2MJSS/2MJS/2MJ

本科２期12月度

解答

Ｚ会東大進学教室

中２選抜東大・医学部数学

中２数学

中２東大数学

２４章　円とその性質（１）

問題

【1】(1) $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ より

$\angle x=\angle y=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=\mathbf{30^\circ}$

(2) $\angle x=\angle\mathrm{APB}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}\times 220^\circ=\mathbf{110^\circ}$

(3) $\angle\mathrm{BAC}$ は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角

$\angle x=\angle\mathrm{BOC}=2\times\angle\mathrm{BAC}=2\times 25^\circ=\mathbf{50^\circ}$

(4) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角より

$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ADB}=50^\circ$

$\triangle\mathrm{EBC}$ で内対角の和が外角に等しいことより

$\angle x=60^\circ+50^\circ=\mathbf{110^\circ}$

(5) $\angle\mathrm{BAC}=40^\circ$ は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角なので

$\angle\mathrm{BOC}=40^\circ\times 2=80^\circ$

$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{DOC}+\angle\mathrm{OCD}$ より

$85^\circ=80^\circ+\angle x$

$\angle x=\mathbf{5^\circ}$

(6) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ より

$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{ABO}=40^\circ$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$ より

$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{ACO}=20^\circ$

$\therefore\ \angle\mathrm{BAC}=40^\circ+20^\circ=60^\circ$

$\angle\mathrm{BOC}=2\times\angle\mathrm{BAC}=2\times 60^\circ=\mathbf{120^\circ}$

(7) $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ より

$\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{BCO}=30^\circ$

$\therefore\ \angle\mathrm{BOC}=180^\circ-30^\circ\times 2=120^\circ$

$\therefore\ \angle x=\dfrac{1}{2}(360^\circ-120^\circ)=\mathbf{120^\circ}$

(8) $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角より，$\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{CAD}=x$

$\angle\mathrm{CBA}=\dfrac{1}{2}\times\angle\mathrm{COA}=65^\circ$

$\therefore\ \angle x=\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{CBA}-\angle\mathrm{ABD}=65^\circ-60^\circ=\mathbf{5^\circ}$

【2】(1) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中心角は $360^\circ\times\dfrac{1}{5}$

$\angle x$ はその $\dfrac{1}{2}$ より

$\angle x=360^\circ\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{36^\circ}$

同様に

$\angle y=360^\circ\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{72^\circ}$

(2) BD は直径より

$$\angle x = 180^\circ \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{2} = \mathbf{70^\circ}$$

$$\angle \mathrm{ADB} = 180^\circ \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = 60^\circ$$

$$\angle y = \angle x + \angle \mathrm{ADB} = 70^\circ + 60^\circ = \mathbf{130^\circ}$$

(3) AD を結ぶと $\angle \mathrm{ADB} = 90^\circ$ となるので

$$\angle \mathrm{BAD} = 90^\circ - \angle \mathrm{ABD} = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ に対する円周角より

$$\angle \mathrm{BCD} = \angle \mathrm{BAD} = 49^\circ$$

外角の定理より

$$\angle x = \angle \mathrm{BCD} + \angle \mathrm{ABC} = 49^\circ + 23^\circ = \mathbf{72^\circ}$$

(4) 半円の弧に対する円周角より

$$\angle x = \mathbf{90^\circ}$$

$\angle \mathrm{BFE} = 90^\circ$ より AC // DE．同位角が等しいので

$$\angle \mathrm{FGB} = \angle \mathrm{ACB} = 58^\circ$$

一方 CD を結ぶと $\angle \mathrm{BDC} = 90^\circ$ より

$$\angle \mathrm{DCB} = 90^\circ - 78^\circ = 12^\circ$$

$\overset{\frown}{\mathrm{DB}}$ に対する円周角より

$$\angle \mathrm{DEB} = \angle \mathrm{DCB} = 12^\circ$$

$\triangle$ BGE において $\angle y + \angle \mathrm{DEB} = \angle \mathrm{FGB}$ より

$$\angle y + 12^\circ = 58^\circ \qquad \therefore \quad \angle y = \mathbf{46^\circ}$$

(5) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} : \overset{\frown}{\mathrm{BC}} : \overset{\frown}{\mathrm{CD}} : \overset{\frown}{\mathrm{DA}} = 2 : 2 : 3 : 5$ より，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角は

$$360^\circ \times \frac{2}{2+2+3+5} = 60^\circ$$

$$\therefore \quad \angle x = \frac{1}{2} \times 60^\circ = \mathbf{30^\circ}$$

$\angle \mathrm{CAD}$ は $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角なので

$$\angle \mathrm{CAD} = \frac{1}{2} \times 360^\circ \times \frac{3}{2+2+3+5} = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$$

$$\angle y = \angle \mathrm{CED} = \angle \mathrm{CAD} + \angle \mathrm{ADB} = 45^\circ + 30^\circ = \mathbf{75^\circ}$$

【3】 A と C を結ぶ．

AD//BC より，∠ACB=∠CAD (錯角)

円周角の大きさが等しければ，それに対する弧の長さは等しいので，

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{DC}}$ （証明終）

【4】仮定より

$\angle BAE = \angle EAC \quad \cdots\cdots ①$

$\overset{\frown}{BE}$ に対する円周角より

$\angle BAE = \angle BCE \quad \cdots\cdots ②$

$\overset{\frown}{EC}$ に対する円周角より

$\angle EAC = \angle EBC \quad \cdots\cdots ③$

①，②，③ より

$\angle BCE = \angle EBC$

2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形なので

$BE = CE$ （証明終）

＜別解＞

仮定より

$\angle BAE = \angle EAC$

同じ円周角に対する弧の長さは等しいので

$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$

等しい弧の長さに対する弦の長さは等しいので

$BE = CE$

【5】(1) $\angle ABC + \angle ADC = 180°$ より

$\angle x + 85° = 180°$

$\angle x = 95°$

$\angle BCD = \angle EAD$ より

$\angle y = 110°$

(2) $\angle x = \mathbf{110°}$

$\angle y = 180° - \angle x - 40° = \mathbf{30°}$

(3) $\angle BCE = 180° - \angle BCD = 180° - 110° = 70°$

$\angle x = \angle BEC + \angle BCE = 30° + 70° = \mathbf{100°}$

$\angle y = 180° - \angle x = 180° - 100° = \mathbf{80°}$

(4) AD は直径より

$\angle ABD = 90° \qquad \therefore\ \angle DAB = 180° - 90° - 18° = 72°$

$\angle DAB + \angle BCD = 180°$ より

$72° + \angle x = 180°$

$\angle x = \mathbf{108°}$

四角形 BCDE は円に内接しているので

$\angle FED = \angle BCD$

$\therefore\ \angle y = \angle x = \mathbf{108°}$

(5) $\angle\mathrm{BCD} = 180° - 60° = 120°$

$\angle\mathrm{ECF} = \angle\mathrm{BCD}$(対頂角) $= 120°$

ここで, $\angle\mathrm{ECF} = \angle\mathrm{CDF} + \angle x$

$$120° = (60° + 40°) + \angle x$$

よって, $\angle x = 120° - (60° + 40°) = \mathbf{20°}$

【6】(1) いえる

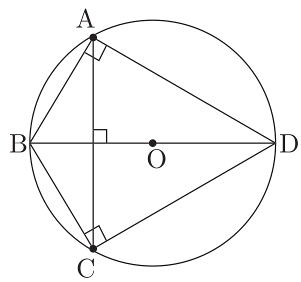
［証明］ひし形は平行四辺形なので, その対角は等しい. 一方, 円に内接するのでその和は 180° である. よって, ひし形が円に内接するならば, 対角は共に 90° となる. ゆえに, すべての角が直角となり, なおかつすべての辺は等しいので必ず正方形になる.　　　(証明終)

(2) いえる

［証明］平行四辺形の対角は等しい. 一方, 円に内接するならば, その和は 180° である. よって, 対角は共に 90° となる. したがって, すべての角が直角となるので, 円に内接する平行四辺形は必ず長方形になる.　　　(証明終)

(3) いえない

次のような例がある.



【7】(1) 接弦定理より, $\angle x = \mathbf{58°}$

(2) 接弦定理より

$\angle\mathrm{SAB} = \angle\mathrm{ACB} = 70°$

$\therefore\ 70° + \angle x + 48° = 180°$

$\therefore\ \angle x = \mathbf{62°}$

(3) BC を結ぶと AB が直径より $\angle\mathrm{ACB} = 90°$

$\therefore\ \angle\mathrm{ABC} = 180° - 90° - 20° = 70°$

接弦定理より

$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{BAC} = 20°$

外角の性質から

$\angle x + \angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{ABC}$

$\angle x + 20° = 70°$　　　$\therefore\ \angle x = \mathbf{50°}$

(4) 円周角の大きさは弧に比例するので，

$$\angle \mathrm{ACB} : \angle \mathrm{BAC} = \overset{\frown}{\mathrm{AB}} : \overset{\frown}{\mathrm{BC}} = 3 : 2$$

$$\therefore \quad \angle \mathrm{ACB} : \angle x = 3 : 2$$

$$\angle \mathrm{ACB} = \frac{3}{2}\angle x$$

接弦定理より，$\angle \mathrm{ABC} = 80^\circ$．三角形の内角の和は 180° より，

$$\angle x + \frac{3}{2}\angle x + 80^\circ = 180^\circ \qquad \therefore \quad \frac{5}{2}\angle x = 100^\circ \qquad \therefore \quad \angle x = \mathbf{40^\circ}$$

(5) BC は直径より，$\angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$

$$\angle \mathrm{ACB} = 180^\circ - 90^\circ - \angle x = 90^\circ - \angle x$$

接弦定理より

$$\angle \mathrm{DAB} = \angle \mathrm{ACB} = 90^\circ - \angle x$$

△ ADB において，外角の性質から

$$\angle \mathrm{ADB} + \angle \mathrm{DAB} = \angle \mathrm{ABC}$$

$$\therefore \quad 26^\circ + 90^\circ - \angle x = \angle x \qquad \therefore \quad 2\angle x = 116^\circ \qquad \angle x = \mathbf{58^\circ}$$

(6) 接弦定理より

$$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{SAB} = \angle x$$

円に内接する四角形の対角の和は 180° なので，$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ADC} = 180^\circ$

$$85^\circ + (\angle x + 40^\circ) = 180^\circ \qquad \therefore \quad \angle x = \mathbf{55^\circ}$$

【8】仮定より，$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{DAB}$ ……①

AT は円 O の接線より，

$\angle \mathrm{TAC} = \angle \mathrm{ABD}$(接弦定理) ……②

△ ABD の外角より，

$\angle \mathrm{ABD} + \angle \mathrm{DAB} = \angle \mathrm{TDA}$ ……③

したがって，

$\angle \mathrm{TAD} = \angle \mathrm{TAC} + \angle \mathrm{CAD}$

$= \angle \mathrm{ABD} + \angle \mathrm{DAB}$(①，②より)

$= \angle \mathrm{TDA}$(③より)

よって，

2 角が等しいので，△ ADT は二等辺三角形　（証明終）

【9】D と T を結ぶ.

接弦定理より，∠BTD=∠TAD ……①

$\overset{\frown}{\mathrm{ET}}$ に対する円周角より，∠EAT=∠EDT ……②

また，∠EAT=∠TAD ……③

①，②，③ より，∠EDT=∠BTD

錯角が等しいので，DE//BC　（証明終）

【10】(1) O と A，O と B を結ぶ.

△ OAM と△ OBM において，

$\angle$OMA=$\angle$OMB= 90°

OA=OB (OA，OB ともに円 O の半径)

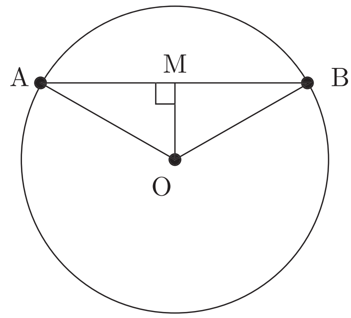
OM 共通

よって，直角三角形において，斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので，

△ OAM ≡ △ OBM

対応する辺の長さは等しいので，

AM = BM　（証明終）



(2) O と A，O と B を結ぶ．△ OAM と△ OBM において，

AM=BM (仮定)

OA=OB (円 O の半径)

OM 共通

よって，3 辺相等より，△ OAM≡ △ OBM

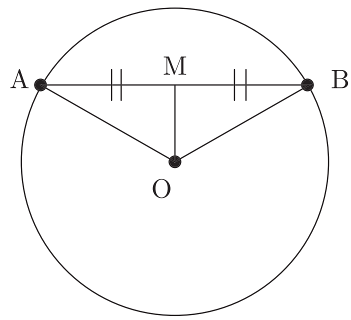
対応する角の大きさは等しいので，

$\angle$OMA = $\angle$OMB

また，$\angle$OMA+$\angle$OMB= 180°

したがって，$\angle$OMA=$\angle$OMB= 90°

つまり，OM⊥AB　（証明終）



【11】(1) E と T を結ぶと，

$\angle$ETF = 90° (EF は直径)

$\angle$BTE = $\angle x$ (接弦定理)

$\angle$CBD = 45° (四角形 ABCD は正方形)

△ BFT において，

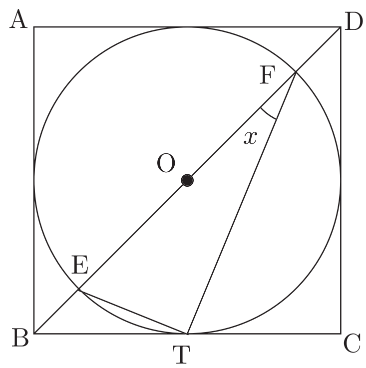
$\angle$BFT + $\angle$BTF + $\angle$FBT = 180°

したがって，

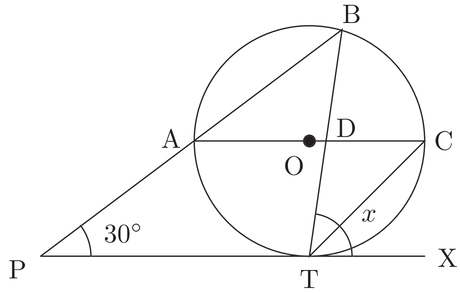
$\angle x + (90° + \angle x) + 45° = 180°$

$\angle x + 90° + \angle x + 45° = 180°$

$\angle x = \mathbf{22.5°}$



(2) AC//PT，PT⊥OT より，AC⊥OT だから，

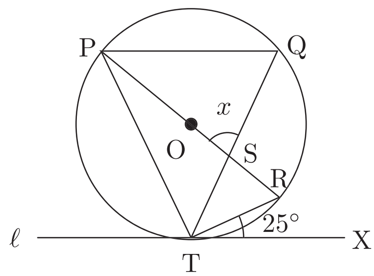


$$\angle \mathrm{ABT} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOT} = 45^\circ$$

よって，

$\angle x = \angle \mathrm{BPT} + \angle \mathrm{ABT} = 30^\circ + 45^\circ = \mathbf{75^\circ}$

(3) P と T を結ぶ.



$\angle \mathrm{RTX} = \angle \mathrm{RPT} = 25^\circ$(接弦定理)

$\angle \mathrm{PTR} = 90^\circ$(PR は直径)

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{TRP} &= 180^\circ - (\angle \mathrm{RPT} + \angle \mathrm{PTR}) \\ &= 180^\circ - (25^\circ + 90^\circ) \\ &= 65^\circ\end{aligned}$$

$\angle \mathrm{TQP} = \angle \mathrm{TRP} = 65^\circ$

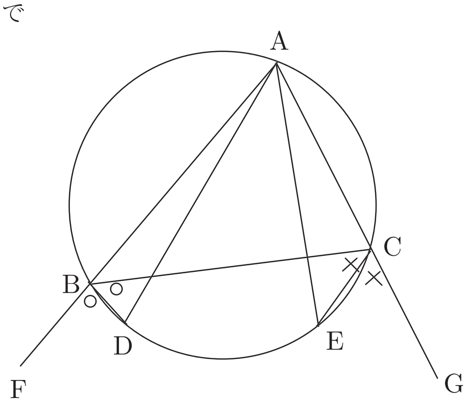
$\angle \mathrm{QTX} = \angle \mathrm{TQP} = 65^\circ$($\mathrm{PQ} \parallel \ell$)

$\angle \mathrm{QTR} = \angle \mathrm{QPR} = 40^\circ$

よって，

$$\begin{aligned}\angle x &= 180^\circ - (\angle \mathrm{TQP} + \angle \mathrm{QPR}) \\ &= 180^\circ - (65^\circ + 40^\circ) \\ &= \mathbf{75^\circ}\end{aligned}$$

【12】 〔証明〕四角形 ABDE は円に内接しているので



$\angle \mathrm{FBD} = \angle \mathrm{AED}$ ……①

同様に四角形 ACED は円に内接しているので

$\angle \mathrm{GCE} = \angle \mathrm{ADE}$ ……②

仮定 AD = AE より

$\angle \mathrm{AED} = \angle \mathrm{ADE}$ ……③

①，②，③ より

$\angle \mathrm{FBD} = \angle \mathrm{GCE}$ ……④

BD，CE はそれぞれ外角の二等分線なので

$\angle \mathrm{FBC} = 2\angle \mathrm{FBD}$

$\angle \mathrm{GCB} = 2\angle \mathrm{GCE}$

これと ④ より

$\angle \mathrm{FBC} = \angle \mathrm{GCB}$

$\therefore\ \angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ACB}$

2 つの角が等しいので△ ABC は二等辺三角形である.（証明終）

【13】(1) $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角より，

$\angle BAC = \angle BFC$

仮定より，$\angle BAC = \angle AEC$

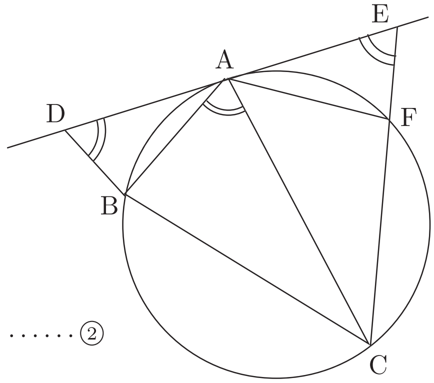
したがって，$\angle BFC = \angle AEC$

よって，同位角が等しいから，

$BF /\!/ DE$

ゆえに，錯角も等しいので，

$\angle DAB = \angle ABF$ ……①



ここで，接弦定理より，$\angle DAB = \angle AFB$ ……②

①，② より，$\angle ABF = \angle AFB$

$\triangle$ ABF において，底角が等しいから，

$AB = AF$　（証明終）

(2) $\triangle$ ABD と $\triangle$ AFE において，

(1) より，$AB = AF$ ……①

$BF /\!/ DE$ より，$\angle AFB = \angle FAE$

接弦定理より，$\angle AFB = \angle BAD$

よって，$\angle BAD = \angle FAE$ ……②

また，仮定より，$\angle BDA = \angle FEA$

残りの角も等しいから，$\angle ABD = \angle AFE$ ……③

①，②，③ より，

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

$\triangle ABD \equiv \triangle AFE$

合同な三角形の対応する辺はそれぞれ等しいので，

$AD = AE$　（証明終）

【14】AP 上に $PD = PC$ …① となる点 D をとる．

$\overset{\frown}{AC}$ に対する円周角より

$\angle CPD = \angle CBA = 60^\circ$

これと $PD = PC$ より $\triangle$ PCD は正三角形.

$$\therefore \begin{cases} PC = DC & \cdots\cdots ② \\ \angle PCD = 60^\circ & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

ここで $\triangle$ BPC，$\triangle$ ADC において

$$\begin{cases} BC = AC & (\text{正三角形の辺はすべて等しいから}) \\ PC = DC & (②\text{より}) \\ \angle PCB = 60^\circ - \angle DCB & (③\text{より}) \\ \qquad\quad = \angle DCA & \end{cases}$$

よって二辺夾角相等より，$\triangle BPC \equiv \triangle ADC$

$\therefore$ $BP = AD$ ……④

したがって，①，④ より

$BP + CP = AD + DP = AP$　（証明終）

添削課題

【1】(1) $\angle x = \angle\mathrm{ACB} = \mathbf{35°}$

$\triangle$ ADE において，$\angle y = 50° + 35° = \mathbf{85°}$

(2) $\angle\mathrm{AOC} = 20° \times 2 = 40°$

OA=OC より，$\angle x = \dfrac{1}{2} \times (180° - 40°) = \mathbf{70°}$

＜別解＞

OB=OC より，$\angle\mathrm{OCB} = 20°$

AB が直径より，$\angle\mathrm{ACB} = 90°$ だから，$\angle x = 90° - 20° = \mathbf{70°}$

(3) $\angle x = 360° \times \dfrac{2}{2+3+4} = 360° \times \dfrac{2}{9} = \mathbf{80°}$

$\angle y = \dfrac{1}{2} \times \angle\mathrm{BOC} = \dfrac{1}{2} \times 360° \times \dfrac{3}{2+3+4} = \dfrac{1}{2} \times 360° \times \dfrac{1}{3} = \mathbf{60°}$

(4) 四角形 ABCD は円に内接しているので，$\angle\mathrm{ADC} = 180° - 68° = 112°$

よって，$\triangle$ CDE において，$\angle x = 112° - 27° = \mathbf{85°}$

(5) $\angle x = \angle\mathrm{AEC} = 40° + 15° = \mathbf{55°}$

$\angle y = \angle x + 15° = \mathbf{70°}$

(6) $\triangle$ OBD において，$\angle\mathrm{ODB} = \angle\mathrm{OBD} = 20°$ より，

$\angle\mathrm{DOB} = 180° - 20° \times 2 = 140°$ だから，$\angle\mathrm{DCB} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{DOB} = 70°$

よって，$\angle x = 180° - \angle\mathrm{DCB} = \mathbf{110°}$

【2】(1) 接弦定理より，$\angle\mathrm{BAT} = \angle\mathrm{BTY} = 40°$

よって，$\angle x = 2\angle\mathrm{BAT} = \mathbf{80°}$

(2) 接弦定理より，$\angle\mathrm{CTB} = \angle\mathrm{CAT} = 30°$

また，$\angle\mathrm{ATB} = 180° - (30° + 35°) = 115°$

よって，$\angle x = 115° - 30° = \mathbf{85°}$

(3) $\angle\mathrm{ABT} = \angle\mathrm{ATX} = 55°$

AB が直径より，$\angle\mathrm{ATB} = 90°$ だから，$\triangle$ ATB で，

$\angle\mathrm{TAB} = 180° - (90° + 55°) = 35°$

$\angle x = \angle\mathrm{TAB} = \mathbf{35°}$

(4) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ より．$\angle\mathrm{BTA} = \angle\mathrm{BTC} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ATC} = \dfrac{1}{2}(180° - 56° - 30°) = 47°$

$\angle x = \angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{CAT} = \angle\mathrm{BTC} + \angle\mathrm{CBT} = 47° + 30° = \mathbf{77°}$

(5) $\triangle$ PTT′ において，PT=PT′ より．

$\angle x = \angle\mathrm{PTT'} = \dfrac{1}{2}(180° - 70°) = \mathbf{55°}$

$\angle\mathrm{TAT'} = \angle x = 55°$ だから，$\triangle$ T′AT において，

$\angle y = 180° - (55° + 60°) = \mathbf{65°}$

(6) $\angle x = 360° - 115° \times 2 = \mathbf{130°}$

$\angle\mathrm{OTP} = \angle\mathrm{OT'P} = 90°$ より，四角形 OT′PT において，

$\angle y = 360° - (130° + 90° \times 2) = \mathbf{50°}$

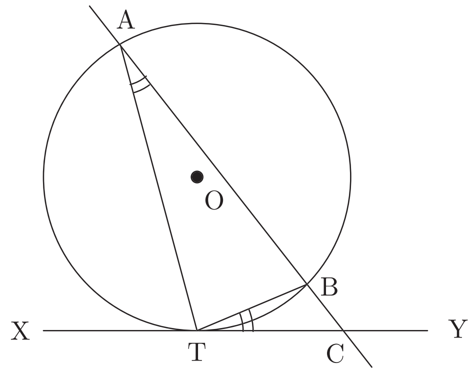
【3】△ ATC と△ TBC において，

$\angle ACT = \angle TCB$ (共通)

$\angle TAC = \angle BTC$ (接弦定理)

よって，2 組の角がそれぞれ等しいので，

△ ATC ∽ △ TBC　（証明終）



小テスト

【1】(1) **3**

(2) **24**

(3) **24**

(4) **6**

(5) **35**

２５章　円とその性質（２）

問題

【1】(1) $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}=40^\circ$ より，

$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{ADB}+\angle\mathrm{BDC}=40^\circ+45^\circ=85^\circ$

$$\begin{aligned}\angle x&=\angle\mathrm{ACD}\\&=180^\circ-(\angle\mathrm{DAC}+\angle\mathrm{ADC})\\&=180^\circ-(60^\circ+85^\circ)\\&=\mathbf{35^\circ}\end{aligned}$$

(2) C と D を結ぶ.

$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$

$\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-(40^\circ+90^\circ)=50^\circ$

よって，

$\angle x=180^\circ-50^\circ=\mathbf{130^\circ}$

(3)
$$\begin{aligned}\angle\mathrm{AOB}&=180^\circ-\angle\mathrm{ABO}\times 2\\&=180^\circ-50^\circ\times 2=80^\circ\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\angle\mathrm{OAE}&=180^\circ-\angle\mathrm{AEO}-\angle\mathrm{AOB}\\&=180^\circ-70^\circ-80^\circ=30^\circ\end{aligned}$$
$$\angle x=\angle\mathrm{OAE}=\mathbf{30^\circ}$$
$$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$$
$$\begin{aligned}\angle y&=180^\circ-\angle\mathrm{ACD}-\angle\mathrm{OAE}\\&=180^\circ-90^\circ-30^\circ\\&=\mathbf{60^\circ}\end{aligned}$$

(4) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ より，等しい弧に対する円周角は等しいので

$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{ADB}=50^\circ$

円に内接する四角形の和は 180° より

$\angle x+50^\circ\times 2=180^\circ \qquad \therefore\ \angle x=\mathbf{80^\circ}$

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角より

$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ADB}=50^\circ$

外角の性質より

$\angle y+18^\circ=50^\circ \qquad \therefore\ \angle y=\mathbf{32^\circ}$

(5) T と T$'$ を結ぶ.

PT=PT$'$ より，$\triangle$ PT$'$T は二等辺三角形

$\angle\mathrm{PTT'}=(180^\circ-120^\circ)\times\dfrac{1}{2}=30^\circ$

接弦定理より，$\angle x=\angle\mathrm{PTT'}=\mathbf{30^\circ}$

(6) 四角形 ABCT は，円に内接する四角形なので，

$\angle\mathrm{TCP}=\angle\mathrm{TAB}=85^\circ$

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{CTP}&=180^\circ-60^\circ-85^\circ\\&=35^\circ\end{aligned}$$

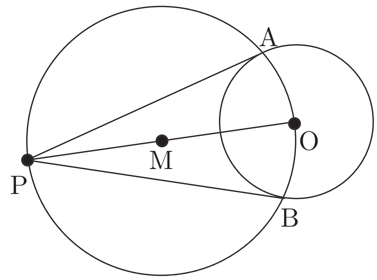
接弦定理より，$\angle\mathrm{CTP}=\angle\mathrm{TBC}$

△ BCT の外角より，$\angle TBC + \angle x = \angle TCP$

よって，

$$\begin{aligned}\angle x &= \angle TCP - \angle TBC \\ &= \angle TCP - \angle CTP \\ &= 85^\circ - 35^\circ \\ &= \mathbf{50^\circ}\end{aligned}$$

【2】直角を作図するには，半円の弧に対する円周角を作ればよいことを利用する.



① 円外の点 P と円 O の中心 O を結び，PO の中点 M を作図する.

② M を中心に PO を直径とする円を描く.

③ ② の円と円 O との交点を A，B とする.

④ 直線 AP，BP が点 P から円 O への接線となる.

≪理由≫

∠PAO，∠PBO は半円の弧に対する円周角でいずれも直角.

円周上の点において半径と直交する直線は接線であるから.

【3】(1) AE = AF，BF = BD，CD = CE より，

$$\begin{aligned}CE &= CD \\ &= BC - BD \\ &= BC - BF \\ &= BC - (AB - AF) \\ &= BC - (AB - AE) \\ &= 11 - (12 - 5.5) \\ &= \mathbf{4.5}\end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} \angle B = 90^\circ \\ \angle OEB = \angle OFB = 90^\circ \\ OE = OF \end{cases}$

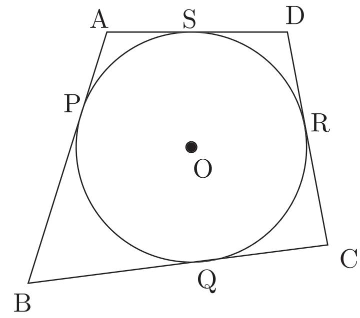
より，四角形 OEBF は正方形．よって，BF = 8cm

また，HD = GD，GC = FC

よって，

$$\begin{aligned}HD &= GD \\ &= CD - GC \\ &= CD - FC \\ &= CD - (BC - BF) \\ &= 17 - (18 - 8) \\ &= \mathbf{7(cm)}\end{aligned}$$

【4】辺 AB，BC，CD，DA と円 O との接点を順に P，Q，R，S とする．



点 A は円外の 1 点であるから，点 A から引いた 2 本の接線 AP，AS の長さは等しい．

$\therefore \mathrm{AP} = \mathrm{AS}$ ……①

同様にして，

$\mathrm{BP} = \mathrm{BQ}$ ……②

$\mathrm{CQ} = \mathrm{CR}$ ……③

$\mathrm{DR} = \mathrm{DS}$ ……④

ここで，

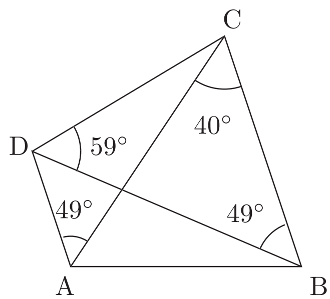
$\mathrm{AB} + \mathrm{CD} = (\mathrm{AP} + \mathrm{BP}) + (\mathrm{CR} + \mathrm{DR}) = \mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CR} + \mathrm{DR}$ ……⑤

$\mathrm{BC} + \mathrm{DA} = (\mathrm{BQ} + \mathrm{CQ}) + (\mathrm{AS} + \mathrm{DS}) = \mathrm{AS} + \mathrm{BQ} + \mathrm{CQ} + \mathrm{DS}$ ……⑥

よって ①，②，③，④ より，⑤ と ⑥ は等しい．

$\therefore \mathrm{AB} + \mathrm{CD} = \mathrm{BC} + \mathrm{DA}$ （証明終）

【5】$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{DBC}$ より，四角形 ABCD は円に内接する．



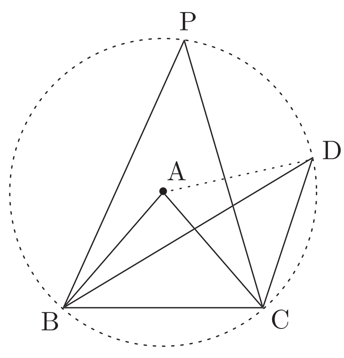
(1) $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}=$ **40°**

(2) $\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{CDA}=180^\circ$ より，

$\angle\mathrm{DBA} = 180^\circ - (40^\circ + 59^\circ) - 49^\circ$

$= \mathbf{32^\circ}$

【6】(1) A を中心，AB(=AC) を半径とする円をかき，BC に関して A と同じ側の弧 BC 上に点 P をとる．



円周角の定理より，

$\angle\mathrm{BPC} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}$ ……①

一方，仮定より，

$\angle\mathrm{BDC} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}$ ……②

①，② より，

$\angle\mathrm{BPC} = \angle\mathrm{BDC}$

よって，円周角の定理の逆より，B，C，P，D は同一円周上にあるので，D は点 A を中心，AB を半径とする円周上にある．

円の半径はすべて等しいので，AB=AD

$\therefore \angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ABD}$ （証明終）

(2) $\angle BAC = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ + 60^\circ) = 20^\circ$

$\angle BDC = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ + 10^\circ) = 40^\circ$

$\therefore \angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle BDC$

また,

$\angle DBC = \angle DCB = 70^\circ$

より，DB=DC

よって，(1) に示したことより，A，B，C は D を中心とする円周上にある.

$\therefore AD = DB$

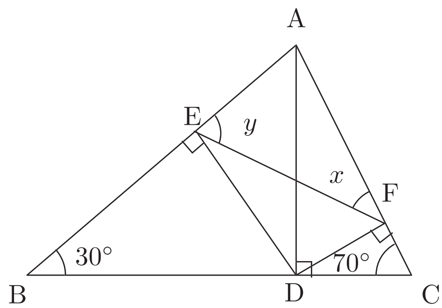
$\therefore \angle x = \angle ADB = 180^\circ - 30^\circ \times 2 = \mathbf{120^\circ}$

(弧 AB に対する中心角と円周角の関係から，∠ADB=2∠ACB でもよい．)

【7】四角形 AEDF において,

$\angle AED + \angle AFD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

なので，四角形 AEDF は円に内接する.



$\overset{\frown}{AE}$ に対する円周角より,

$\angle AFE = \angle ADE$ ……①

一方,

$\angle ADE = 90^\circ - \angle EAD$

(△ AED は直角三角形)

$= \angle ABD$

(△ ABD は直角三角形)

$= 30^\circ$ ……②

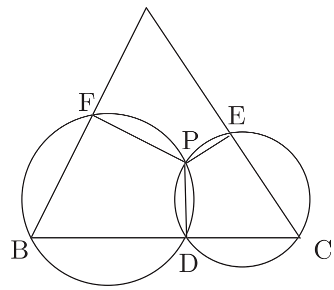
①，② より,

$\angle AFE = \angle x = \angle ADE = \angle ABD = \mathbf{30^\circ}$

同様にして,

$\angle AEF = \angle y = \angle ACB = \mathbf{70^\circ}$

【8】P と D，P と F，P と E をそれぞれ結ぶ.



四角形 FBDP は円に内接しているので,

$\angle AFP = \angle BDP$ ……①

四角形 ECDP は円に内接しているので,

$\angle AEP = \angle CDP$ ……②

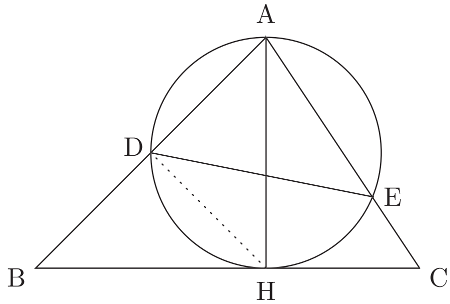
また，∠BDP+∠CDP= 180° ……③

①，②，③ より，∠AFP+∠AEP= 180°

よって，四角形 AFPE は円に内接する.

したがって，4 点 A，F，P，E は同一円周上にある.　（証明終）

【9】 (i) ∠ABC，∠ACB がともに鋭角のときH は辺 BC 上にあるから，右の図のようになる．



△ ADH と△ AHB において，

∠ADH= 90°

(∠ADH は半円の弧に対する円周角)

仮定より，∠AHB= 90°

よって，

∠ADH = ∠AHB ······①

∠DAH = ∠HAB(共通) ······②

①，② より，2 組の角の大きさがそれぞれ等しいので，

△ ADH ∽ △ AHB

相似な図形において，対応する角は等しいので，

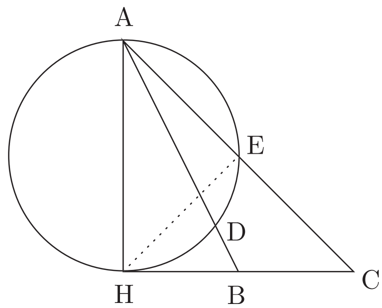
∠AHD = ∠ABH ······③

また，∠AHD=∠AED ······④

③，④ より，∠ABH=∠AED

よって，四角形 DBCE において 1 つの内角が，それと相対する角の外角と等しいので，四角形 DBCE は円に内接する．

(ii) ∠ABC が鈍角のときH は辺 BC の B 側の延長上にあるから，右の図のようになる．



△ AHE と△ ACH において，

同様にして，△ AHE∽ △ ACH より，

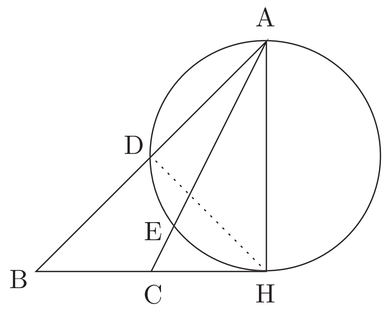
∠AHE = ∠HCA ······③′

また，∠AHE=∠ADE ······④′

③′，④′ より，∠HCA=∠ADE

よって，四角形 DBCE において 1 つの内角が，それと相対する角の外角と等しいので，四角形 DBCE は円に内接する．

(iii) ∠ACB が鈍角のとき H は辺 BC の C 側の延長上にあるから，右の図のようになる．



△ AHD と△ ABH において，

同様にして，△ AHD∽ △ ABH より，

$\angle \mathrm{AHD} = \angle \mathrm{HBA}$ ⋯⋯③″

また，$\angle \mathrm{AHD} {=} \angle \mathrm{AED}$ ⋯⋯④″

③″，④″ より，$\angle \mathrm{HBA} {=} \angle \mathrm{AED}$

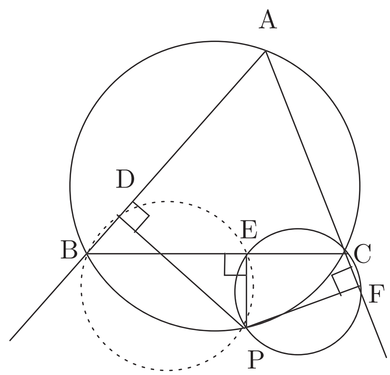
よって，四角形 DBCE において 1 つの内角が，それと相対する角の外角と等しいので，四角形 DBCE は円に内接する．

(i)，(ii)，(iii) より，

四角形 DBCE は円に内接する．　（証明終）

【10】$\angle \mathrm{BDP} {=} \angle \mathrm{BEP} {=} 90^\circ$ より，4 点 B，D，E，P を通る円が存在する．円に内接する四角形の対角の和は 180° なので，

$\angle \mathrm{DBP} + \angle \mathrm{DEP} = 180^\circ$ ⋯⋯①



一方，四角形 ABPC は円に内接しているので，

$\angle \mathrm{ABP} = \angle \mathrm{PCF}$ ⋯⋯②

また，$\angle \mathrm{PEC} {+} \angle \mathrm{PFC} {=} 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より，

四角形 PFCE も円に内接する．

弧 PF に対する円周角により，

$\angle \mathrm{PCF} = \angle \mathrm{PEF}$ ⋯⋯③

ここで ①，② より，$\angle \mathrm{DBP} {=} \angle \mathrm{ABP}$ なので，

$\angle \mathrm{PCF} + \angle \mathrm{DEP} = 180^\circ$

ここに ③ を代入すると，

$\angle \mathrm{PEF} + \angle \mathrm{DEP} = 180^\circ$

よって，∠DEF は平角 180° となるので，D，E，F は同一直線上にある．　（証明終）

【11】$\angle$PQC$= 45°$ より，

$\angle$AQC$= 180° - 45° = 135°$ に保たれる．

ここで点 D を中心とし，半径 AD=CD となる円を考え，線分 BD と交点をもつ側の弧上に点 R をとると，円周角の定理より，

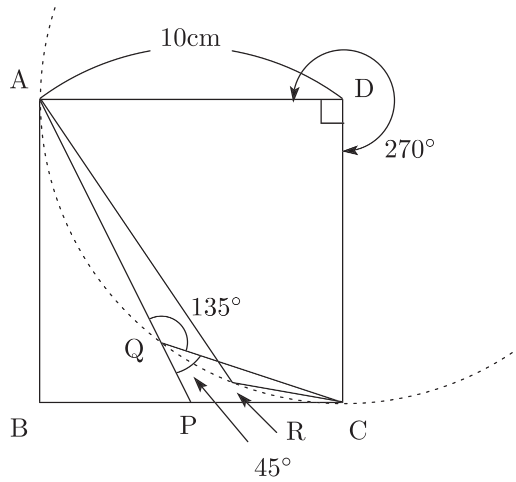
$$\angle \mathrm{ARC} = \frac{1}{2} \times 270° = 135°$$

よって，$\angle$ARC=$\angle$AQC

円周角の定理の逆より，点 Q は，D を中心とする半径 10cm の円周上にある．

この円周上の $\frac{1}{4}$ の範囲を Q は動くので，Q の動いたあとにできる曲線の長さは，

$$10 \times 2 \times \pi \times \frac{1}{4} = \boldsymbol{5\pi(\mathrm{cm})}$$



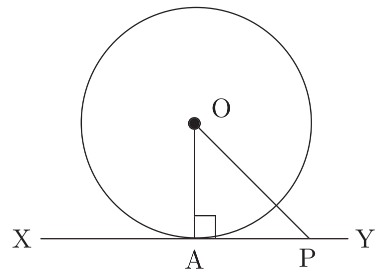
【12】(1) XY 上に点 A と異なる点 P をとると，OP は直角三角形 OAP の斜辺であるから，

$\mathrm{OP} > \mathrm{OA}$

より，P は円 O の外部にある．

このことは，XY 上の A と異なるすべての点について成り立つので，XY は円 O と 1 点 A だけを共有する直線である．

したがって，XY は円 O の接線である．　（証明終）



(2) 直線 XY が点 A における円 O の接線である (すなわち円 O と点 A だけを共有する) として，直線 XY が半径 OA と垂直でないと仮定する．

このとき，円の中心 O から XY へ垂線が引けて，その足を H とし，A の OH に関する対称点を A′ とすると，

$$\triangle \mathrm{OAH} \equiv \triangle \mathrm{OA'H}$$

だから

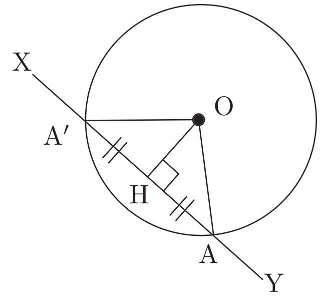
$$\mathrm{OA} = \mathrm{OA'}$$

となり，A′ は A とは異なる XY および円 O の周上の点となるから，円 O と XY が 1 点 A だけを共有するという仮定に反する．

したがって，

$\mathrm{OA} \perp \mathrm{XY}$　(つまり，A と H は一致する)

である．　（証明終）



【13】点 A における接線 AT′ を図のように引くと，接弦定理より，

$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BAT'}$

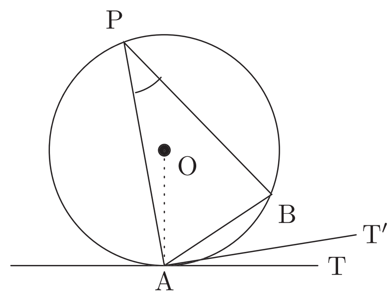
一方，仮定より，

$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BAT}$

よって，直線 AT と AT′ は一致する．

したがって，直線 AT は円 O に対する接線である．

（証明終）



【14】右の図のように，AE，FB を結ぶと，$\overset{\frown}{\mathrm{AF}}$ に対する円周角より，

$\angle\mathrm{AEF} = \angle\mathrm{ABF}$ ……①

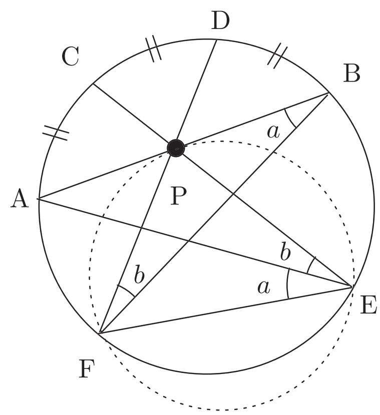
一方，等しい長さの弧に対する円周角は等しいので，$\overset{\frown}{\mathrm{AC}} = \overset{\frown}{\mathrm{DB}}$ より，

$\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{DFB}$ ……②

ここで，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{PEF} &= \angle\mathrm{AEC} + \angle\mathrm{AEF} \\ &= \angle\mathrm{DFB} + \angle\mathrm{ABF} \quad [①，②より] \\ &= \angle\mathrm{APF} \quad [外角の性質]\end{aligned}$$

よって，接弦定理の逆より，直線 AB は三角形 PEF の外接円の接線となる．　（証明終）



【15】$\angle$A, $\angle$B の角の二等分線の交点を I_1 ,

$\angle$C, $\angle$D の角の二等分線の交点を I_2

とする．I_1 から AB, BC, DA に下した垂線の足を P, Q_1, S_1 , I_2 から BC, CD, AD に下した垂線の足を Q_2, R, S_2 とする．

このとき，

$$\begin{cases} I_1S_1 = I_1P = I_1Q_1 \cdots ① \\ I_2Q_2 = I_2R = I_2S_2 \cdots ② \end{cases}$$

が成立する．

I_1 と I_2 は一致するかしないかのいずれかである．一致する場合は, $I_1Q_1 = I_2Q_2$, $I_1S_1 = I_2S_2$ となり，①，②より，I_1 および I_2 を中心とする内接円をかくことができる．

よって，$AB + CD = AD + BC$ であるとき，I_1 と I_2 が一致しないことはないことを示せばよい．

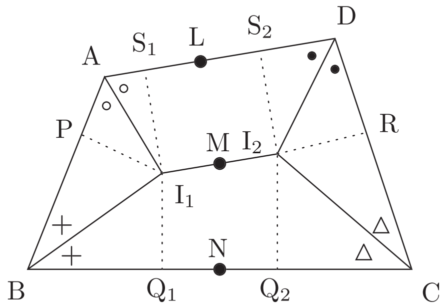
I_1 と I_2 が一致しないと仮定する．このとき，

(i)Q_1 と Q_2 が一致しない．

(ii)Q_1 と Q_2 が一致する．

のいずれかである．

(i) 辺 BC 上において，点の並ぶ順は，B, Q_1, Q_2, C の順か, B, Q_2, Q_1, C の順かのいずれかである．



B, Q_1, Q_2, C の順に並ぶとする．I_1I_2 の中点，Q_1Q_2 の中点，S_1S_2 の中点を順に M, N, L とする．N は線分 Q_1Q_2 上にあり，$I_1Q_1 \parallel I_2Q_2$ であるから，$MN \parallel I_1Q_1$ となる．

同様にして，$LM \parallel S_1I_1$ となる．

このことから，B, Q_1, N, Q_2, C の順に BC 上に点が並ぶならば，辺 AD 上においては，A, S_1, L, S_2, D の順に点が並ぶ．

このことより，$Q_1Q_2 > 0$, $S_1S_2 > 0$ ．ところが，

$$\begin{aligned} AD + BC &= AS_1 + S_1S_2 + S_2D + BQ_1 + Q_1Q_2 + Q_2C \\ &= AP + S_1S_2 + DR + BP + Q_1Q_2 + CR \\ &= AP + BP + CR + DR + S_1S_2 + Q_1Q_2 \\ &= AB + CD + S_1S_2 + Q_1Q_2 \end{aligned}$$

となり，$Q_1Q_2 > 0$, $S_1S_2 > 0$ とすると，仮定 $AD + BC = AB + CD$ に反する．

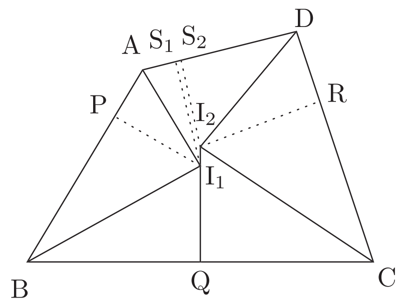
以上より，辺 BC 上において点の並ぶ順が，B, Q_1, Q_2, C の順になることはない．

同様にして，辺 BC 上において，B, Q_1, Q_2, C の順に並ぶとしても

$$AD + BC = AB + CD - S_1S_2 - Q_1Q_2$$

となって，矛盾が生じる．したがって，Q_1 と Q_2 が一致しないことは起こりえない．

(ii) Q_1 と Q_2 をあわせて Q と表す.



I_1 と I_2 が一致しなければ, I_1, I_2 から AD への垂線の足 S_1S_2 も一致しない．このとき，仮定より

$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$

$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CR}+\mathrm{DR}=\mathrm{AD}+\mathrm{BQ}+\mathrm{CQ}$

$\mathrm{AP}=\mathrm{AS}_1$，$\mathrm{DR}=\mathrm{DS}_2$,

$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}$，$\mathrm{CR}=\mathrm{CQ}$

より，$\mathrm{AS}_1+\mathrm{DS}_2=\mathrm{AD}$

よって，S_1，S_2 は一致しなければならない．したがって，Q_1 と Q_2 が一致して，I_1 と I_2 が一致しないことは起こりえない.

以上 (i)，(ii) より，I_1 と I_2 が一致しないとすると，いずれも矛盾が生じる．よって，I_1 と I_2 が一致しないことはない.

ゆえに，$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$ ならば，四角形 ABCD は円に外接する.　　（証明終）

添削課題

【1】(1) $\angle x = \angle \mathrm{ACD}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角)

$= 85^\circ - 25^\circ$

$= \mathbf{60^\circ}$

$\angle y = \angle \mathrm{ADB}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$に対する円周角)

$= 180^\circ - 45^\circ - 85^\circ$

$= \mathbf{50^\circ}$

(2) $\angle x = \angle \mathrm{BDC}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$に対する円周角)

$= 180^\circ - 125^\circ$

$= \mathbf{55^\circ}$

$\angle y = 180^\circ - \angle \mathrm{BDE} - \angle \mathrm{EBD}$

$= 180^\circ - 125^\circ - (70^\circ - \angle x)$

$= 180^\circ - 125^\circ - (70^\circ - 55^\circ)$

$= \mathbf{40^\circ}$

(3) 四角形 ATBC は円に内接するので

$\angle \mathrm{ATB} = \angle \mathrm{ACD} = 120^\circ$

$\therefore \angle x = 180^\circ - 120^\circ - 24^\circ = \mathbf{36^\circ}$

また，$\angle \mathrm{TBC} = 180^\circ - \angle y$

接弦定理より

$\angle \mathrm{BAT} = \angle \mathrm{BTF} = 24^\circ$

$\angle \mathrm{ABT} = \angle \mathrm{ATE} = \angle x = 36^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{AC}} : \overset{\frown}{\mathrm{CB}} = 3 : 2$ より，$\angle \mathrm{ABC} : \angle \mathrm{CAB} = 3 : 2$

$(180^\circ - \angle y) - 36^\circ : \angle y - 24^\circ = 3 : 2$

これを解いて，$\angle y = \mathbf{72^\circ}$

【2】(1) $\mathrm{AR} = 6 - x$

$\mathrm{CQ} = \mathrm{CR} = x$ より，$\mathrm{BQ} = 7 - x$

よって，$\mathrm{AB} = \mathrm{AP} + \mathrm{BP} = \mathrm{AR} + \mathrm{BQ}$ より，$5 = (6 - x) + (7 - x)$

したがって，$\boldsymbol{x = 4}$

(2) AS=AP，BP=BQ，CQ=CR，DR=DS より，

$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CR} + \mathrm{DR} = \mathrm{AS} + \mathrm{BQ} + \mathrm{CQ} + \mathrm{DS}$

つまり，$(\mathrm{AP} + \mathrm{BP}) + (\mathrm{CR} + \mathrm{DR}) = (\mathrm{AS} + \mathrm{DS}) + (\mathrm{BQ} + \mathrm{CQ})$ より，

$\mathrm{AB} + \mathrm{CD} = \mathrm{AD} + \mathrm{BC}$

したがって，$6 + x = 4 + 10$ より，$\boldsymbol{x = 8}$

【3】四角形 OPCQ は，OP=OQ= r

$\angle$OPC=$\angle$PCQ=$\angle$OQC= 90° より，正方形である．

よって，PC=QC= r

面積について考えると，

$$\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{OBC} + \triangle \mathrm{OCA} + \triangle \mathrm{OAB}$$

よって，

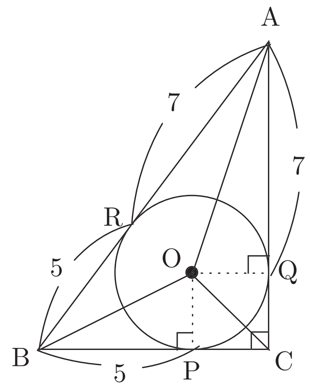
$$\frac{1}{2}(5+r)(7+r)$$

$$=\frac{1}{2}r(5+r)+\frac{1}{2}r(7+r)+\frac{1}{2}r\times(5+7)$$

整理して，$r^2+12r-35=0$

解の公式より，$r=-6\pm\sqrt{71}$

$r>0$ より，$\boldsymbol{r=-6+\sqrt{71}}$



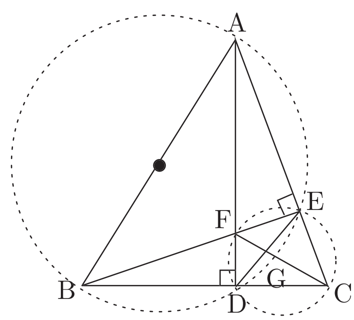
【4】(1) $\angle$AEB=$\angle$ADB より，四角形 AEDB は円に内接する．

また，

$$\angle\mathrm{CEF}+\angle\mathrm{CDF}=180^\circ$$

より，四角形 CEFD は円に内接する．

以上より，**四角形 AEDB と 四角形 CEFD**



(2) (1) より，四角形 ABDE は円に内接するから，

$$\angle\mathrm{CED}=\angle\mathrm{ABD}=62^\circ$$

よって，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{DEF}&=\angle\mathrm{CEF}-\angle\mathrm{CED}\\&=90^\circ-62^\circ\\&=\mathbf{28^\circ}\end{aligned}$$

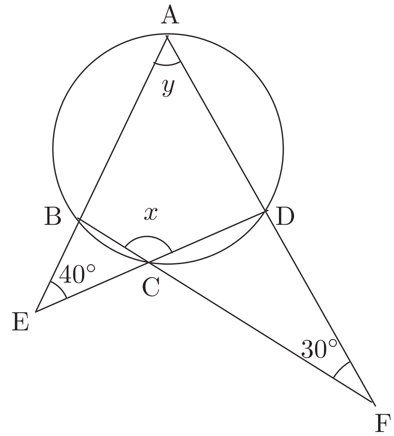
(3) (1) より，四角形 CEFD は円に内接するから，

$$\angle\mathrm{DCF}=\angle\mathrm{DEF}=28^\circ$$

$\triangle$ CGD で，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{CGD}&=180^\circ-(\angle\mathrm{DCF}+\angle\mathrm{CDE})\\&=180^\circ-(28^\circ+48^\circ)\\&=\mathbf{104^\circ}\end{aligned}$$

小テスト



【1】右の図で，$\angle\mathrm{BAD}=\angle y$ とおくと，

$$\begin{aligned}\angle x &= \angle\mathrm{EBC}+\angle\mathrm{BEC}\\ &= (\angle\mathrm{BAF}+\angle\mathrm{AFB})+\angle\mathrm{BEC}\\ &= \angle y+30^\circ+40^\circ\\ &= \angle y+70^\circ \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

また，四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle x+\angle y=180^\circ$$

$$\angle y=180^\circ-\angle x \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より，

$$\angle x=(180^\circ-\angle x)+70^\circ$$

$$\angle x=\frac{180^\circ+70^\circ}{2}=\mathbf{125^\circ}$$

２６章　円とその性質（３）

問題

【1】(1) 四角形 ABCD は円に内接するので，$\angle x = 180^\circ - \angle \mathrm{ADC} = \mathbf{134^\circ}$

$\angle \mathrm{AOC} = 2 \times \angle \mathrm{ADC} = 92^\circ$

$\triangle$ AOC は二等辺三角形なので，$\angle y = \dfrac{180^\circ - 92^\circ}{2} = \mathbf{44^\circ}$

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角で $\angle x = \angle \mathrm{CAD} = \mathbf{25^\circ}$

同じく $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角で $\angle \mathrm{CED} = 25^\circ$

$\angle \mathrm{AED}$ は半円の弧に対する円周角なので 90°．$\therefore \angle y = 90^\circ - \angle \mathrm{CED} = \mathbf{65^\circ}$

(3) $\angle \mathrm{BOC} = (360^\circ - 216^\circ) \times \dfrac{2}{1+2} = 96^\circ$．$\therefore \angle x = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{BOC} = \mathbf{48^\circ}$

$\angle \mathrm{AOD} = 2 \times \angle \mathrm{ABD} = 160^\circ$．$\therefore \angle \mathrm{COD} = 216^\circ - 160^\circ = 56^\circ$

$\triangle$ COD は二等辺三角形なので，$\angle y = (180^\circ - 56^\circ) \div 2 = \mathbf{62^\circ}$

(4) AC と BD の交点を F とする．

四角形 ACDE は円に内接するので，$\angle \mathrm{ACD} = 180^\circ - \angle \mathrm{AED} = 44^\circ$

外角の定理より $\triangle$ FCD において，$\angle x = \angle \mathrm{ACD} + \angle \mathrm{CDF} = 44^\circ + 40^\circ = \mathbf{84^\circ}$.

$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角より，$\angle y = \angle \mathrm{ACD} = \mathbf{44^\circ}$

(5) $\angle \mathrm{DBT} = 180^\circ - 72^\circ - 30^\circ = 78^\circ$

四角形 ABTC は円に内接するので，$\angle x = \angle \mathrm{DBT} = \mathbf{78^\circ}$

接弦定理より，$\angle y = \angle \mathrm{BTD} = \mathbf{30^\circ}$

(6) $\angle \mathrm{ATB} = 90^\circ$ より，$\angle \mathrm{OTB} = 90^\circ - \angle \mathrm{ATO} = 65^\circ$

$\triangle$ OTB は二等辺三角形より，$\angle x = \angle \mathrm{OTB} = \mathbf{65^\circ}$

接弦定理より，$\angle \mathrm{BTC} = \angle \mathrm{TAB} = 25^\circ$ ($\mathrm{OA} = \mathrm{OT}$ より)

外角の定理より，$\triangle$ BTC において，$\angle y = \angle \mathrm{TBO} - \angle \mathrm{BTC} = \angle x - 25^\circ = \mathbf{40^\circ}$

(7) $\mathrm{CT} = \mathrm{CS}$ より，$\angle \mathrm{STC} = \angle \mathrm{TSC} = (180^\circ - 64^\circ) \div 2 = 58^\circ$

接弦定理より，$\angle x = \angle \mathrm{STC} = \mathbf{58^\circ}$

$\angle \mathrm{ATB} = (180^\circ - 58^\circ) \times \dfrac{3}{2+3+1} = 122^\circ \times \dfrac{1}{2} = 61^\circ$

外角の定理より，$\triangle$ ADT において，$\angle y = \angle \mathrm{ATD} + \angle x = \mathbf{119^\circ}$

(8) 接弦定理より，$\angle \mathrm{TAB} = \angle \mathrm{BTF} = 52^\circ$

外角の定理より，$\angle x = \angle \mathrm{DAT} + \angle \mathrm{ATD} = 52^\circ + 28^\circ = \mathbf{80^\circ}$

$\overset{\frown}{\mathrm{TB}} = \overset{\frown}{\mathrm{CB}}$ より，$\angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{TAB} = 52^\circ$．$\therefore \angle \mathrm{CAT} = 52^\circ + 52^\circ = 104^\circ$

四角形 ATBC は円に内接するので，$\angle y = \angle \mathrm{CAT} = \mathbf{104^\circ}$

【2】(1) 四角形 ACDB は円に内接しているので,

$\angle\mathrm{PAC} = \angle\mathrm{CDB}$ ……①

ここで△ APC と△ DPB において,

$\angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{DPB}$ (共通)
$\angle\mathrm{CAP} = \angle\mathrm{BDP}$ (①より)

2 組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle\,\mathrm{APC} \backsim \triangle\,\mathrm{DPB}$

$\therefore \mathrm{AP} : \mathrm{CP} = \mathrm{DP} : \mathrm{BP}$

$\mathrm{AP} \times \mathrm{BP} = \mathrm{CP} \times \mathrm{DP}$ (証明終)

＜別証明＞

△ APD と△ CPB において,

$\angle\mathrm{APD} = \angle\mathrm{CPB}$ (共通)
$\angle\mathrm{PDA} = \angle\mathrm{PBC}$ (弧 AC に対する円周角)

2 組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle\,\mathrm{APD} \backsim \triangle\,\mathrm{CPB}$

$\therefore \mathrm{AP} : \mathrm{DP} = \mathrm{CP} : \mathrm{BP}$

$\mathrm{AP} \times \mathrm{BP} = \mathrm{CP} \times \mathrm{DP}$ (証明終)

(2) △ APT と△ TPB において,

$\angle\mathrm{APT} = \angle\mathrm{TPB}$ (共通)
$\angle\mathrm{PTA} = \angle\mathrm{PBT}$ (接弦定理)

2 組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle\,\mathrm{APT} \backsim \triangle\,\mathrm{TPB}$

$\therefore \mathrm{AP} : \mathrm{TP} = \mathrm{TP} : \mathrm{BP}$

$\mathrm{AP} \times \mathrm{BP} = \mathrm{TP}^2$ (証明終)

【3】(1) $\mathrm{AE} \times \mathrm{EC} = \mathrm{BE} \times \mathrm{ED}$ より,

$8x = 6 \times 12$

$x = \dfrac{6 \times 12}{8}$

$\boldsymbol{x = 9}$

(2) $\mathrm{AE} \times \mathrm{EC} = \mathrm{BE} \times \mathrm{ED}$ より,

$(x+2) \times 14 = x \times 18$

$14x + 28 = 18x$

$\boldsymbol{x = 7}$

(3) $\mathrm{EC} \times \mathrm{ED} = \mathrm{EB} \times \mathrm{EA}$ より,

$x \times 18 = 9 \times 24$

$\boldsymbol{x = 12}$

(4) $\mathrm{CE} \times \mathrm{DE} = \mathrm{BE} \times \mathrm{AE}$ より,

$(x+10) \times 10 = 22 \times 8$

$x + 10 = \dfrac{22 \times 8}{10}$

$\boldsymbol{x = \dfrac{38}{5}}$

(5) $\mathrm{CA} \times \mathrm{CB} = \mathrm{TC}^2$ より，

$$4(x+4) = 8^2$$
$$x+4 = 16$$
$$\boldsymbol{x = 12}$$

(6) $\mathrm{CT}^2 = \mathrm{CA} \times \mathrm{CB}$ より．

$$x^2 = 2 \times 8$$
$$\boldsymbol{x = 4} \ \ (x > 0)$$

【4】(1) $\mathrm{AE} \times \mathrm{EC} = \mathrm{BE} \times \mathrm{ED}$ より，

$$x(x+7) = (x+2)(x+3)$$
$$x^2 + 7x = x^2 + 5x + 6$$
$$2x = 6$$
$$\boldsymbol{x = 3}$$

(2) $\mathrm{AT}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$ より，

$$x^2 = 5 \times 15$$
$$\boldsymbol{x = 5\sqrt{3}} \ \ (x > 0)$$

(3) $\mathrm{CB} \times \mathrm{CA} = \mathrm{CD} \times \mathrm{CE}$

$$6 \times (x+6) = x \times (x+1)$$
$$x^2 - 5x - 36 = 0$$
$$(x+4)(x-9) = 0$$
$$x = -4,\ 9$$

$x > 0$ より，$\boldsymbol{x = 9}$

(4) $\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} = \mathrm{AD} \times \mathrm{AE}$

$$x \times \{x + (x+2)\} = 3 \times (3+1)$$
$$x(2x+2) = 3 \times 4$$
$$x^2 + x = 6$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x+3)(x-2) = 0$$

$x > 0$ より，$\boldsymbol{x = 2}$

同様に， $\mathrm{AT}^2 = \mathrm{AD} \times \mathrm{AE}$ より，

$$y^2 = 3 \times (3+1)$$
$$\therefore \boldsymbol{y = 2\sqrt{3}} \ \ (y > 0)$$

(5) $\mathrm{FG} \times \mathrm{GB} = \mathrm{AG} \times \mathrm{GE}$ より，

$$x \times 6 = 3 \times y \ \cdots ①$$

$\mathrm{DC} \times \mathrm{DB} = \mathrm{DE} \times \mathrm{DA}$ より，

$$2x \times (2x+10) = 3 \times (y+6) \ \cdots ②$$

① より，$y = 2x \ \cdots ③$

これを ② に代入すると，

$$2x \times (2x+10) = 3(2x+6)$$
$$x(2x+10) = 3(x+3)$$
$$2x^2 + 7x - 9 = 0$$
$$(x-1)(2x+9) = 0$$

$x > 0$ より，$\boldsymbol{x = 1}$

③ より，$\boldsymbol{y = 2}$

(6) $\mathrm{AF} \times \mathrm{FD} = \mathrm{BF} \times \mathrm{FE}$ より，

$$6(x+3) = 5y \ \cdots ①$$

$\mathrm{AG} \times \mathrm{GD} = \mathrm{EG} \times \mathrm{GC}$ より，

$$9x = 5(y-2) \ \cdots ②$$

① − ② より，

$$-3x + 18 = 10$$
$$-3x = -8$$
$$\boldsymbol{x = \frac{8}{3}}$$

② より，

$$24 = 5(y-2)$$
$$\boldsymbol{y = \frac{34}{5}}$$

(7) $\mathrm{GD} \times \mathrm{GC} = \mathrm{GT}^2$ より,

$$x(x+10) = 12^2$$
$$x^2 + 10x - 144 = 0$$
$$(x+18)(x-8) = 0$$
$$x = -18,\ 8$$

$x > 0$ より, $\boldsymbol{x = 8}$

$\mathrm{GE} \times \mathrm{GB} = \mathrm{GT}^2$ より,

$$9 \times \mathrm{GB} = 144$$
$$\mathrm{GB} = 16$$

$\therefore \mathrm{BE} = 16 - 9 = 7$

$\mathrm{FE} = 7 - \mathrm{BF} = 7 - (y+1) = 6 - y$

$\mathrm{AF} \times \mathrm{FC} = \mathrm{BF} \times \mathrm{FE}$ より,

$$y(y+4) = (y+1)(6-y)$$
$$y^2 + 4y = -y^2 + 5y + 6$$
$$2y^2 - y - 6 = 0$$
$$(y-2)(2y+3) = 0$$

$y > 0$ より, $\boldsymbol{y = 2}$

(8) $\mathrm{TE}^2 = \mathrm{CE} \times \mathrm{DE}$ より,

$$y^2 = (y+6) \times 8$$
$$y^2 - 8y - 48 = 0$$
$$(y-12)(y+4) = 0$$

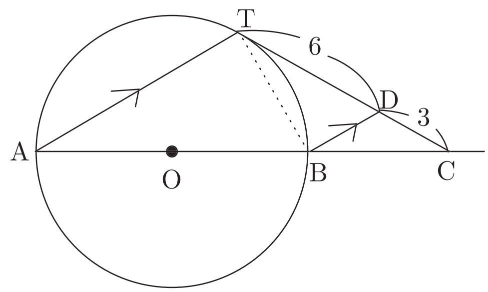
$y > 0$ より, $\boldsymbol{y = 12}$

$\mathrm{EB} \times \mathrm{EA} = \mathrm{TE}^2$ より,

$$x(x+12) = 144$$
$$x^2 + 12x - 144 = 0$$
$$x = -6 \pm 6\sqrt{5}$$

$x > 0$ より, $\boldsymbol{x = -6 + 6\sqrt{5}}$

【5】(1) $\mathrm{AO} = x$ とおくと, $\mathrm{AB} = 2x$



$\mathrm{AT} \parallel \mathrm{BD}$ より,

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{TD} : \mathrm{DC}$$
$$\therefore 2x : \mathrm{BC} = 6 : 3$$
$$\mathrm{BC} = x$$

方べきの定理より, $\mathrm{AC} \times \mathrm{BC} = \mathrm{TC}^2$

$$3x \times x = 9^2$$
$$x^2 = 27$$

$x > 0$ より, $x = 3\sqrt{3}$

よって, 円 O の半径は $\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

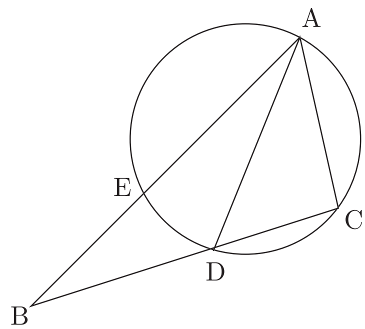
(2) $\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = 2 : 1$ より, $\triangle \mathrm{ATB} : \triangle \mathrm{TBC} = 2 : 1$

一方, $\mathrm{TD} : \mathrm{DC} = 6 : 3 = 2 : 1$ より, $\triangle \mathrm{TBD} : \triangle \mathrm{DBC} = 2 : 1$

$\therefore\ \ \triangle \mathrm{TBD} = \dfrac{2}{3} \triangle \mathrm{TBC},\ \triangle \mathrm{DBC} = \dfrac{1}{3} \triangle \mathrm{TBC}$

$\therefore\ \ \triangle \mathrm{ATB} : \triangle \mathrm{TBD} : \triangle \mathrm{DBC} = 2 : \dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3} = \mathbf{6 : 2 : 1}$

【6】(1) $AB \times BE = BC \times BD$ より，$BE = x$ とおくと，



$$(x+10)x = (8+4) \times 8$$
$$x^2 + 10x - 96 = 0$$
$$(x+16)(x-6) = 0$$

$x > 0$ より，$x = 6$．よって，$BE = \mathbf{6cm}$

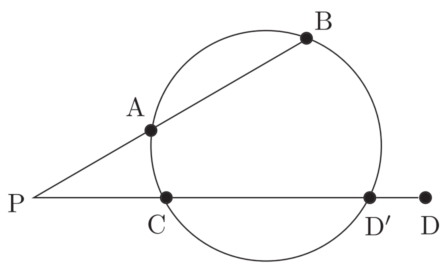
(2) 接点を T とすると，方べきの定理より

$$BT^2 = BD \times BC = 8 \times 12$$
$$BT = \sqrt{96} = \mathbf{4\sqrt{6}(cm)}$$

(3) 角の二等分線の性質より

$$AB : AC = BD : DC$$
$$16 : AC = 8 : 4$$
$$AC = \mathbf{8(cm)}$$

【7】(1) 3 点 A，B，C を通る円をかき，直線 PC との交点を D' とおく．



このとき，方べきの定理より，

$$AP \times BP = CP \times D'P$$

が成り立つ．

$$\therefore D'P = \frac{AP \times BP}{CP} \quad \cdots\cdots ①$$

一方，仮定 $AP \times BP = CP \times DP$ より，

$$DP = \frac{AP \times BP}{CP} \quad \cdots\cdots ②$$

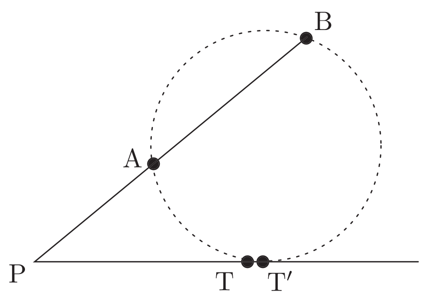
①，② より，$D'P = DP$

したがって，D，D' は直線 PC 上の点であるので，D と D' は一致する．

よって D は $AP \times BP = CP \times DP$ が成り立てば，3 点 A，B，C を通る円周上にある．

ゆえに 4 点 A，B，C，D は同一円周上にある．　（証明終）

(2) 3 点 A，B，T を通る円をえがき，点 P からこの円に接線を引き，接点を T' とおくと，方べきの定理より，



$$AP \times BP = PT'^2 \quad \cdots\cdots ①$$

一方，仮定より，

$$AP \times BP = PT^2 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より，

$$PT'^2 = PT^2$$
$$\therefore PT' = PT$$

よって P から T までの距離は，P から T' までの距離と等しいので，T もこの円の接点となる．

ゆえに PT は A，B，T を通る円の接線となっている．　（証明終）

【8】方べきの定理より,

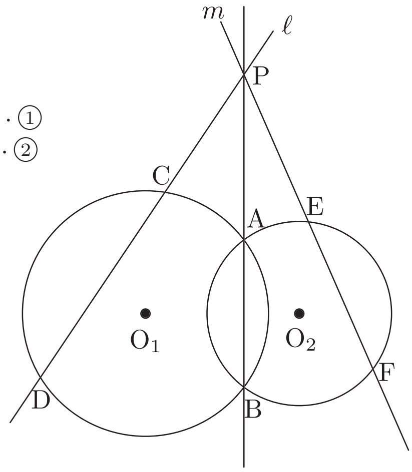
円 O_1 において　$PC \times PD = PA \times PB$ ……①

円 O_2 において　$PE \times PF = PA \times PB$ ……②

①, ② より,

$PC \times PD = PE \times PF$

よって, 方べきの定理の逆より, 4 点 C, D, E, F は同一円周上にある.　　（証明終）



【9】方べきの定理より,

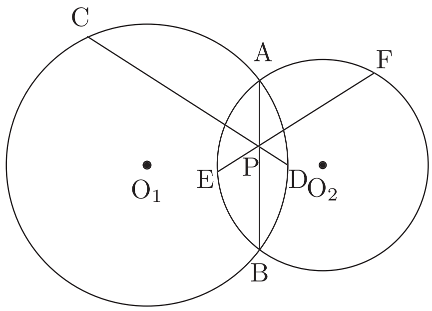
円 O_1 において　$PC \times PD = PA \times PB$ ……①

円 O_2 において　$PE \times PF = PA \times PB$ ……②

①, ② より,

$PC \times PD = PE \times PF$

よって方べきの定理の逆より, 4 点 C, D, E, F は同一円周上にある.　　（証明終）



【10】 (1) AD は $\angle$BAC の二等分線であるから,

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 5 : 4$$

よって,

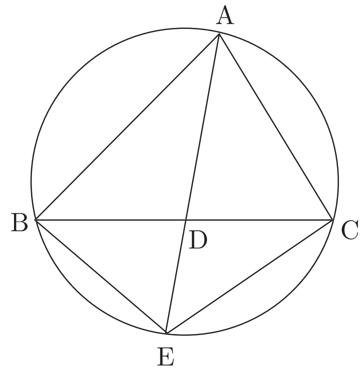
$$\mathrm{BD} = \frac{5}{9}\mathrm{BC} = \frac{10}{3}$$

$$\mathrm{DC} = \mathrm{BC} - \mathrm{BD} = \frac{8}{3}$$

方べきの定理より,

$$\mathrm{AD} \times \mathrm{DE} = \mathrm{BD} \times \mathrm{DC}$$

$$xy = \frac{10}{3} \times \frac{8}{3} = \mathbf{\frac{80}{9}}$$



(2) $\triangle$ ABE と $\triangle$ ADC において,

$\angle\mathrm{EAB} = \angle\mathrm{CAD}$ （仮定）

$\angle\mathrm{AEB} = \angle\mathrm{ACD}$ （$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$の円周角）

2 組の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle\,\mathrm{ABE} \backsim \triangle\,\mathrm{ADC}$$

よって,

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AD} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC}$$

$$5 : x = (x + y) : 4$$

$$x^2 + xy = 20$$

(1) より, $xy = \frac{80}{9}$ を代入して,

$$x^2 + \frac{80}{9} = 20$$

$$x^2 = \frac{100}{9}$$

$x > 0$ より,

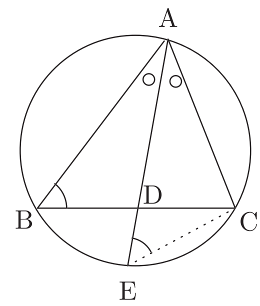
$$x = \sqrt{\frac{100}{9}} = \mathbf{\frac{10}{3}}$$

$$y = \frac{80}{9} \div \frac{10}{3} = \mathbf{\frac{8}{3}}$$

【11】(1) 結論の式

$$\mathrm{AD} \times \mathrm{AE} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$$

が，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}$ $\left(\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}\ \text{などでもよい}\right)$ のように変形でき，これが相似に関する比であることに注目する．



≪証明≫

線分 EC を結ぶと，△ ABD と△ AEC において，

$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{EAC}$ （仮定）

$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{AEC}$ （$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$に対する円周角）

2 組の角がそれぞれ等しいので，

$\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{AEC}$

$\mathrm{AB} : \mathrm{AD} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC}$

$\mathrm{AD} \times \mathrm{AE} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$ （証明終）

(2) △ ABC の外接円と AD の延長とが交わる点を E とすると，(1) より，

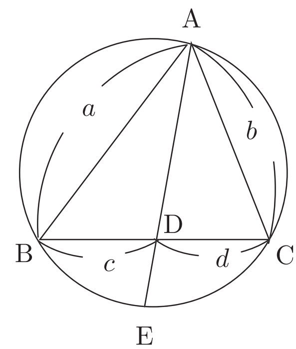
$\mathrm{AD} \times \mathrm{AE} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$

ここで，AE=AD+DE なので，

$$\mathrm{AD} \times (\mathrm{AD} + \mathrm{DE}) = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$$

$$\therefore \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD} \times \mathrm{DE} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$$

$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} - \mathrm{AD} \times \mathrm{DE}$$



ここで方べきの定理より，

$\mathrm{AD} \times \mathrm{DE} = \mathrm{BD} \times \mathrm{DC}$

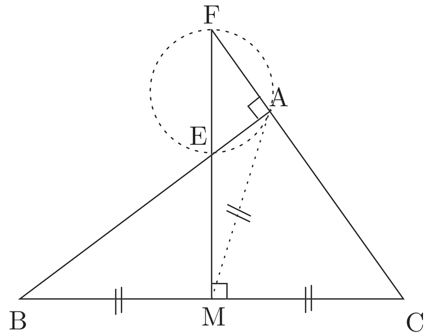
$$\therefore \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} - \mathrm{BD} \times \mathrm{DC} = ab - cd$$

$$\mathrm{AD} = \sqrt{ab - cd} \quad (\mathrm{AD} > 0)$$ （証明終）

【12】M は△ ABC の斜辺の中点より，

$AM = BM$

$\therefore \angle ABM = \angle BAM$



一方，

$\angle ABM = 90^\circ - \angle ACB$　（△ ABC の内角）

$= \angle EFA$　（△ MFC の内角）$\cdots$ ①

ここで，3 点 A，E，F を通る円を考えると，

① より接弦定理の逆から，AM はこの円の接線となっていることがわかる．

よって，方べきの定理より，

$AM^2 = EM \times FM$　（証明終）

<別解>

△ BEM と△ FCM において，

$\angle EMB = \angle CMF = 90^\circ$

$\angle MBE = 90^\circ - \angle BEM$

$= 90^\circ - \angle FEA$　（対頂角）

$= \angle MFC$

よって，2 組の角がそれぞれ等しいので，

△ BEM ∽ △ FCM

$\therefore BM : EM = FM : CM$

よって，

$EM \times FM = BM \times CM$ $\cdots\cdots$ ①

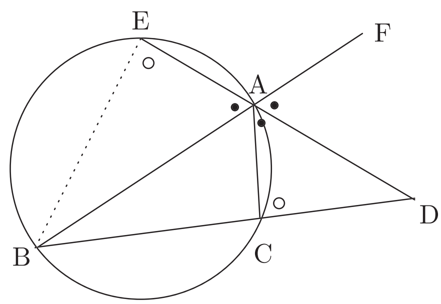
ここで，M は直角三角形 ABC の斜辺の中点なので，

$AM = BM = CM$

よって，① より，

$EM \times FM = AM^2$　（証明終）

【13】(1) 右の図のように，BA の延長上を F とする．



△ ABE と△ ADC において，四角形 EBCA は円に内接するから，外角と内対角の関係より，

$\angle BEA = \angle DCA$ $\cdots\cdots$ ①

一方，

$\angle EAB = \angle FAD$　（対頂角）

$= \angle CAD$ $\cdots\cdots$ ②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいので，

△ ABE ∽ △ ADC

$\therefore AB : AE = AD : AC$

$\therefore AB \times AC = AD \times AE$　（証明終）

(2) (1) より，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{AC}=b$ から，

$$\begin{aligned} ab &= \mathrm{AD}\times\mathrm{AE} \\ &= \mathrm{AD}\times(\mathrm{ED}-\mathrm{AD}) \\ &= \mathrm{AD}\times\mathrm{ED}-\mathrm{AD}^2 \end{aligned}$$

ここで，方べきの定理より，

$$\begin{aligned} \mathrm{AD}\times\mathrm{ED} &= \mathrm{CD}\times\mathrm{BD} \\ &= cd \end{aligned}$$

$$\therefore ab = cd-\mathrm{AD}^2$$

$$\mathrm{AD}^2 = cd-ab$$

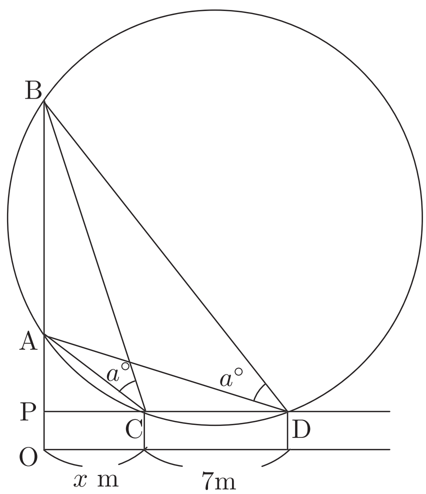
$$\mathrm{AD}=\sqrt{cd-ab}\ (\mathrm{AD}>0)$$ （証明終）

【14】(1) 看板の柱の根元を O.

看板の下端，上端を A，B.

見込む角が a° となるときの人の目の位置を C，D.

看板の柱の根元から 1.5m の高さの点を P とすると，



条件より，

$$\mathrm{AP}=3.5-1.5=2(\mathrm{m})$$

$$\mathrm{BP}=16.5-1.5=15(\mathrm{m})$$

一方，∠ACB=∠ADB= a° より，円周角の定理の逆より，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある.

よって方べきの定理より，次の式が成り立つ.

$$\mathrm{AP}\times\mathrm{BP}=\mathrm{CP}\times\mathrm{DP}$$

$$2\times 15 = x\times(x+7)$$

$$\therefore x^2+7x-30=0$$

$$(x+10)(x-3)=0$$

$$x=-10,\ 3$$

$x>0$ より，$\boldsymbol{x=3}$

(2) P を通り AB に垂直な直線上の点 Q において，$\angle\mathrm{AQB}= b^\circ$ であるとする．

3 点 A，Q，B を通る円が再び直線と交わる点を Q$'$ とすると，円周角の定理より，

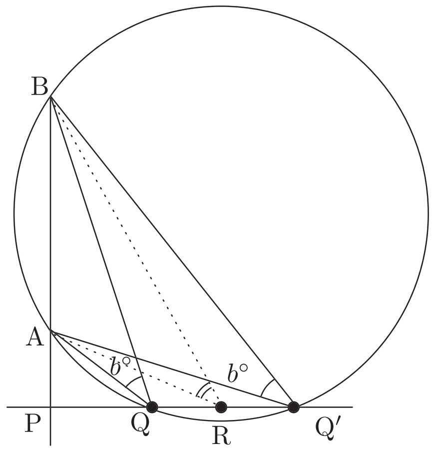
$\angle\mathrm{AQ'B} = b^\circ$

となる．

このとき線分 QQ$'$ 上の点 R をとると，R は円内の点なので，

$\angle\mathrm{ARB} > \angle\mathrm{AQB} = \angle\mathrm{AQ'B}$

が成り立つ．



よって，点 Q よりも点 R における見込む角の方が大きくなる．

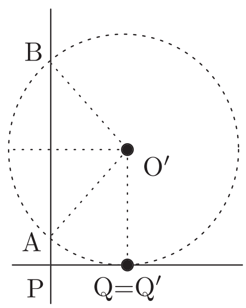
このことから $\angle\mathrm{AQB}$ が最も大きくなるように，Q を定めるには Q と Q$'$ の間に点がない状態，つまり Q と Q$'$ が一致するようにしなければならないとわかる．

すなわち PQ が A，B，Q を通る円の接線になるときである．

このとき方べきの定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= \mathrm{PA}\times\mathrm{PB}\\ &= 2\times 15\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{PQ} = \sqrt{30}\ (\mathrm{PQ} > 0)$



以上より，$\boldsymbol{\sqrt{30}}$**m**

【15】右の図のように記号を定める．

ここで条件より，

$$\begin{cases}\mathrm{QA} = \mathrm{AD} = \mathrm{DX} \\ \mathrm{PA} = \mathrm{AB} = \mathrm{BS}\end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore \begin{cases}\mathrm{AX} = 2\mathrm{AQ} \\ \mathrm{AS} = 2\mathrm{AP}\end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

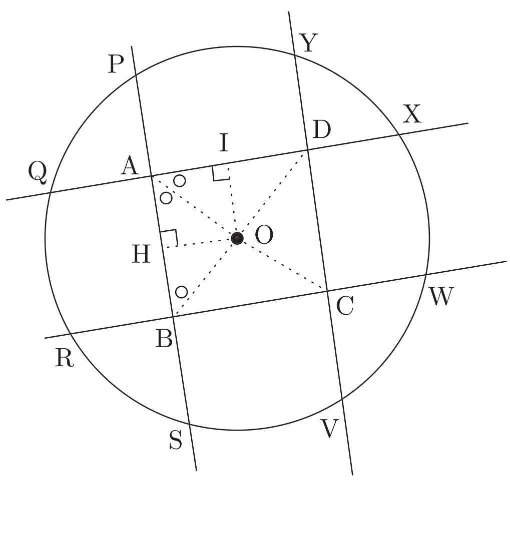
方べきの定理を用いると，

$\mathrm{AQ}\times\mathrm{AX} = \mathrm{AP}\times\mathrm{AS}$

② より，

$2\mathrm{AQ}^2 = 2\mathrm{AP}^2$

$\therefore \mathrm{AQ} = \mathrm{AP}$



$\therefore AD = AB$

同様にすることにより，四角形 ABCD は 4 辺の長さが等しい．すなわちひし形であることが示せる．

ここで，中心 O から辺 AB，辺 AD に下ろした垂線の足を H，I とおくと，弦に下ろした垂線の足は弦を 2 等分するので，

$PH = SH$

一方，① より，PA=BS なので，

$$\begin{aligned} AH &= PH - PA \\ &= SH - BS \\ &= BH \end{aligned}$$

$\therefore AH = \dfrac{1}{2}AB$

同様に，

$AI = \dfrac{1}{2}AD$

AB=AD であるから，

$AH = AI$

△ AHO と△ AIO において，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいことより，

$\triangle AHO \equiv \triangle AIO$

$\therefore \angle OAH = \angle OAI$

一方，OA=OB なので ($\because$ AH=BH，AB⊥OH)

$\angle OAH = \angle OBH$

同様にすることにより，∠OBH=∠OBC も示せるので，

$$\begin{aligned} \angle DAB &= 2\angle OAH \\ &= 2\angle OBH \\ &= \angle ABC \end{aligned}$$

ひし形の隣り合う角が等しいので，四角形 ABCD は**正方形**となる．

添削課題

【1】(1) 角の 2 等分線の性質より

$$\mathrm{BD} : \mathrm{CD} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{CD}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}} \quad \cdots ①$$

(2) 方べきの定理より

$$\mathrm{BF} \times \mathrm{BA} = \mathrm{BE} \times \mathrm{BD}$$

$$\therefore \mathbf{BF} = \frac{\mathbf{BE} \times \mathbf{BD}}{\mathbf{AB}} \quad \cdots ②$$

(3) (2) と同様にして

$$\mathrm{CG} \times \mathrm{CA} = \mathrm{CD} \times \mathrm{CE}$$

$$\mathrm{CG} = \frac{\mathrm{CD} \times \mathrm{CE}}{\mathrm{AC}} \quad \cdots ③$$

②，③ より

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{CG}} = \frac{\mathrm{BE} \times \mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} \times \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD} \times \mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{BD}}{\mathrm{AB} \times \mathrm{CD}} \ (\because \ \mathrm{BE} = \mathrm{CE})$$

$$= \left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\right) \times \left(\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}\right)$$

$$= 1 \ (\because \ ① より)$$

$$\therefore \mathrm{BF} = \mathrm{CG} \qquad (証明終)$$

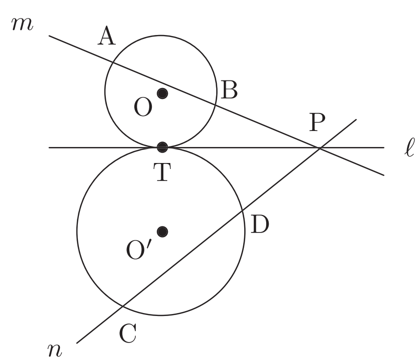
【2】方べきの定理より，

$$\mathrm{AP} \times \mathrm{BP} = \mathrm{PT}^2$$

$$\mathrm{CP} \times \mathrm{DP} = \mathrm{PT}^2$$

$$\therefore \mathrm{AP} \times \mathrm{BP} = \mathrm{CP} \times \mathrm{DP}$$

方べきの定理の逆より，A，B，C，D は同一円周上にある．　（証明終）



小テスト

【1】PB=PA= 6cm

また，QA=QC，RB=RC より，

$$\begin{aligned}(\triangle \text{PQR の周の長さ}) &= \text{PQ} + \text{PR} + \text{QR} \\ &= \text{PQ} + \text{PR} + (\text{QC} + \text{RC}) \\ &= \text{PQ} + \text{PR} + (\text{QA} + \text{RB}) \\ &= (\text{PQ} + \text{QA}) + (\text{PR} + \text{RB}) \\ &= \text{PA} + \text{PB} \\ &= 6 + 6 \\ &= 12\end{aligned}$$

よって，**12cm**

2MJSS/2MJS/2MJ
中２選抜東大・医学部数学
中２数学
中２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	