠ABC = ∠BAD ⋯②

また,

AB は共通 ⋯③

①, ②, ③ より, 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから,

△ ABC≡△ BAD　（証明終）

【5】△ ABC と△ ADE において,

仮定より,

AB=AD

∠ABC=∠ADE

また,

∠BAC=∠DAE（共通）

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから,

△ ABC≡△ ADE

よって, BC=DE　（証明終）

【6】△ ADF と△ EDC において，

正三角形 ADE の辺より，

AD=ED ⋯⋯①

正三角形 CDF の辺より，

DF=DC ⋯⋯②

また，

$\angle ADF = \angle ADC + \angle CDF$

$= 90° + 60° = 150°$

$\angle EDC = \angle EDA + \angle ADC = 60° + 90° = 150°$

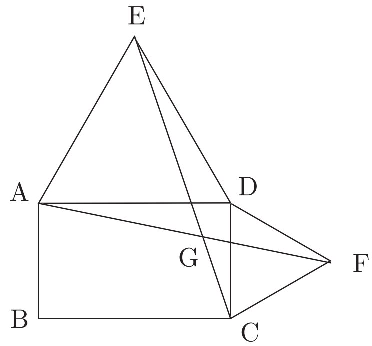
よって，　　∠ADF=∠EDC ⋯⋯③

①，②，③ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ ADF≡△ EDC

合同な図形において，対応する辺はそれぞれ等しいから，

AF=EC　（証明終）



【7】△ AED と△ FEC において，

仮定より，

DE=CE ⋯⋯①

AD//BF より，

∠ADE=∠FCE ⋯⋯②

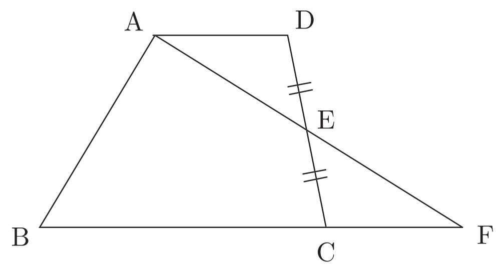
また，対頂角は等しいから，

∠AED=∠FEC ⋯⋯③

①，②，③ より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

△ AED≡△ FEC

ゆえに，AD=CF　（証明終）



【8】△ ABP と△ BCQ において，

仮定より，

BP=CQ ⋯⋯①

正三角形 ABC の辺より，

AB=BC ⋯⋯②

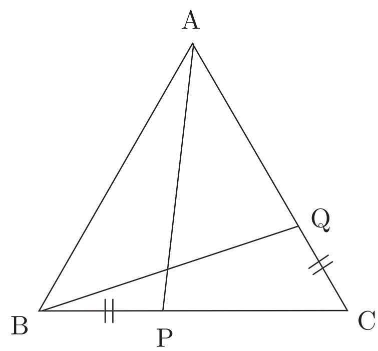
正三角形 ABC の角より，

∠ABP=∠BCQ（= 60°）⋯⋯③

①，②，③ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ ABP≡△ BCQ

ゆえに，AP=BQ　（証明終）



【9】(1) △ ABD と△ ACE において,

正三角形 ABC の辺より,

$AB=AC$ ……①

正三角形 ADE の辺より,

$AD = AE$ ……②

$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 60^\circ + \angle CAD$

$\angle CAE = \angle CAD + \angle DAE = \angle CAD + 60^\circ$

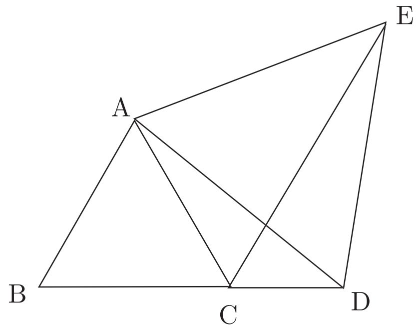
よって,

$\angle BAD = \angle CAE$ ……③

①, ②, ③ より, 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから,

△ ABD≡△ ACE

ゆえに, $BD=CE$ (証明終)



(2) (1) より, △ ABD≡△ ACE であるから,

$\angle ABD=\angle ACE= 60^\circ$

また, $\angle BAC= 60^\circ$ より,

$\angle BAC=\angle ACE$

錯角が等しいから,

$AB /\!/ EC$ (証明終)

【10】(1) △ BCD と△ ACE において,

正三角形 ABC の辺より,

$BC=AC$ ……①

正三角形 DCE の辺より,

$CD = CE$ ……②

$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD$

$= 60^\circ + \angle ACD$

$\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = \angle ACD + 60^\circ$

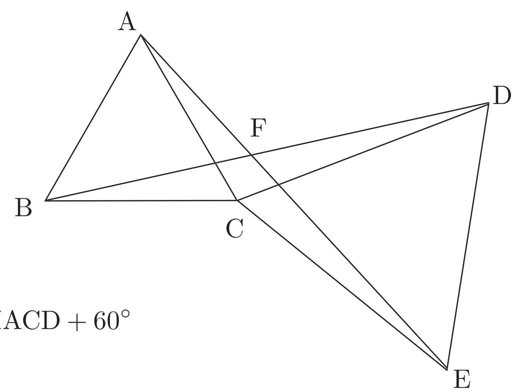
よって,

$\angle BCD=\angle ACE$ ……③

①, ②, ③ より, 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから,

△ BCD≡△ ACE

ゆえに, $BD=AE$ (証明終)



(2) △BCD≡△ACE より，

$$\angle BDC = \angle AEC \quad \cdots\cdots ④$$

△DFE において，

$$\angle FDE = \angle BDC + \angle CDE$$
$$= \angle BDC + 60^\circ \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$\angle DEF = \angle DEC - \angle AEC$$
$$= 60^\circ - \angle AEC \quad \cdots\cdots ⑥$$

よって，④，⑤，⑥ より，

$$\angle DFE = 180^\circ - (\angle FDE + \angle DEF)$$
$$= 180^\circ - (\angle BDC + 60^\circ + 60^\circ - \angle AEC)$$
$$= 60^\circ - (\angle BDC - \angle AEC)$$
$$= 60^\circ - 0^\circ$$
$$= \mathbf{60^\circ}$$

添削課題

【1】・**3** 辺の長さがそれぞれ等しい．(**3** 辺相等)

・**2** 辺の長さとその間の角の大きさがそれぞれ等しい．(**2** 辺夾角相等)

・**1** 辺の長さとその両端の角の大きさがそれぞれ等しい．(**1** 辺両端角相等または **2** 角夾辺相等)

【2】〔　　〕には順に,

EB

BC

CBF

EBA

∠ABF

∠EBC

2 辺とその間の角

AF

EC

(　　) には順に,

$\cdots$ **一方**

次の③，④は，前の①，② とは別の根拠から導かれているので，話題の転換を表す「一方」を用いる．「よって」と「したがって」は同じ意味で区別はない．

$\cdots$ **①，②，⑤より**

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいという合同条件を用いることができる根拠は①，②，⑤ である．

【3】△ ABD と△ EBC において,

仮定より，BD は ∠ABC の二等分線なので

$$\angle ABD = \angle EBC \ \cdots ①$$

また，仮定より,

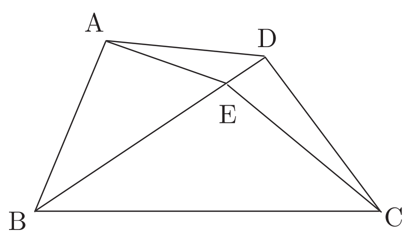
$$\begin{cases} AB = EB \ \cdots ② \\ BD = BC \ \cdots ③ \end{cases}$$

①，②，③ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので,

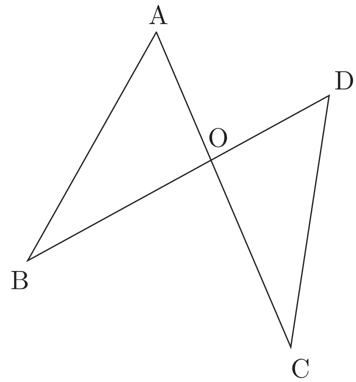
$$\triangle ABD \equiv \triangle EBC$$

合同な図形の対応する辺の長さは等しいので,

$AD = EC$　(証明終)



【4】△ ABC と△ DCB において，



仮定より，

$$\begin{cases} AB = DC & \cdots ① \\ CA = BD & \cdots ② \end{cases}$$

一方，

BC は共通 ···③

①，②，③ より，3 つの辺がそれぞれ等しいので，

△ ABC≡△ DCB

合同な図形の対応する角の大きさは等しいので，

$\angle CAB = \angle BDC$ ···④

$\angle ABC = \angle DCB$ ···⑤

$\angle BCA = \angle CBD$ ···⑥

一方，△ AOB と△ DOC において，

仮定より，

$AB = DC$ ···⑦

④ より，

$\angle BAO = \angle CDO$ ···⑧

また，

$$\begin{aligned} \angle OBA &= \angle ABC - \angle CBD \\ &= \angle DCB - \angle BCA \quad [⑤,\ ⑥より] \\ &= \angle OCD \cdots ⑨ \end{aligned}$$

⑦，⑧，⑨ より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

△ AOB≡△ DOC　（証明終）

小テスト

【1】(1) $\angle \boldsymbol{a}$と $\angle \boldsymbol{b}$

(2) $\angle \boldsymbol{a}$と $\angle \boldsymbol{c}$, $\angle \boldsymbol{b}$と $\angle \boldsymbol{d}$, $\angle \boldsymbol{c}$と $\angle \boldsymbol{f}$

(3) $\angle \boldsymbol{a}$と $\angle \boldsymbol{d}$, $\angle \boldsymbol{b}$と $\angle \boldsymbol{c}$, $\angle \boldsymbol{d}$と $\angle \boldsymbol{f}$

(4) $\angle \boldsymbol{c}$と $\angle \boldsymbol{e}$, $\angle \boldsymbol{d}$と $\angle \boldsymbol{e}$

注意：平行線でなくとも同位角・錯角・同側内角の関係となる.

２６章　合同と証明（３）

問題

【1】AB $=$ AC の二等辺三角形について考える．

$\angle$A の二等分線と辺 BC との交点を D とする．

$\triangle$ ABD と $\triangle$ ACD において

仮定より，

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAD} \cdots ①$$

二等辺三角形の定義より，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \cdots ②$$

また，

AD は共通 $\cdots$③

①，②，③ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

$$\triangle \mathrm{ABD} \equiv \triangle \mathrm{ACD}$$

合同な図形の対応する辺は等しいから，

$$\mathrm{BD} = \mathrm{CD}$$

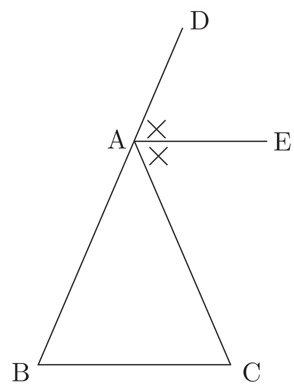
つまり，点 D は辺 BC を二等分する点である．

よって，二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺の中点を通る．　（証明終）

【2】(1) 仮定　**AB ＝ AC, $\angle$DAE$=\angle$CAE**

結論　**AE // BC**

(2) **2 本の直線に他の 1 本の直線が交わってできる同位角または錯角が等しいとき，2 本の直線は平行となる．**



(3) **$\angle$ABC$=\angle$DAE または $\angle$ACB$=\angle$EAC**

(4) **$\angle$ABC$=\angle$ACB**

(5) 三角形の外角は，

それに隣り合わない 2 つの内角の和に等しいので，

$$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C}$$

仮定より，$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C}$ なので，

$$\angle \mathrm{DAC} = 2\angle \mathrm{B} \cdots ①$$

一方，仮定 $\angle \mathrm{DAE} = \angle \mathrm{CAE}$ より，

$$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{DAE} + \angle \mathrm{CAE} = 2\angle \mathrm{DAE} \cdots ②$$

①，② より

$$2\angle \mathrm{B} = 2\angle \mathrm{DAE}$$

$$\therefore \angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{DAE}$$

よって，2 本の直線に他の 1 本の直線が交わってできる同位角が等しくなっているので，

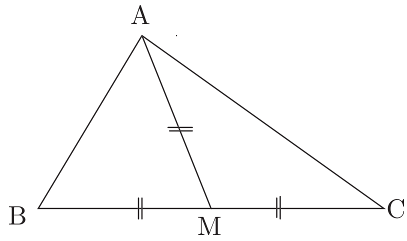
AE // BC　（証明終）

【3】△ MAB において，
$\angle\mathrm{MAB} = \angle\mathrm{MBA} = a$ とおく．

△ MCA において，
$\angle\mathrm{MCA} = \angle\mathrm{MAC} = b$ とおく．

△ ABC において，内角の和は 180° であるから，

$$\angle\mathrm{MBA} + \angle\mathrm{MAB} + \angle\mathrm{MAC} + \angle\mathrm{MCA} = 180^\circ$$
$$2a + 2b = 180^\circ$$



ゆえに，
$a + b = 90^\circ$

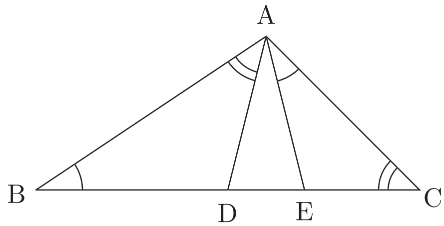
よって，
$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{MAB} + \angle\mathrm{MAC} = a + b = 90^\circ$　（証明終）

【4】△ ABD において，三角形の外角は内対角の和に等しいから，

$\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{ABD} + \angle\mathrm{DAB}$ $\cdots$①

また，同様に△ AEC において，

$\angle\mathrm{AED} = \angle\mathrm{CAE} + \angle\mathrm{ECA}$ $\cdots$②



ここで，仮定より，

$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{CAE},\ \angle\mathrm{DAB} = \angle\mathrm{ECA}$ $\cdots$③

①，②，③ より，

$\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{AED}$

△ ADE において，2 つの底角が等しいから，△ ADE は二等辺三角形である．

よって，AD = AE　（証明終）

【5】△ BCD と△ CBE において，

仮定より，BD=CE $\cdots\cdots$①

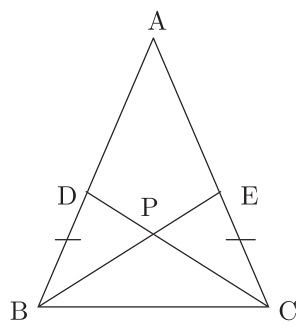
△ ABC は二等辺三角形であるから，

$\angle$DBC=$\angle$ECB $\cdots\cdots$②

また，BC は共通 $\cdots\cdots$③

①，②，③ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ BCD≡ △ CBE



よって，$\angle$PBC=$\angle$PCB

△ PBC において，2 つの底角が等しいから，△ PBC は二等辺三角形である．

（証明終）

【6】(1) △POM と△PON において,

仮定より,

∠POM=∠PON ……①

∠PMO=∠PNO= 90° ……②

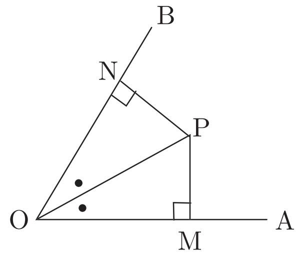
また,

PO は共通 ……③

①, ②, ③ より, 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから,

△POM≡△PON

よって, PM=PN　(証明終)



(2) △POM と△PON において,

仮定より,

PM=PN ……①

∠PMO=∠PNO= 90° ……②

また,

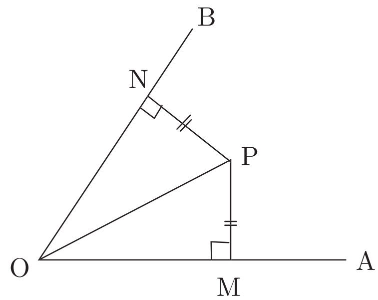
PO は共通 ……③

①, ②, ③ より, 直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから,

△POM≡△PON

よって, ∠POM=∠PON

ゆえに, P は ∠AOB の二等分線上にある.　(証明終)



【7】△DBC と△ECB において,

仮定より,

∠BDC=∠CEB= 90° ……①

∠BCD=∠CBE ……②

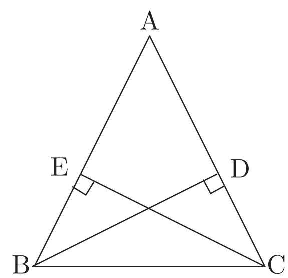
また,

BC は共通 ……③

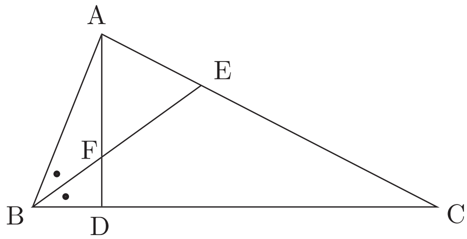
①, ②, ③ より, 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから,

△DBC≡△ECB

よって, BD=CE　(証明終)



【8】$\angle$ABE=$\angle$EBC= a とおく.



△ ABE において,

$\angle \mathrm{AEB} = 180^\circ - (\angle \mathrm{BAE} + \angle \mathrm{ABE})$

$= 180^\circ - (90^\circ + a)$

$= 90^\circ - a$ ……①

△ FBD において,

$\angle \mathrm{BFD} = 180^\circ - (\angle \mathrm{FDB} + \angle \mathrm{FBD})$

$= 180^\circ - (90^\circ + a)$

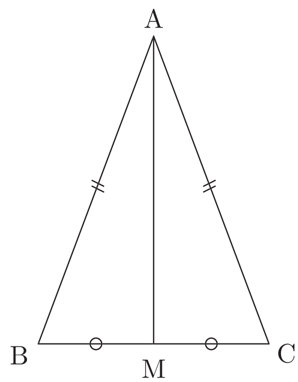
$= 90^\circ - a$

対頂角は等しいから,

$\angle$AFE=$\angle$BFD= $90^\circ - a$ ……②

①, ② より, 2 角が等しいので, △ AFE は二等辺三角形である.　(証明終)

【9】(1) △ ABC の辺 BC の中点を M とおく.



△ ABM と△ ACM において,

仮定より,

AB = AC …①

BM = CM …②

一方,

AM は共通 …③

①, ②, ③ より, 3 辺がそれぞれ等しいので,

△ ABM≡ △ ACM

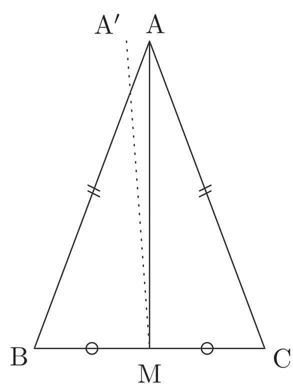
合同な図形の対応する角は等しいから,

$\angle$MAB = $\angle$MAC

よって, 二等辺三角形の頂角の頂点と, 底辺の中点を結ぶ線分は頂角を二等分する.

(証明終)

(2) △ ABC の辺 BC の中点を M とし, BC の垂直二等分線上の点を A′ とする.



(このとき, 直線 A′M と AM は一致するかどうかはまだわからない.)

△ ABM と△ ACM において,

仮定より

AB = AC …①

BM = CM …②

一方,

AM は共通 …③

①, ②, ③ より, 3 辺がそれぞれ等しいので,

△ ABM≡ △ ACM

合同な図形の対応する角は等しいから,

$$\angle \mathrm{BMA} = \angle \mathrm{CMA} \quad \cdots ④$$

一方, B, M, C は一直線上にあるので,

$$\angle \mathrm{BMA} + \angle \mathrm{CMA} = 180^\circ$$

これと ④ より,

$$\angle \mathrm{BMA} + \angle \mathrm{BMA} = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \angle \mathrm{BMA} = 90^\circ$$

よって, AM は M を通り, BC に垂直な直線である.

点 M を通り BC に垂直な直線はただ 1 つしかないので, AM は AM$'$ と一致する.

つまり A は, BC の垂直二等分線上にある.

以上より, 二等辺三角形の底辺の垂直二等分線は, 頂角の頂点を通る.

（証明終）

添削課題

【1】(1) 折り返す前の図形と，折り返した後の図形は合同だから，

$\triangle \mathrm{ADC} \equiv \triangle \mathrm{AEC}$

よって，$\angle \mathrm{CAE} = \angle \mathrm{CAD}$

したがって，$\angle \mathrm{CAD} = (90^\circ - 40^\circ) \times \dfrac{1}{2} = 25^\circ$

AD // BC より，平行線の錯角は等しいので，

$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{CAD} = \mathbf{25^\circ}$

(2) $\triangle$ AEC は $\triangle$ ADC を折り返したものだから，

$\triangle \mathrm{AEC} \equiv \triangle \mathrm{ADC}$

よって，$\angle \mathrm{CAF} = \angle \mathrm{CAD}$ $\cdots$①

AD // BC より，平行線の錯角は等しいので，

$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{ACF}$ $\cdots$②

①，② より，$\angle \mathrm{CAF} = \angle \mathrm{ACF}$

したがって 2 角が等しいので，$\triangle$ FAC は $\mathrm{AF} = \mathrm{CF}$ の二等辺三角形である．

（証明終）

＜別解＞

$\triangle$ ABF と $\triangle$ CEF において，

$\angle \mathrm{ABF} = \angle \mathrm{CEF} (= 90^\circ)$ $\cdots$①

長方形の対辺の長さは等しいので，

$\mathrm{AB} = \mathrm{CE} (= \mathrm{DC})$ $\cdots$②

対頂角は等しいから，$\angle \mathrm{AFB} = \angle \mathrm{CFE}$

これと，$\angle \mathrm{BAF} = 90^\circ - \angle \mathrm{AFB}$，$\angle \mathrm{ECF} = 90^\circ - \angle \mathrm{CFE}$ より，

$\angle \mathrm{BAF} = \angle \mathrm{ECF}$ $\cdots$③

①，②，③ より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

$\triangle \mathrm{ABF} \equiv \triangle \mathrm{CEF}$

合同な図形において，対応する辺は等しいので，

$\mathrm{AF} = \mathrm{CF}$　（証明終）

【2】(1) △ ABC において，$\angle A = \angle B = \angle C$ とすると，

$\angle B = \angle C$ より，$AB = AC \cdots$①
$\angle C = \angle A$ より，$BC = BA \cdots$②

①，② より，$AB = BC = CA$

よって，3 つの内角が等しい三角形は正三角形である．

（証明終）

(2) △ ABH と△ ACH において，△ ABC が二等辺三角形であることより，

$AB = AC \cdots$①
$\angle ABH = \angle ACH \cdots$②

また仮定より，$\angle AHB = \angle AHC = 90^\circ \cdots$③

①，②，③ より，直角三角形において，斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので，

△ ABH ≡ △ ACH

合同な図形において，対応する辺や角はそれぞれ等しいから，

$\angle BAH = \angle CAH$

よって，AH は頂角 A を 2 等分する．

また，$BH = CH$ より，H は BC の中点である．

（証明終）

＜別解＞

② を $AH = AH$（共通）として，斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいことより証明してもよい．

小テスト

【1】〔　　〕には順に，

△ DMB

AM

対頂角

2 辺とその間の角

（　　）には順に，

$\cdots$ **仮定より**

△ AMC≡ △ DMB は示すべき結論なので，まだこの時点で正しいとは分かっていない．したがって理由として使ってはならない．AM = DM であることは，CM = BM であるための理由にはなっていない．

$\cdots$ **△ DMB**

対応する頂点の順に必ず書く．

1MJSS/1MJS/1MJ

中１選抜東大・医学部数学

中１数学

中１東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	