問題

【1】

$$\begin{cases} C_1 : x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ C_2 : (x-3a)^2+(y-4a)^2=25a^2-4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

とおく．

(1) C_2 が 2 点以上の図形を表すための条件は

$$25a^2-4>0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a<-\frac{2}{5}} \ \textbf{または}\ \boldsymbol{\frac{2}{5}<a} \quad \text{（答）}$$

次に，C_1 と C_2 の共有点が 2 個であるための条件は，①かつ②をみたす x，y が 2 個存在するための条件に他ならない．ここで，① − ② より

$$6ax+8ay=5 \quad \cdots\cdots ③$$

で

①かつ② $\Longleftrightarrow$ ①かつ③

なので，①かつ③をみたす x，y が 2 個存在するための条件，すなわち C_1 と直線③が共有点を 2 個もつための条件を求めればよい．よって，C_1 の中心 $(0,\ 0)$ と直線③の距離について

$$\frac{|-5|}{\sqrt{(6a)^2+(8a)^2}}=\frac{1}{|2a|}<1$$

となるので

$$|a|>\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a<-\frac{1}{2}} \ \textbf{または}\ \boldsymbol{\frac{1}{2}<a} \quad \text{（答）}$$

このもとで，C_1 と C_2 の共有点を通る円または直線の方程式は

$$(x^2-6ax+y^2-8ay+4)+k(x^2+y^2-1)=0 \quad \cdots\cdots ④$$
または $x^2+y^2=1$

と書けるので，④において $k=-1$ とおくと，2 つの共有点を通る直線の方程式は

$$\boldsymbol{6ax+8ay-5=0} \quad \text{（答）}$$

(2) 円 C_1 の中心 $(0,\ 0)$ は直線 $3x+4y-5=0$ 上にないので，④の場合のみを考えればよい．そこで，$k \neq -1$ のとき，④を変形すると

$$x^2-\frac{6a}{1+k}x+y^2-\frac{8a}{1+k}y=\frac{k-4}{1+k} \quad \cdots\cdots ④'$$

より，この円の中心の座標は $\left(\dfrac{3a}{1+k},\ \dfrac{4a}{1+k}\right)$ である．よって，これが $3x+4y-5=0$ 上にあるとき

$$3\cdot\frac{3a}{1+k}+4\cdot\frac{4a}{1+k}-5=0 \qquad \therefore \quad \frac{a}{1+k}=\frac{1}{5}$$

となるので，中心の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)}$ （答）

また，$k=5a-1$ を ④$'$ に代入すると

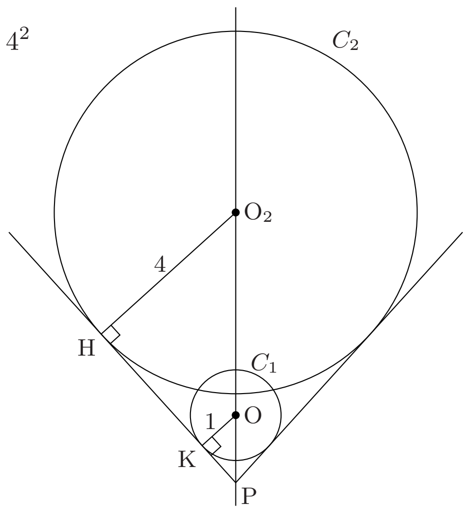
$$x^2-\frac{6}{5}x+y^2-\frac{8}{5}y=1-\frac{1}{a} \Longleftrightarrow \left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=2-\frac{1}{a}$$

となるので，半径は $\sqrt{\boldsymbol{2-\dfrac{1}{a}}}$ （答）

（3）$a=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のとき，C_2 の方程式は

$$\left(x-\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(y-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=4^2$$

である．そこで，2 円の共通接線の交点を P とし，C_2 の中心を $\mathrm{O_2}$，接点を図のように H，K とおくと，$\triangle\mathrm{PKO}$ と $\triangle\mathrm{PHO_2}$ は相似で，相似比は 2 円の半径の比 $1:4$ である．そして，P は直線 $\mathrm{O_2O}$ 上にあるので



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OO_2}}\\&=-\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\sqrt{5}},\ \frac{8}{\sqrt{5}}\right)\\&=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ -\frac{8\sqrt{5}}{15}\right)\end{aligned}$$

よって，P の座標は $\boldsymbol{\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{8\sqrt{5}}{15}\right)}$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

（1）7 点　　（2）8 点　　（3）10 点

（1）$\square_1$ C_2 が 2 点以上からなる図形を表すための a の条件を求めて ……… 2 点

$\square_2$ C_1，C_2 の共有点の個数が 2 個であるための a の条件を求めて ……… 2 点

$\square_3$ C_1，C_2 の共有点を通る直線の方程式を求めて ……… 3 点

（2）$\square_1$ 中心の座標を求めて ……… 4 点

$\square_2$ 半径を求めて ……… 4 点

（3）$\square_1$ $a=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のときの C_2 の方程式を求めて ……… 2 点

$\square_2$ 答に ……… 8 点

【2】(1) 条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{3}{8}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{3}{8}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}} \quad \text{(答)}$$

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1$ かつ $\left|\overrightarrow{\mathrm{KA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{KB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{KC}}\right|$ である.

$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}+\overrightarrow{\mathrm{KA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KA}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{KA}}\right|^2\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}+\overrightarrow{\mathrm{KB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{KB}}\right|^2\end{cases}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KA}}=\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KB}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{KB}}-\overrightarrow{\mathrm{KA}})=\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\fallingdotseq 0$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\fallingdotseq 0$ であり，O と K が異なる点であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}\right|\fallingdotseq 0$ である.

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ は，三角形 ABC で定まる平面と直交している. (証終)

(3) (1)，(2) より

$$\left(\frac{2}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$$

$$\left(\frac{2}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を用いて展開すると

$$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{8}-\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$\frac{2}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{3}{8}-\frac{2}{8}-\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$

したがって

$$\begin{cases}3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-1\\ 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-1\end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0} \quad \text{(答)}$$

(4) L は，三角形 ABC の外接円上にあり，AL は中心 K を通るので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=2\overrightarrow{\mathrm{AK}}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OK}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}} \quad \text{(答)}$$

(5) $$\cos\angle \mathrm{AOL} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OL}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OL}}\right|}$$

(4) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = -\frac{1}{2}$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OL}}\right| = 1$ であるから

$$\cos\angle \mathrm{AOL} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　(2) 5 点　(3) 6 点　(4) 4 点　(5) 5 点

(1) $\square_1$ 答に ……………………………… 5 点

(2) $\square_1$ $\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ のうち 2 つを示して ……………… 2（各 1）点

$\square_2$ 答に ……………………………… 3 点

(3) $\square_1$ 答に ……………………………… 6（各 3）点

(4) $\square_1$ $\overrightarrow{\mathrm{AL}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ がわかって ……………………………… 1 点

$\square_2$ 答に ……………………………… 3 点

(5) $\square_1$ 答に ……………………………… 5 点

【3】(1)

$$\begin{aligned}&Ax(x+1)(x+2)+Bx(x+1)+Cx\\=&A(x^3+3x^2+2x)+B(x^2+x)+Cx\\=&Ax^3+(3A+B)x^2+(2A+B+C)x\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases}A=a & \cdots\cdots ①\\ 3A+B=a+b & \cdots\cdots ②\\ 2A+B+C=b & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

①，②より

$$B=a+b-3a=b-2a$$

これと①，③より

$$C=b-2a-(b-2a)=0$$

以上まとめて

$$\boldsymbol{A=a,\ B=b-2a,\ C=0}$$ （答）

(2) (1) の結果より

$$f(x)=ax(x+1)(x+2)+(b-2a)x(x+1)$$

と表すことができる．よって

$$f(1)=6a+2(b-2a),\ f(-2)=2(b-2a)$$

いま, 条件 (ア) が成り立つならば, $f(1)$, $f(-2)$ がともに整数だから, $6a+2(b-2a)$, $2(b-2a)$ はともに整数である．よって,

$$6a=（整数）$$

そして，(イ) より $0<6a<3$ だから

$$6a=1,\ 2 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}$$

(i) $a=\dfrac{1}{6}$ のとき

$$2(b-2a)=2b-\frac{2}{3}=（整数）$$

そして，(イ) より

$$\frac{1}{3}<2b-\frac{2}{3}<\frac{4}{3} \qquad \therefore \quad 2b-\frac{2}{3}=1$$

よって，$b=\dfrac{5}{6}$ となることが必要である．逆に，このとき

$$f(x)=\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)+\frac{1}{2}x(x+1)$$

そして，整数 n に対して $n(n+1)(n+2)$ は連続する 3 整数の積だから，これは 6 の倍数である．また，$n(n+1)$ は連続する 2 整数の積だから，これは偶数である．したがって，すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数である．

(ii) $a = \dfrac{1}{3}$ のとき

$$2(b - 2a) = 2b - \frac{4}{3} = (\text{整数})$$

そして，(イ) より

$$-\frac{1}{3} < 2b - \frac{4}{3} < \frac{2}{3} \qquad \therefore \quad 2b - \frac{4}{3} = 0$$

よって，$b = \dfrac{2}{3}$ となることが必要である．逆に，このとき

$$f(x) = \frac{1}{3}x(x+1)(x+2)$$

であるから，この場合もすべての整数 n に対して $f(n)$ は整数である．

したがって，求める a，b の値は

$$\boldsymbol{(a,\ b) = \left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)} \quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 15 点

(1) $\square_1$ 答に ……………………………………………… 10 点

(2) $\square_1$ $6a$ が整数であることを示して …………………… 5 点

$\square_2$ 答に ……………………………………………… 10 (各 5) 点

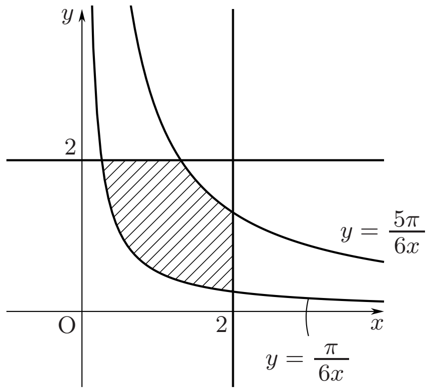
【4】(1) $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 2$ より

$$0 \leqq xy \leqq 4 < \frac{13}{6}\pi$$

であるから

$$\frac{1}{2} \leqq \sin(xy) \Longrightarrow \frac{\pi}{6} \leqq xy \leqq \frac{5\pi}{6}$$

よって，領域 D を図示すると，**右図の斜線部のようになる．ただし，境界をすべて含む．**（答）



(2) まず，$x + y = k$ とおき，この直線が領域 D と共有点をもつような k の値の範囲を求める．

$y = \frac{\pi}{6x}$ のグラフは $x > 0$ の範囲ではつねに下に凸で，かつ直線 $y = x$ に関して対称である．

ゆえに，直線 $x + y = k$ が曲線 $y = \frac{\pi}{6x}$ と接するとき，接点は直線 $y = x$ 上にあるので，接点の座標は

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}},\ \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) \text{すなわち} \left(\frac{\sqrt{6\pi}}{6},\ \frac{\sqrt{6\pi}}{6}\right)$$

となり，このとき $k = \frac{\sqrt{6\pi}}{3}$ である．

また，$y = \frac{5\pi}{6x}$ のグラフも $x > 0$ の範囲でつねに下に凸であり，この曲線と直線 $y = 2$ との交点 $\left(\frac{5\pi}{12},\ 2\right)$ を直線 $x + y = k$ が通るとき，$k = \frac{5\pi}{12} + 2$ であり，このとき曲線 $y = \frac{5\pi}{6x}$ と直線 $x = 2$ との交点も通る．したがって，点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x + y$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{6\pi}}{3} \leqq x + y \leqq \frac{5\pi}{12} + 2$$

である．ここで，$3.1 < \pi < 3.2$ より

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6\pi}}{3}\right)^2 = \frac{\pi(3\pi - 8)}{12} > 0$$

$$\frac{5\pi}{12} + 2 - \pi = \frac{24 - 7\pi}{12} > 0$$

$$\frac{3\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{12} + 2\right) = \frac{13\pi - 24}{12} > 0$$

であるから

$$\frac{\sqrt{6\pi}}{3} < \frac{\pi}{2} < \pi < \frac{5\pi}{12} + 2 < \frac{3\pi}{2}$$

が成り立つ．ゆえに，$\sin(x + y)$ は $x + y = \frac{\pi}{2}$ のときに最大，$\frac{5\pi}{12} + 2$ のときに最小になり

最大値 1，最小値 $\boldsymbol{\sin\left(\frac{5\pi}{12} + 2\right)}$（答）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 15 点

(1) $\square_1$ $0 \leqq xy \leqq 4$ がわかって…………3 点

$\square_2$ $\dfrac{\pi}{6} \leqq xy \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ がわかって…………3 点

$\square_3$ 答に…………4 点

(2) $\square_1$ $x+y$ の最小値が $\dfrac{\sqrt{6\pi}}{3}$ とわかって…………4 点

$\square_2$ $x+y$ の最大値が $\dfrac{5\pi}{12}+2$ とわかって…………4 点

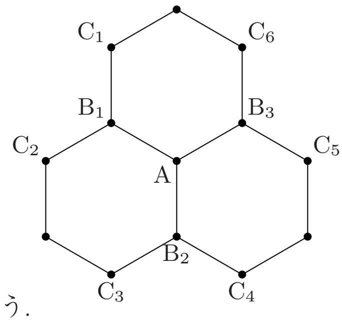
$\square_3$ 答に…………7 点

問題

【1】(1) 右図のように各点を定める．すると，2 回の移動で P が A に戻るとき，1 回の移動では P は点 B_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ にあり，このどの点からも確率 $\dfrac{1}{3}$ で A に戻る．よって，求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}}\quad\text{(答)}$$

である．



(2) 2 回の移動で P がどの点にあるかで，場合分けを行う．

(i) 2 回の移動で P が A にあるとき，(1) の事象を 2 度繰り返すことになるから，4 回の移動で A に戻る確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

(ii) 2 回の移動で P が A にないとき，その確率は

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

このとき，P は点 C_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ にあり，このどの点からも，2 回の移動で A に戻る確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

なので，4 回の移動で A に戻る確率は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}\quad\text{(答)}$$

(3) 4 回の移動で P がどの点にあるかで，場合分けを行う．

(i) 4 回の移動で P が A にあるとき，その確率は (2) より $\dfrac{2}{9}$ であり，残り 2 回で (1) の事象が起こることになるから，6 回の移動で A に戻る確率は

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

(ii) 4 回の移動で P が A にないとき，その確率は

$$1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

このとき，P は C_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ にあるから，残り 2 回の移動で A に戻る確率は (2)(ii) と同様に $\dfrac{1}{6}$ である．よって，6 回の移動で A に戻る確率は

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{54}$$

以上より，求める確率は

$$\frac{2}{27}+\frac{7}{54}=\mathbf{\frac{11}{54}}\quad\text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）5 点　　（2）10 点　　（3）10 点

（1）$\square_1$ 答に ……………………………………………… 5 点

（2）$\square_1$ 2 回の移動後に P が A にある場合を求めて ……………… 4 点

$\square_2$ 2 回の移動後に P が A にない場合を求めて ……………… 4 点

$\square_3$ 答に ……………………………………………… 2 点

（3）$\square_1$ 4 回の移動後に P が A にある場合を求めて ……………… 4 点

$\square_2$ 4 回の移動後に P が A にない場合を求めて ……………… 4 点

$\square_3$ 答に ……………………………………………… 2 点

【2】題意の長方形の周および内部は，以下の集合で表される．

$$\{(s,\ t)\mid 0 \leqq s \leqq 1,\ -1 \leqq t \leqq 2\}$$

このとき，$x=s+t$，$y=st$ より，s，t は u の 2 次方程式

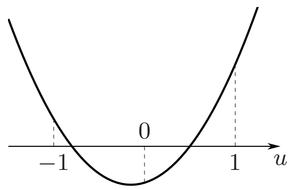
$$u^2-xu+y=0$$

の 2 解である．よって，左辺を $f(u)$ とおけば，x，y のみたすべき条件は

2 次方程式 $f(u)=0$ が $0 \leqq u \leqq 1$，$-1 \leqq u \leqq 2$ の範囲にそれぞれ解をもつこと

である．そこで，以下のように場合分けを行う．

(i) $f(u)=0$ が $-1 \leqq u \leqq 0$ の範囲に 1 つ，$0 \leqq u \leqq 1$ の範囲に 1 つ解をもつとき

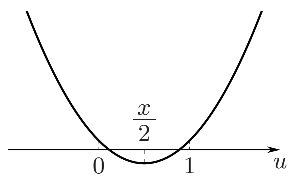


$$\begin{cases} f(-1)=1+x+y \geqq 0 \\ f(0)=y \leqq 0 \\ f(1)=1-x+y \geqq 0 \end{cases}$$

よって

$$y \geqq -x-1,\ y \geqq x-1,\ y \leqq 0$$

(ii) $f(u)=0$ が $0 \leqq u \leqq 1$ の範囲に 2 解 (重解を含む) をもつとき



$$f(u)=\left(u-\frac{x}{2}\right)^2+y-\frac{x^2}{4}$$

と変形できるので

$$0 \leqq \frac{x}{2} \leqq 1,\ y-\frac{x^2}{4} \leqq 0$$

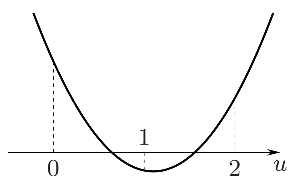
かつ

$$f(0)=y \geqq 0,\ f(1)=1-x+y \geqq 0$$

以上から

$$0 \leqq x \leqq 2,\ y \leqq \frac{1}{4}x^2,\ y \geqq 0,\ y \geqq x-1$$

(iii) $f(u)=0$ が $0 \leqq u \leqq 1$ の範囲に 1 つ，$1 \leqq u \leqq 2$ の範囲に 1 つ解をもつとき

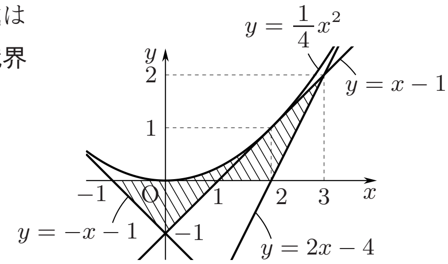


$$\begin{cases} f(0)=y \geqq 0 \\ f(1)=1-x+y \leqq 0 \\ f(2)=4-2x+y \geqq 0 \end{cases}$$

よって

$$y \geqq 0,\ y \leqq x-1,\ y \geqq 2x-4$$

以上より，求める点 $(x,\ y)$ の存在領域は右図の斜線部分のようになる．ただし，境界を含む．　(答)



ここで

$$\frac{1}{4}x^2-(x-1)=\frac{1}{4}(x-2)^2$$

であるから，放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ と直線 $y=x-1$ は点 $(2,\ 1)$ で接する．また

$$2x-4=x-1 \Longleftrightarrow x=3$$

であるから，2 直線 $y=2x-4$, $y=x-1$ は点 $(3,\ 2)$ で交わる．

【配点の目安】

配点：25 点

- $\square_1$ 2 次方程式 $u^2-xu+y=0$ の解の条件に読み替えて……5 点
- $\square_2$ $-1\leqq u\leqq 0$ と $0\leqq u\leqq 1$ で 1 つずつ解をもつ場合の x, y の条件を求めて……4 点
- $\square_3$ $0\leqq u\leqq 1$ で 2 つの解をもつ場合の x, y の条件を求めて……4 点
- $\square_4$ $0\leqq u\leqq 1$ と $1\leqq u\leqq 2$ で 1 つずつ解をもつ場合の x, y の条件を求めて……4 点
- $\square_5$ 図示して……8 点

【3】 $$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

であるから，$\cos x = t$ とおくと，与えられた方程式は

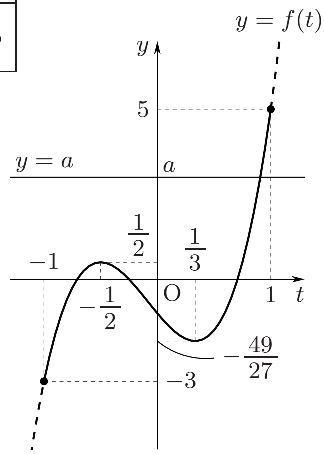
$$2t + (2t^2 - 1) + 2(4t^3 - 3t) = a \iff 8t^3 + 2t^2 - 4t - 1 = a$$

となる．そこで，$f(t) = 8t^3 + 2t^2 - 4t - 1$ とおき，$f(t)$ の増減を調べる．ただし，t の範囲は $-1 \leqq t \leqq 1$ である．すると

$$f'(t) = 24t^2 + 4t - 4 = 4(3t - 1)(2t + 1)$$

なので，$-1 \leqq t \leqq 1$ における $f(t)$ の増減は下表のようになる．

t	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{49}{27}$	$\nearrow$	5



これより，$y = f(t)$ のグラフは右図のようになる．

ここで，$t = \cos x$ をみたす x が 1 つの t に対して何個あるかは，$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ の範囲では次のようになる．

$$\begin{cases} t = -1,\ 1 \text{ のとき} & 1\text{ 個} \quad \cdots\cdots \text{Ⓐ} \\ -1 < t < 1 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \quad \cdots\cdots \text{Ⓑ} \end{cases}$$

そして，t の方程式 $f(t) = a$ の解の個数は，曲線 $y = f(t)$ と直線 $y = a$ のグラフの共有点の個数を考えることにより，次表のようになる．

a の範囲	Ⓐの解	Ⓑの解
$a < -3,\ 5 < a$	なし	なし
$a = -3,\ 5$	1 個	なし
$-3 < a < -\dfrac{49}{27},\ \dfrac{1}{2} < a < 5$	なし	1 個
$a = -\dfrac{49}{27},\ \dfrac{1}{2}$	なし	2 個
$-\dfrac{49}{27} < a < \dfrac{1}{2}$	なし	3 個

よって，題意の方程式の解の個数は下表のようになる．（答）

a の範囲	解の個数
$a < -3,\ 5 < a$	なし
$a = -3,\ 5$	1 個
$-3 < a < -\dfrac{49}{27},\ \dfrac{1}{2} < a < 5$	2 個
$a = -\dfrac{49}{27},\ \dfrac{1}{2}$	4 個
$-\dfrac{49}{27} < a < \dfrac{1}{2}$	6 個

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ $\cos x = t$ とおいて，与式を t の式で表して ······························ 7 点

$\square_2$ $f(t) = 8t^3 + 2t^2 - 4t - 1$ の増減を調べて ······························ 8 点

$\square_3$ 答に ·· 10 点

【4】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{d}$ とする．

BC : CD = 1 : k より，点 D は線分 BC を $(1+k):k$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{d} = \frac{-k\overrightarrow{b} + (1+k)\overrightarrow{c}}{(1+k)-k}$$
$$= \boldsymbol{(1+k)\overrightarrow{c} - k\overrightarrow{b}} \quad \text{（答）}$$

(2) AB : AC = 3 : 2 より正の数 l を用いて

AB $= 3l$，AC $= 2l$

とかける．このとき

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right| = 3l \\ \left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}\right| = 2l \end{cases} \iff \begin{cases} \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 9l^2 \cdots\cdots ① \\ \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{c}\right|^2 - 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = 4l^2 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

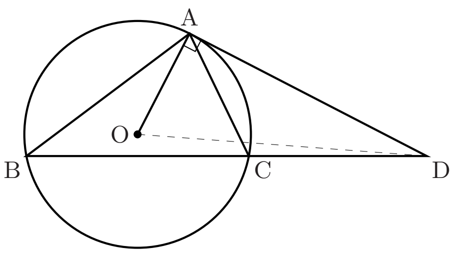
であり，$\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{c}\right| = 1$ および ① × 4 − ② × 9 より l^2 を消去すると

$$-10 - 8\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + 18\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = 0$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \boldsymbol{\frac{9}{4}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - \frac{5}{4}} \quad \text{（答）}$$

(3) AD は点 A において円 S に接するので

OA ⊥ AD



すなわち

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d} = \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{d}\right|\cos\angle\mathrm{AOD}$$
$$= \left|\overrightarrow{a}\right|^2 = 1$$

ここで，(1) より

$$(1+k)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - k\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}$$
$$\therefore \quad (1+k)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - k\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 1$$

また，(2) より，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \dfrac{9}{4}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - \dfrac{5}{4}$ を代入して

$$(1+k)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - k\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 1$$
$$\therefore \quad \left(1 - \frac{5}{4}k\right)(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - 1) = 0$$

ここで，$\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{c}\right| = 1$ より

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = 1 \iff \cos\angle\mathrm{AOC} = 1 \iff$ 点 A と点 C が一致

であるから

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \fallingdotseq 1$$

$$\therefore \quad k = \boldsymbol{\frac{4}{5}} \quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）3 点　　（2）7 点　　（3）15 点

（1）$\square_1$ 答に …………………………………………………… 3 点

（2）$\square_1$ $\mathrm{AB}=3l,\ \mathrm{AC}=2l$ とおいて …………………………… 2 点

$\square_2$ 答に …………………………………………………… 5 点

（3）$\square_1$ $(1+k)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-k\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$ がわかって …………………… 5 点

$\square_2$ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\fallingdotseq 1$ がわかって …………………………………… 3 点

$\square_3$ 答に …………………………………………………… 7 点

問題

【1】(1) まず，$a_n > 2$ を数学的帰納法で証明する．

(I) $a_1 = 3$ だから，$n = 1$ のときは成立する．

(II) $n = k\ (\geqq 1)$ のときの成立，すなわち $a_k > 2$ を仮定する．このとき，与えられた漸化式より

$$a_{k+1} - 2 = \frac{a_k}{2} + \frac{2}{a_k} - 2 = \frac{{a_k}^2 + 4 - 4a_k}{2a_k} = \frac{(a_k - 2)^2}{2a_k}$$

そして，$a_k > 2$ だから

$$(a_k - 2)^2 > 0,\ 2a_k > 0 \qquad \therefore\quad a_{k+1} - 2 > 0$$

となり，$n = k + 1$ のときも成立する．

以上 (I)，(II) より，$a_n > 2$ が成り立つので，$a_{n+1} > 2$ でもある．そして

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} - a_n = \frac{2}{a_n} - \frac{a_n}{2} = \frac{4 - {a_n}^2}{2a_n}$$

であり，$a_n > 2$ だから

$${a_n}^2 > 4,\ 2a_n > 0 \qquad \therefore\quad a_{n+1} - a_n < 0$$

以上より，$2 < a_{n+1} < a_n$ が成り立つ． （証終）

(2) (1)(II) の考察より

$$a_{n+1} - 2 = \frac{(a_n - 2)^2}{2a_n} \quad \cdots\cdots ①$$

そして，$a_n > 2$ なので

$$0 < \frac{1}{2a_n} < \frac{1}{4},\ (a_n - 2)^2 > 0 \qquad \therefore\quad a_{n+1} - 2 < \frac{(a_n - 2)^2}{4}$$ （証終）

(3) (2) の結果から

$$a_4 - 2 < \frac{1}{4}(a_3 - 2)^2 < \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}(a_2 - 2)^2\right\}^2 = \frac{1}{4^3}(a_2 - 2)^4$$

ここで，①および $a_1 = 3$ より

$$a_2 - 2 = \frac{(a_1 - 2)^2}{2a_1} = \frac{1}{6} \qquad \therefore\quad a_4 - 2 < \frac{1}{4^3 \cdot 6^4}$$

そして

$$4^3 \cdot 6^4 = 64 \cdot 1296 = 82944 > 80000 \qquad \therefore\quad a_4 - 2 < \frac{1}{80000}$$ （証終）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 8 点　　(3) 7 点

(1) $\square_1$ $a_n > 2$ を数学的帰納法を用いて示して …………………………… 5 点

$\square_2$ $a_{n+1} < a_n$ を数学的帰納法を用いて示して ………………………… 5 点

(2) $\square_1$ 題意を示して ……………………………………………………… 8 点

(3) $\square_1$ 題意を示して ……………………………………………………… 7 点

【2】(1) まず，真数，底の条件により

$$x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1$$

また

$$\log_y x^3=\frac{\log_x x^3}{\log_x y}=\frac{3}{\log_x y}$$

であるから，与式は

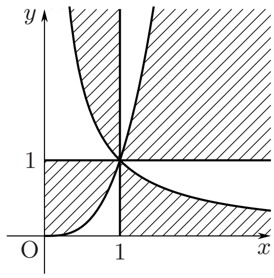
$$\begin{aligned}\log_x y-\frac{3}{\log_x y}-2<0 &\iff \frac{(\log_x y)^2-2\log_x y-3}{\log_x y}<0\\ &\iff \frac{(\log_x y+1)(\log_x y-3)}{\log_x y}<0\\ &\iff \log_x y(\log_x y+1)(\log_x y-3)<0\\ &\iff \log_x y<-1,\ 0<\log_x y<3\end{aligned}$$

よって，$x>1$ のとき

$$y<\frac{1}{x},\ 1<y<x^3$$

$0<x<1$ のとき

$$y>\frac{1}{x},\ 1>y>x^3$$



これをみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲は**図の斜線部**である．**ただし，境界は含まない．**（答）

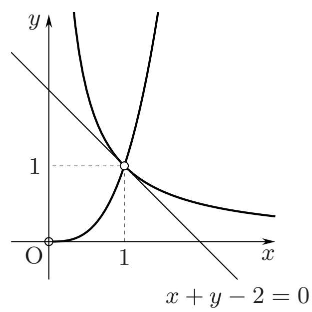
(2) 連立方程式を

$$\begin{cases}\log_x y-\log_y x^3-2=0 & \cdots\cdots ①\\ x+y-k=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

とおく．①をみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲は図の太線部，②をみたす点 $(x,\ y)$ は傾き -1，y 切片 k の直線上にある．これらが共有点をもたないような k の値の範囲が求めるものである．

$y=\dfrac{1}{x}$ の点 $(1,\ 1)$ における接線の傾きがちょうど -1 であるから，図より，求める k の値の範囲は

$$\boldsymbol{k\leqq 0,\ k=2}\quad（答）$$



【配点の目安】

配点：25 点

(1) 15 点　　(2) 10 点

(1) $\square_1$ 真数条件，底の条件を述べて …… 2 点

$\square_2$ $\log_x y$ のとり得る値の範囲を求めて …… 2 点

$\square_3$ x，y のとり得る値の範囲を求めて …… 4 点

$\square_4$ 図示して …………………………………………………… 5 点

$\square_5$ 境界について述べて ……………………………………………… 2 点

（2）$\square_1$ $k \leqq 0$ がわかって ……………………………………………… 6 点

$\square_2$ $k = 2$ がわかって ……………………………………………… 4 点

【3】(1) $y=2x^2+a$ より，$y'=4x$ であるから，l の方程式は

$$y-(2t^2+a)=4t(x-t) \iff \boldsymbol{y=4tx-2t^2+a} \quad \text{（答）}$$

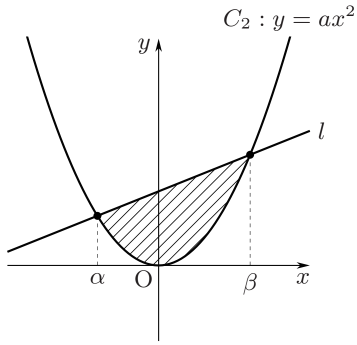
(2) $y=ax^2$ と $y=4tx-2t^2+a$ を連立して

$$ax^2=4tx-2t^2+a \iff ax^2-4tx+2t^2-a=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4t^2-a(2t^2-a)=(4-2a)t^2+a^2$$

$0<a \leqq 2$ より，$\dfrac{D}{4}>0$ であるから，①は異なる 2 つの実数解をもつ．この 2 つの実数解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係より



$$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{4t}{a} \\ \alpha\beta=\dfrac{2t^2-a}{a} \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\text{（面積）} &= \int_\alpha^\beta \{(4tx-2t^2+a)-ax^2\}\,dx = -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= -a\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 \\
&= \frac{a}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{a}{6}\left\{\left(\frac{4t}{a}\right)^2-4\cdot\frac{2t^2-a}{a}\right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{6}\left\{\left(\frac{16}{a^2}-\frac{8}{a}\right)t^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

となり，t の値によらず面積が一定であるには

$$\frac{16}{a^2}-\frac{8}{a}=0 \iff 16-8a=0 \iff \boldsymbol{a=2} \quad \text{（答）}$$

このとき

$$\text{（面積）}=\frac{2}{6}\times 4^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{8}{3}} \quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　　(2) 20 点

(1) $\square_1$ l の方程式を求めて $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 点

(2) $\square_1$ l と C_2 が相異なる 2 つの共有点をもつことを述べて $\cdots\cdots\cdots$ 5 点

$\square_2$ 面積を a，t を用いて表して $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 点

$\square_3$ a の値を定めて $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 点

$\square_4$ 面積を求めて $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 点

【4】

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left| p\cdot\frac{a}{q} - q\cdot\frac{1}{p} \right| = \frac{1}{2}\left| \frac{ap^2-q^2}{pq} \right|$$

$\angle\mathrm{AOP} = \alpha$，$\angle\mathrm{AOQ} = \beta$ $\left(ただし，条件 (1) より 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\tan\alpha = \frac{1}{p^2},\ \tan\beta = \frac{a}{q^2}$$

であるから，条件 (ii) より

$$\frac{1}{p^2} < \frac{a}{q^2} \qquad q^2 < ap^2 \qquad \therefore\quad ap^2 - q^2 > 0$$

これと条件 (i)，(iii) を合わせると

$$\frac{ap^2-q^2}{2pq} = 3 \qquad \therefore\quad ap^2 - q^2 = 6pq \quad \cdots\cdots ①$$

$\angle\mathrm{POQ} = \beta - \alpha$ であるから

$$\tan\angle\mathrm{POQ} = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{a}{q^2} - \frac{1}{p^2}}{1 + \frac{a}{q^2}\cdot\frac{1}{p^2}} = \frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a} = \frac{6pq}{p^2q^2+a}\ (\because\ ①)$$

$$= \frac{6}{pq + \frac{a}{pq}} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，相加・相乗平均の関係より

$$pq + \frac{a}{pq} \geqq 2\sqrt{pq\cdot\frac{a}{pq}} = 2\sqrt{a} \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立ち，等号は

$$pq = \frac{a}{pq} すなわち\ pq = \sqrt{a}$$

のときに成立する．これと①から p を消去して整理すると

$$q^4 + 6\sqrt{a}q^2 - a^2 = 0 \qquad \therefore\quad q^2 = -3\sqrt{a} \pm \sqrt{a^2+9a}$$

となるから，$q^2>0$，$q>0$，$p>0$ に注意すると

$$q = \sqrt{-3\sqrt{a}+\sqrt{a^2+9a}},\ p = \sqrt{\frac{3\sqrt{a}+\sqrt{a^2+9a}}{a}}$$

となる．これらは①をみたし，③の等号を成り立たせる．このとき，②の分母は最小になるから，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ は最大となり，最大値は

$$\frac{6}{2\sqrt{a}} すなわち \frac{3}{\sqrt{a}}$$

である．したがって，この値が $\frac{3}{4}$ に等しいとき

$$\frac{3}{\sqrt{a}} = \frac{3}{4} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a = 16}\ （答）$$

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ $\dfrac{1}{p^2} < \dfrac{a}{q^2}$ を述べて …… 3 点

□$_2$ $ap^2 - q^2 = 6pq$ を得て …… 7 点

□$_3$ $pq + \dfrac{a}{pq} \geqq 2\sqrt{a}$ を述べて …… 5 点

□$_4$ 等号成立条件を述べて …… 5 点

□$_5$ 答に …… 5 点