問題

【1】 $\begin{cases} C_1: x^2+y^2=1 & \cdots\cdots① \\ C_2: (x-3a)^2+(y-4a)^2=25a^2-4 & \cdots\cdots② \end{cases}$

とおく．

（1）C_2 が 2 点以上の図形を表すための条件は

$$25a^2-4>0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a<-\frac{2}{5}} \text{ または } \boldsymbol{\frac{2}{5}<a} \quad \text{（答）}$$

次に，C_1 と C_2 の共有点が 2 個であるための条件は，①かつ②をみたす x，y が 2 個存在するための条件に他ならない．ここで，① − ② より

$$6ax+8ay=5 \quad \cdots\cdots③$$

で

①かつ② $\Longleftrightarrow$ ①かつ③

なので，①かつ③をみたす x，y が 2 個存在するための条件，すなわち C_1 と直線③が共有点を 2 個もつための条件を求めればよい．よって，C_1 の中心 $(0,\ 0)$ と直線③の距離について

$$\frac{|-5|}{\sqrt{(6a)^2+(8a)^2}}=\frac{1}{|2a|}<1$$

となるので

$$|a|>\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a<-\frac{1}{2}} \text{ または } \boldsymbol{\frac{1}{2}<a} \quad \text{（答）}$$

このもとで，C_1 と C_2 の共有点を通る円または直線の方程式は

$$(x^2-6ax+y^2-8ay+4)+k(x^2+y^2-1)=0 \quad \cdots\cdots④$$

または $x^2+y^2=1$

と書けるので，④において $k=-1$ とおくと，2 つの共有点を通る直線の方程式は

$$\boldsymbol{6ax+8ay-5=0} \quad \text{（答）}$$

（2）円 C_1 の中心 $(0,\ 0)$ は直線 $3x+4y-5=0$ 上にないので，④の場合のみを考えればよい．そこで，$k \neq -1$ のとき，④を変形すると

$$x^2-\frac{6a}{1+k}x+y^2-\frac{8a}{1+k}y=\frac{k-4}{1+k} \quad \cdots\cdots④'$$

より，この円の中心の座標は $\left(\dfrac{3a}{1+k},\ \dfrac{4a}{1+k}\right)$ である．よって，これが $3x+4y-5=0$ 上にあるとき

$$3\cdot\frac{3a}{1+k}+4\cdot\frac{4a}{1+k}-5=0 \qquad \therefore \quad \frac{a}{1+k}=\frac{1}{5}$$

となるので，中心の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)}$ （答）

また，$k=5a-1$ を ④′ に代入すると

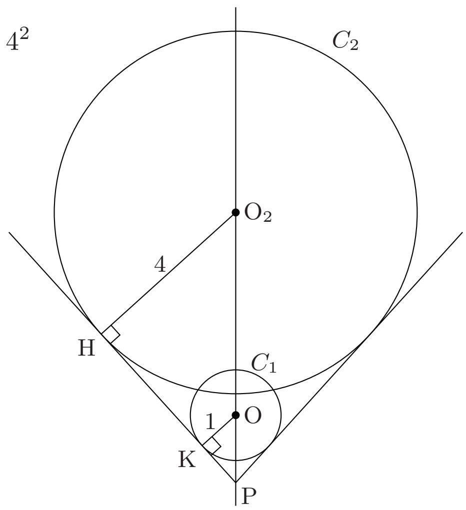
$$x^2-\frac{6}{5}x+y^2-\frac{8}{5}y=1-\frac{1}{a} \Longleftrightarrow \left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=2-\frac{1}{a}$$

となるので，半径は $\sqrt{\boldsymbol{2-\frac{1}{a}}}$ （答）

（3）$a=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のとき，C_2 の方程式は

$$\left(x-\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(y-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=4^2$$

である．そこで，2 円の共通接線の交点を P とし，C_2 の中心を $\mathrm{O_2}$，接点を図のように H，K とおくと，$\triangle\mathrm{PKO}$ と $\triangle\mathrm{PHO_2}$ は相似で，相似比は 2 円の半径の比 $1:4$ である．そして，P は直線 $\mathrm{O_2O}$ 上にあるので



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OO_2}}\\&=-\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\sqrt{5}},\ \frac{8}{\sqrt{5}}\right)\\&=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ -\frac{8\sqrt{5}}{15}\right)\end{aligned}$$

よって，P の座標は $\boldsymbol{\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ -\frac{8\sqrt{5}}{15}\right)}$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）7 点　　（2）8 点　　（3）10 点

（1）□$_1$ C_2 が 2 点以上からなる図形を表すための a の条件を求めて ……… 2 点

□$_2$ C_1，C_2 の共有点の個数が 2 個であるための a の条件を求めて ……… 2 点

□$_3$ C_1，C_2 の共有点を通る直線の方程式を求めて ……… 3 点

（2）□$_1$ 中心の座標を求めて ……… 4 点

□$_2$ 半径を求めて ……… 4 点

（3）□$_1$ $a=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のときの C_2 の方程式を求めて ……… 2 点

□$_2$ 答に ……… 8 点

【2】(1) 条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{3}{8}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{3}{8}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\quad\text{(答)}$$

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1$ かつ $\left|\overrightarrow{\mathrm{KA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{KB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{KC}}\right|$ である.

$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}+\overrightarrow{\mathrm{KA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KA}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{KA}}\right|^2\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}+\overrightarrow{\mathrm{KB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{KB}}\right|^2\end{cases}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KA}}=\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KB}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{KB}}-\overrightarrow{\mathrm{KA}})=\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

ここで, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\fallingdotseq 0$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\fallingdotseq 0$ であり, O と K が異なる点であるから, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}\right|\fallingdotseq 0$ である.

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ は, 三角形 ABC で定まる平面と直交している. (証終)

(3) (1), (2) より

$$\left(\frac{2}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$$
$$\left(\frac{2}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を用いて展開すると

$$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{8}-\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$
$$\frac{2}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{3}{8}-\frac{2}{8}-\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$

したがって

$$\begin{cases}3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-1\\ 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-1\end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0}\quad\text{(答)}$$

(4) L は, 三角形 ABC の外接円上にあり, AL は中心 K を通るので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=2\overrightarrow{\mathrm{AK}}$$

である. よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OK}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\quad\text{(答)}$$

(5)　$$\cos\angle\mathrm{AOL}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OL}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OL}}\right|}$$

(4) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=-\frac{1}{2}$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OL}}\right|=1$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{AOL}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　(2) 5 点　(3) 6 点　(4) 4 点　(5) 5 点

(1) $\square_1$ 答に …… 5 点

(2) $\square_1$ $\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ のうち 2 つを示して …… 2（各 1）点

$\square_2$ 答に …… 3 点

(3) $\square_1$ 答に …… 6（各 3）点

(4) $\square_1$ $\overrightarrow{\mathrm{AL}}=2\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ がわかって …… 1 点

$\square_2$ 答に …… 3 点

(5) $\square_1$ 答に …… 5 点

【3】(1)

$$\begin{aligned}&Ax(x+1)(x+2)+Bx(x+1)+Cx\\&=A(x^3+3x^2+2x)+B(x^2+x)+Cx\\&=Ax^3+(3A+B)x^2+(2A+B+C)x\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases}A=a & \cdots\cdots ①\\ 3A+B=a+b & \cdots\cdots ②\\ 2A+B+C=b & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

①，②より

$$B=a+b-3a=b-2a$$

これと①，③より

$$C=b-2a-(b-2a)=0$$

以上まとめて

$\boldsymbol{A=a,\ B=b-2a,\ C=0}$ （答）

(2) (1) の結果より

$$f(x)=ax(x+1)(x+2)+(b-2a)x(x+1)$$

と表すことができる．よって

$$f(1)=6a+2(b-2a),\ f(-2)=2(b-2a)$$

いま, 条件 (ア) が成り立つならば, $f(1)$, $f(-2)$ がともに整数だから, $6a+2(b-2a)$, $2(b-2a)$ はともに整数である．よって,

$$6a=（整数）$$

そして，(イ) より $0<6a<3$ だから

$$6a=1,\ 2 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}$$

(i) $a=\frac{1}{6}$ のとき

$$2(b-2a)=2b-\frac{2}{3}=（整数）$$

そして，(イ) より

$$\frac{1}{3}<2b-\frac{2}{3}<\frac{4}{3} \qquad \therefore \quad 2b-\frac{2}{3}=1$$

よって，$b=\frac{5}{6}$ となることが必要である．逆に，このとき

$$f(x)=\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)+\frac{1}{2}x(x+1)$$

そして，整数 n に対して $n(n+1)(n+2)$ は連続する 3 整数の積だから，これは 6 の倍数である．また，$n(n+1)$ は連続する 2 整数の積だから，これは偶数である．したがって，すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数である．

(ii) $a=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$2(b-2a)=2b-\frac{4}{3}=\text{（整数）}$$

そして，(イ) より

$$-\frac{1}{3}<2b-\frac{4}{3}<\frac{2}{3} \qquad \therefore \quad 2b-\frac{4}{3}=0$$

よって，$b=\dfrac{2}{3}$ となることが必要である．逆に，このとき

$$f(x)=\frac{1}{3}x(x+1)(x+2)$$

であるから，この場合もすべての整数 n に対して $f(n)$ は整数である．

したがって，求める a，b の値は

$$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)} \quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 15 点

(1) $\square_1$ 答に …………………………………………………… 10 点

(2) $\square_1$ $6a$ が整数であることを示して ……………………………… 5 点

$\square_2$ 答に ………………………………………………… 10（各 5）点

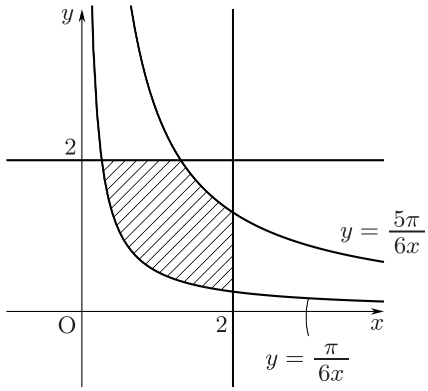
【4】(1) $0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 2$ より

$$0 \leqq xy \leqq 4 < \frac{13}{6}\pi$$

であるから

$$\frac{1}{2} \leqq \sin(xy) \Longrightarrow \frac{\pi}{6} \leqq xy \leqq \frac{5\pi}{6}$$

よって，領域 D を図示すると，**右図の斜線部のようになる．ただし，境界をすべて含む．（答）**



(2) まず，$x + y = k$ とおき，この直線が領域 D と共有点をもつような k の値の範囲を求める．

$y = \dfrac{\pi}{6x}$ のグラフは $x > 0$ の範囲ではつねに下に凸で，かつ直線 $y = x$ に関して対称である．

ゆえに，直線 $x + y = k$ が曲線 $y = \dfrac{\pi}{6x}$ と接するとき，接点は直線 $y = x$ 上にあるので，接点の座標は

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}},\ \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) \text{すなわち} \left(\frac{\sqrt{6\pi}}{6},\ \frac{\sqrt{6\pi}}{6}\right)$$

となり，このとき $k = \dfrac{\sqrt{6\pi}}{3}$ である．

また，$y = \dfrac{5\pi}{6x}$ のグラフも $x > 0$ の範囲でつねに下に凸であり，この曲線と直線 $y = 2$ との交点 $\left(\dfrac{5\pi}{12},\ 2\right)$ を直線 $x + y = k$ が通るとき，$k = \dfrac{5\pi}{12} + 2$ であり，このとき曲線 $y = \dfrac{5\pi}{6x}$ と直線 $x = 2$ との交点も通る．したがって，点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x + y$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{6\pi}}{3} \leqq x + y \leqq \frac{5\pi}{12} + 2$$

である．ここで，$3.1 < \pi < 3.2$ より

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6\pi}}{3}\right)^2 = \frac{\pi(3\pi - 8)}{12} > 0$$

$$\frac{5\pi}{12} + 2 - \pi = \frac{24 - 7\pi}{12} > 0$$

$$\frac{3\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{12} + 2\right) = \frac{13\pi - 24}{12} > 0$$

であるから

$$\frac{\sqrt{6\pi}}{3} < \frac{\pi}{2} < \pi < \frac{5\pi}{12} + 2 < \frac{3\pi}{2}$$

が成り立つ．ゆえに，$\sin(x + y)$ は $x + y = \dfrac{\pi}{2}$ のときに最大，$\dfrac{5\pi}{12} + 2$ のときに最小になり

最大値 1，最小値 $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12} + 2\right)$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）10 点　　（2）15 点

（1）$\square_1$ $0 \leqq xy \leqq 4$ がわかって……3 点

$\square_2$ $\dfrac{\pi}{6} \leqq xy \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ がわかって……3 点

$\square_3$ 答に……4 点

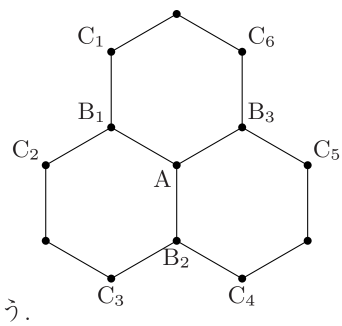
（2）$\square_1$ $x+y$ の最小値が $\dfrac{\sqrt{6\pi}}{3}$ とわかって……4 点

$\square_2$ $x+y$ の最大値が $\dfrac{5\pi}{12}+2$ とわかって……4 点

$\square_3$ 答に……7 点

問題

【1】(1) 右図のように各点を定める．すると，2 回の移動で P が A に戻るとき，1 回の移動では P は点 B_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ にあり，このどの点からも確率 $\dfrac{1}{3}$ で A に戻る．よって，求める確率は



$$\boldsymbol{\frac{1}{3}} \quad (答)$$

である．

(2) 2 回の移動で P がどの点にあるかで，場合分けを行う．

(i) 2 回の移動で P が A にあるとき，(1) の事象を 2 度繰り返すことになるから，4 回の移動で A に戻る確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

(ii) 2 回の移動で P が A にないとき，その確率は

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

このとき，P は点 C_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ にあり，このどの点からも，2 回の移動で A に戻る確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

なので，4 回の移動で A に戻る確率は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{2}{9}} \quad (答)$$

(3) 4 回の移動で P がどの点にあるかで，場合分けを行う．

(i) 4 回の移動で P が A にあるとき，その確率は (2) より $\dfrac{2}{9}$ であり，残り 2 回で (1) の事象が起こることになるから，6 回の移動で A に戻る確率は

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

(ii) 4 回の移動で P が A にないとき，その確率は

$$1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

このとき，P は C_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ にあるから，残り 2 回の移動で A に戻る確率は (2)(ii) と同様に $\dfrac{1}{6}$ である．よって，6 回の移動で A に戻る確率は

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{54}$$

以上より，求める確率は

$$\frac{2}{27}+\frac{7}{54}=\mathbf{\frac{11}{54}}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）5 点　　（2）10 点　　（3）10 点

（1）$\square_1$ 答に ……………………………………………………… 5 点

（2）$\square_1$ 2 回の移動後に P が A にある場合を求めて ……………… 4 点

$\square_2$ 2 回の移動後に P が A にない場合を求めて ……………… 4 点

$\square_3$ 答に ……………………………………………………… 2 点

（3）$\square_1$ 4 回の移動後に P が A にある場合を求めて ……………… 4 点

$\square_2$ 4 回の移動後に P が A にない場合を求めて ……………… 4 点

$\square_3$ 答に ……………………………………………………… 2 点

【2】題意の長方形の周および内部は，以下の集合で表される．

$$\{(s,\ t)\,|\ 0 \leqq s \leqq 1,\ -1 \leqq t \leqq 2\}$$

このとき，$x = s + t,\ y = st$ より，$s,\ t$ は u の 2 次方程式

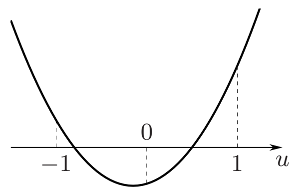
$$u^2 - xu + y = 0$$

の 2 解である．よって，左辺を $f(u)$ とおけば，$x,\ y$ のみたすべき条件は

2 次方程式 $f(u) = 0$ が $0 \leqq u \leqq 1,\ -1 \leqq u \leqq 2$ の範囲にそれぞれ解をもつこと

である．そこで，以下のように場合分けを行う．

(i) $f(u) = 0$ が $-1 \leqq u \leqq 0$ の範囲に 1 つ，$0 \leqq u \leqq 1$ の範囲に 1 つ解をもつとき

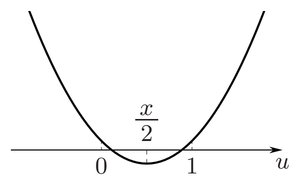


$$\begin{cases} f(-1) = 1 + x + y \geqq 0 \\ f(0) = y \leqq 0 \\ f(1) = 1 - x + y \geqq 0 \end{cases}$$

よって

$$y \geqq -x - 1,\ y \geqq x - 1,\ y \leqq 0$$

(ii) $f(u) = 0$ が $0 \leqq u \leqq 1$ の範囲に 2 解 (重解を含む) をもつとき



$$f(u) = \left(u - \frac{x}{2}\right)^2 + y - \frac{x^2}{4}$$

と変形できるので

$$0 \leqq \frac{x}{2} \leqq 1,\ y - \frac{x^2}{4} \leqq 0$$

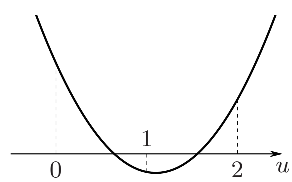
かつ

$$f(0) = y \geqq 0,\ f(1) = 1 - x + y \geqq 0$$

以上から

$$0 \leqq x \leqq 2,\ y \leqq \frac{1}{4}x^2,\ y \geqq 0,\ y \geqq x - 1$$

(iii) $f(u) = 0$ が $0 \leqq u \leqq 1$ の範囲に 1 つ，$1 \leqq u \leqq 2$ の範囲に 1 つ解をもつとき

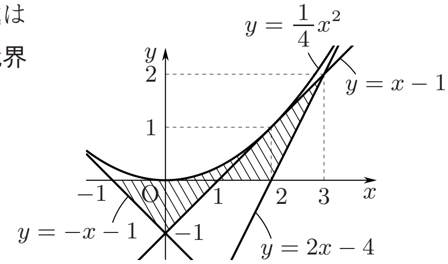


$$\begin{cases} f(0) = y \geqq 0 \\ f(1) = 1 - x + y \leqq 0 \\ f(2) = 4 - 2x + y \geqq 0 \end{cases}$$

よって

$$y \geqq 0,\ y \leqq x - 1,\ y \geqq 2x - 4$$

以上より，求める点 $(x,\ y)$ の存在領域は右図の斜線部分のようになる．ただし，境界を含む．（答）



ここで

$$\frac{1}{4}x^2-(x-1)=\frac{1}{4}(x-2)^2$$

であるから，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ と直線 $y=x-1$ は点 $(2,\ 1)$ で接する．また

$$2x-4=x-1 \Longleftrightarrow x=3$$

であるから，2 直線 $y=2x-4$，$y=x-1$ は点 $(3,\ 2)$ で交わる．

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ 2 次方程式 $u^2-xu+y=0$ の解の条件に読み替えて……5 点

$\square_2$ $-1 \leqq u \leqq 0$ と $0 \leqq u \leqq 1$ で 1 つずつ解をもつ場合の x，y の条件を求めて……4 点

$\square_3$ $0 \leqq u \leqq 1$ で 2 つの解をもつ場合の x，y の条件を求めて……4 点

$\square_4$ $0 \leqq u \leqq 1$ と $1 \leqq u \leqq 2$ で 1 つずつ解をもつ場合の x，y の条件を求めて……4 点

$\square_5$ 図示して……8 点

【3】(1) $f(x)=(x^2-1)e^x$ より

$$f'(x)=2xe^x+(x^2-1)e^x=(x^2+2x-1)e^x$$
$$=\{x-(-1-\sqrt{2})\}\{x-(-1+\sqrt{2})\}e^x$$

よって，$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

これより

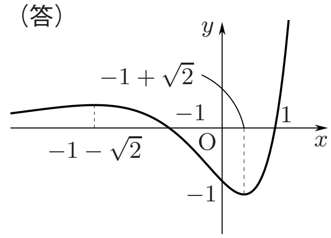
極大値 $f(-1-\sqrt{2})=\boldsymbol{(2+2\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}}$ (答)

極小値 $f(-1+\sqrt{2})=\boldsymbol{(2-2\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}}$ (答)

そして

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

なので，C の概形は右図のようになる． (答)



(2) $$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x-1)e^x=(x^2+4x+1)e^x$$
$$=\{x-(-2-\sqrt{3})\}\{x-(-2+\sqrt{3})\}e^x$$

なので，$\alpha=-2-\sqrt{3}$，$\beta=-2+\sqrt{3}$ とおくと，$f(x)$ のグラフの凹凸は下表のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

よって，$\mathrm{A}(\beta,\ f(\beta))$ であり，題意の接線の方程式は

$$y-f(\beta)=f'(\beta)(x-\beta)\iff y=f'(\beta)x+f(\beta)-\beta f'(\beta)$$

となる．そこで，$g(x)=f(x)-\{f'(\beta)x+f(\beta)-\beta f'(\beta)\}$ とおくと

$$g'(x)=f'(x)-f'(\beta)$$
$$g''(x)=f''(x)=(x-\alpha)(x-\beta)e^x$$

なので，$g'(x)$ の増減を考えると，これは下表のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで

$$g'(\beta)=f'(\beta)-f'(\beta)=0$$

であり，さらに

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+2x-1)e^x=0$$
$$f'(\beta)=(\beta^2+2\beta-1)e^\beta=-2(-1+\sqrt{3})e^{-2+\sqrt{3}}<0$$

より

$$\lim_{x\to-\infty} g'(x) > 0$$

である．したがって

$g'(x) \geqq 0$（等号は $x=\beta$ のときのみ成立）

そして

$$g(\beta) = f(\beta) - \{\beta f'(\beta) + f(\beta) - \beta f'(\beta)\} = 0$$

となるので, $g(x)=0$ をみたす x は $x=\beta$ ただ 1 つである．すなわち，題意の接線と C は点 A のみを共有する．（証終）

■ 研究

一般に，任意の自然数 n に対して,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

が成り立つ．$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$ は，この事実を用いている．

【配点の目安】

配点：25 点

（1）10 点　　（2）15 点

（1）$\square_1$ 極大値・極小値をそれぞれ求めて……………………4（各 2) 点

$\square_2$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ をそれぞれ調べて……………………2 点

$\square_3$ 図示して……………………4 点

（2）$\square_1$ $f(x)$ の凹凸を調べて……………………5 点

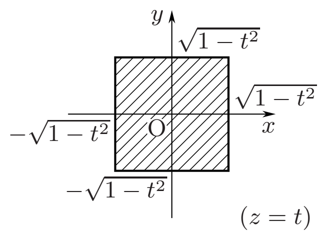
$\square_2$ $g(x) = f(x) -$ (接線の方程式) について $g'(x)$ の増減を調べて……………………5 点

$\square_3$ $g(x)=0$ の解が接点の x 座標のみであることを示して……………………5 点

【4】

$$C_1 : y^2+z^2 \leqq 1,\ C_2 : z^2+x^2 \leqq 1$$

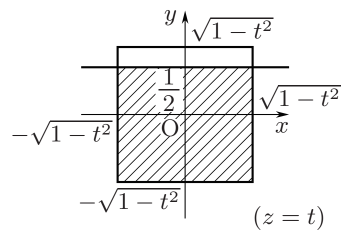
より, C_1 と C_2 の共通部分の平面 $z=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ における切断面を考える.



$$\begin{cases} y^2 \leqq 1-t^2 \\ x^2 \leqq 1-t^2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-t^2} \\ -\sqrt{1-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

このうち, $y \leqq \dfrac{1}{2}$ である部分が K であるから, K の平面 $z=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ における切断面は次のように場合分けされる.



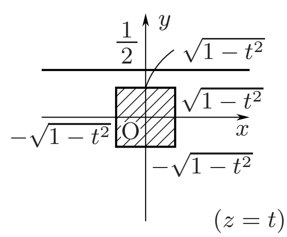
(i) $\dfrac{1}{2} \leqq \sqrt{1-t^2}$, すなわち, $|t| \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

断面は長方形でその面積は

$$2\sqrt{1-t^2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-t^2}\right)$$

である.

(ii) $\sqrt{1-t^2} \leqq \dfrac{1}{2}$, すなわち, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |t| \leqq 1$ のとき



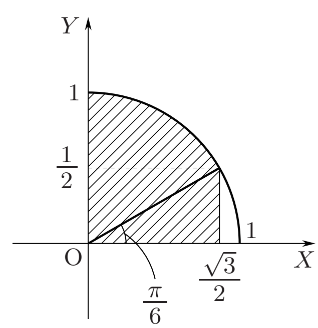
断面は正方形でその面積は

$$\left(2\sqrt{1-t^2}\right)^2$$

である.

したがって, K の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{2} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2\sqrt{1-t^2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-t^2}\right)dt + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(2\sqrt{1-t^2}\right)^2 dt \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt + 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1-t^2)\,dt + 4\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (1-t^2)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt + 2\int_0^1 (1-t^2)\,dt + 2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (1-t^2)\,dt \\
&= \left(\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&\qquad + 2\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \\
&= \frac{\pi}{6}+\frac{8}{3}-\frac{5}{8}\sqrt{3}
\end{aligned}$$



$$\therefore \quad \boldsymbol{V = \frac{\pi}{3}+\frac{16}{3}-\frac{5}{4}\sqrt{3}} \quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ C_1 と C_2 の共通部分の,
平面 $z=t$ における切断面の概形がわかって……5 点

□$_2$ $|t| \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のときの,
平面 $z=t$ における切断面の面積がわかって……5 点

□$_3$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |t| \leqq 1$ のときの,
平面 $z=t$ における切断面の面積がわかって……5 点

□$_4$ 体積を求める式を立式して……3 点

□$_5$ 答に……7 点

問題

【1】(1) まず，$a_n > 2$ を数学的帰納法で証明する．

(Ⅰ) $a_1 = 3$ だから，$n = 1$ のときは成立する．

(Ⅱ) $n = k\ (\geqq 1)$ のときの成立，すなわち $a_k > 2$ を仮定する．このとき，与えられた漸化式より

$$a_{k+1} - 2 = \frac{a_k}{2} + \frac{2}{a_k} - 2 = \frac{{a_k}^2 + 4 - 4a_k}{2a_k} = \frac{(a_k - 2)^2}{2a_k}$$

そして，$a_k > 2$ だから

$$(a_k - 2)^2 > 0,\ 2a_k > 0 \qquad \therefore \quad a_{k+1} - 2 > 0$$

となり，$n = k + 1$ のときも成立する．

以上 (Ⅰ)，(Ⅱ) より，$a_n > 2$ が成り立つので，$a_{n+1} > 2$ でもある．そして

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} - a_n = \frac{2}{a_n} - \frac{a_n}{2} = \frac{4 - {a_n}^2}{2a_n}$$

であり，$a_n > 2$ だから

$${a_n}^2 > 4,\ 2a_n > 0 \qquad \therefore \quad a_{n+1} - a_n < 0$$

以上より，$2 < a_{n+1} < a_n$ が成り立つ．（証終）

(2) (1)(Ⅱ) の考察より

$$a_{n+1} - 2 = \frac{(a_n - 2)^2}{2a_n} \quad \cdots\cdots ①$$

そして，$a_n > 2$ なので

$$0 < \frac{1}{2a_n} < \frac{1}{4},\ (a_n - 2)^2 > 0 \qquad \therefore \quad a_{n+1} - 2 < \frac{(a_n - 2)^2}{4}$$

（証終）

(3) (2) の結果から

$$a_4 - 2 < \frac{1}{4}(a_3 - 2)^2 < \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}(a_2 - 2)^2\right\}^2 = \frac{1}{4^3}(a_2 - 2)^4$$

ここで，①および $a_1 = 3$ より

$$a_2 - 2 = \frac{(a_1 - 2)^2}{2a_1} = \frac{1}{6} \qquad \therefore \quad a_4 - 2 < \frac{1}{4^3 \cdot 6^4}$$

そして

$$4^3 \cdot 6^4 = 64 \cdot 1296 = 82944 > 80000 \qquad \therefore \quad a_4 - 2 < \frac{1}{80000}$$

（証終）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 8 点　　(3) 7 点

(1) $\square_1$ $a_n > 2$ を数学的帰納法を用いて示して $\cdots\cdots$ 5 点

$\square_2$ $a_{n+1} < a_n$ を数学的帰納法を用いて示して $\cdots\cdots$ 5 点

(2) $\square_1$ 題意を示して ……………………………………………………… 8 点

(3) $\square_1$ 題意を示して ……………………………………………………… 7 点

【2】真数条件より $x \neq k$ である．このもとで, 与えられた方程式を変形すると, $e^x = (x-k)^2$ より

$$x - k = \pm e^{\frac{x}{2}} \iff k = x \mp e^{\frac{x}{2}}\ (x \neq k \text{ をみたす})$$

したがって，$f(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$，$g(x) = x - e^{\frac{x}{2}}$ とおくとき，求める解の個数は，方程式

$$k = f(x) \text{ または } k = g(x)$$

の異なる実数解の個数に他ならない．すると，まず

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \qquad \therefore \quad f'(x) > 0$$

よって，$f(x)$ は実数全体で単調増加し

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

また

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}(e^{\log 2} - e^{\frac{x}{2}})$$

であるから，$g(x)$ の増減は下表のようになる．

x	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

そして，極大値は

$$g(2\log 2) = 2\log 2 - e^{\log 2} = 2(\log 2 - 1)$$

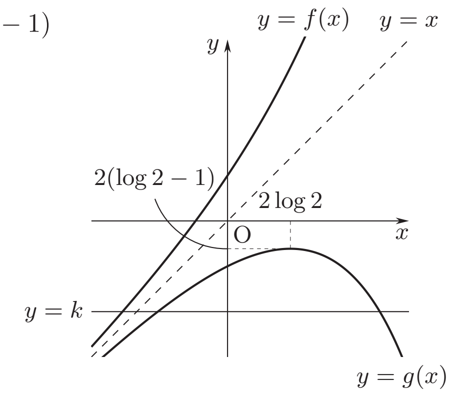
であり

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

また，$g(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{e^{\frac{x}{2}}} - 1\right)$ と変形できて，$e^{\frac{x}{2}} = t$ とおくことにより

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2\log t}{t} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$



以上より，$y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフは右上図のようになる．これと直線 $y = k$ のグラフの共有点を考えることにより，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{k < 2(\log 2 - 1)} \text{ のとき} \quad \textbf{3} \text{ 個} \\ \boldsymbol{k = 2(\log 2 - 1)} \text{ のとき} \quad \textbf{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{k > 2(\log 2 - 1)} \text{ のとき} \quad \textbf{1} \text{ 個} \end{cases} \quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ 与式を定数分離して …………………………………………………… 5 点

$\square_2$ $1+\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ の増減を調べて …………………………………………… 5 点

$\square_3$ $1-\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ の増減を調べて …………………………………………… 5 点

$\square_4$ $y=x+e^{\frac{x}{2}}$，$y=x-e^{\frac{x}{2}}$ を図示して …………………………………… 5 点

$\square_5$ 答に ………………………………………………………………… 5 点

【3】(1) 区間 $[\pi n,\ \pi(n+1)]$ において

$$\frac{1}{\pi^2(n+1)^2} \leqq \frac{1}{x^2} \leqq \frac{1}{\pi^2 n^2}$$

さらに，$1-\cos x \geqq 0$ より

$$\frac{1-\cos x}{\pi^2(n+1)^2} \leqq \frac{1-\cos x}{x^2} \leqq \frac{1-\cos x}{\pi^2 n^2}$$

が成り立つから，πn から $\pi(n+1)$ まで積分して

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{1-\cos x}{\pi^2(n+1)^2}\,dx \leqq S_n \leqq \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{1-\cos x}{\pi^2 n^2}\,dx$$

ここで

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} (1-\cos x)\,dx = \Big[x-\sin x\Big]_{\pi n}^{\pi(n+1)} = \pi(n+1)-\pi n = \pi$$

であるから

$$\frac{\pi}{\pi^2(n+1)^2} \leqq S_n \leqq \frac{\pi}{\pi^2 n^2} \qquad \therefore \quad \frac{1}{\pi(n+1)^2} \leqq S_n \leqq \frac{1}{\pi n^2}$$

が成り立つ．（証終）

(2) (1) より

$$\pi n^2 \leqq \frac{1}{S_n} \leqq \pi(n+1)^2$$

n を 1, 2, 3, $\cdots$, n として和をとると

$$\pi\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} \leqq \pi\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$$

より

$$\frac{\pi}{6}n(n+1)(2n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} \leqq \frac{\pi}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)-\pi$$

$$\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \leqq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} \leqq \frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)-\frac{\pi}{n^3}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{3},\ \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)-\frac{\pi}{n^3}\right\}=\frac{\pi}{3}$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}} \quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 15 点

(1) $\square_1$ $\pi n \leqq x \leqq \pi(n+1)$ において，

$\dfrac{1-\cos x}{\pi^2(n+1)^2} \leqq \dfrac{1-\cos x}{x^2} \leqq \dfrac{1-\cos x}{\pi^2 n^2}$ であることを述べて……………5 点

$\square_2$ 題意を示して……………………………………………………………5 点

（2）$\square_1$ $\dfrac{\pi}{6}n(n+1)(2n+1) \leqq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{S_k} \leqq \dfrac{\pi}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)-\pi$

を示して……………………………………………………………………8 点

$\square_2$ はさみうちの原理より答を求めて……………………………………7 点

【4】(1) B を $(0,\ b)$ とする．ただし明らかに $b > 0$ である．

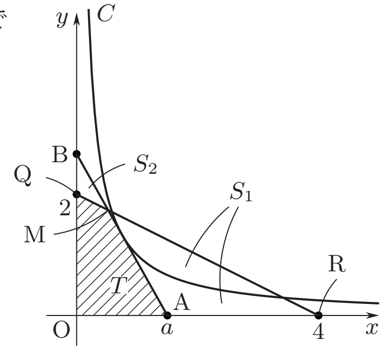
直線 AB : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ と C が接するとき

$$\frac{x}{a} + \frac{1}{bx} = 1$$

$$\therefore \quad bx^2 - abx + a = 0$$

が重解をもつときで，判別式が 0 より

$$a^2b^2 - 4ab = 0 \qquad \therefore \quad ab = 4$$



となる．

さらに，RQ と L_a が第 1 象限で交わるとき，$b > 2$ であるから，求める条件は

$$\frac{4}{a} > 2 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{0 < a < 2} \quad （答）$$

(2) $\triangle\mathrm{ORQ} = T + S_1$，$\triangle\mathrm{OAB} = T + S_2$ となるから

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = T + S_1,\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{4}{a} = T + S_2$$

$$\therefore \quad S_1 = 4 - T,\ S_2 = 2 - T$$

よって

$$r = 6 - 2T,\ m = (4 - T)(2 - T)$$

$T = \dfrac{6 - r}{2}$ を m の式に代入して

$$m = \frac{r + 2}{2} \cdot \frac{r - 2}{2} = \frac{r^2}{4} - 1$$

一方

$$T = \triangle\mathrm{OQM} + \triangle\mathrm{OAM} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot y_0$$

であり，AB : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{4}y = 1$，RQ : $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 1$ を連立させると

$$x_0 = \frac{8a - 4a^2}{8 - a^2},\ y_0 = \frac{16 - 4a}{8 - a^2}$$

を得るから

$$T = \frac{8a - 4a^2}{8 - a^2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{16 - 4a}{8 - a^2} = \frac{16a - 6a^2}{8 - a^2}$$

これより

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{da} &= \frac{(8 - a^2)(16 - 12a) + 2a(16a - 6a^2)}{(8 - a^2)^2} \\
&= \frac{8 \cdot 16 - 96a + 16a^2}{(8 - a^2)^2} \\
&= \frac{16(a - 2)(a - 4)}{(8 - a^2)^2} > 0\ (\because 0 < a < 2)
\end{aligned}$$

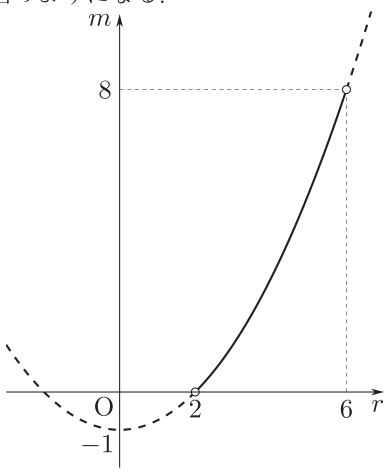
であり，さらに，$\lim_{a \to 0} T = 0$，$\lim_{a \to 2} T = 2$ より

$$0 < T < 2$$

よって，$r = 6 - 2T$ より，$2 < r < 6$ となるので，点 $(r,\ m)$ が描く曲線は

$$m = \frac{r^2}{4} - 1 \ (2 < r < 6)$$

となり，図示すると下図のようになる．



■ **注意**

$T + S_2 = 2$，$S_2 > 0$ より，$T < 2$ であり，B $\to$ Q のとき $S_2 \to 0$，$T \to 2$，A $\to$ O のとき $T \to 0$ となる．

よって，T は $0 < T < 2$ のすべてを取りうる．

このようにすれば，微分は不要である．

【配点の目安】

配点：25 点

（1）10 点　　（2）15 点

（1）答に ………………………………………… 10 点

（2）$\square_1$ $r = 6 - 2T$，$m = (4 - T)(2 - T)$ を得て ………… 3 点

$\square_2$ $m = \dfrac{r^2}{4} - 1$ がわかって ………………………… 3 点

$\square_3$ $0 < T < 2$ がわかって ………………………… 4 点

$\square_4$ 答に ………………………………………… 5 点