M1T

本科３期１月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高１難関大数学

２７章　数列（１）

問題

【1】求める数列の初項を a, 公差を d, 一般項を a_n, 初項から第 n 項までの和を S_n とおく.

(1) 一般項 a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1)\cdot 2 \\ &= 2n + a - 2 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$a_5 = 7$ より

$$a_5 = 2\cdot 5 + a - 2 = 7$$
$$\therefore \quad a = -1$$

ゆえに $(*)$ より求める一般項は $a_n = \boldsymbol{2n-3}$ 　(答)

和は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n\,(-1 + 2n - 3) \\ &= \boldsymbol{n(n-2)} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 条件より

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot (a + a_5) \\ &= \frac{5}{2}(2a + 4d) = 20 \\ &\therefore \quad a + 2d = 4 \quad \cdots ① \\ S_{10} &= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot (a + a_{10}) \\ &= 5(2a + 9d) = -10 \\ &\therefore \quad 2a + 9d = -2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

① $\times 2 -$ ② より

$$-5d = 10 \qquad \therefore \quad d = -2$$

① に代入して

$$a = 4 - 2\cdot(-2) = 8$$

よって求める一般項は

$$a_n = 8 + (n-1)\cdot(-2) = \boldsymbol{-2n+10} \quad (\text{答})$$

和は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n\,\{8 + (-2n + 10)\} \\ &= \boldsymbol{n(9-n)} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 条件より

$$a_5 = a + 4d = 7 \quad \cdots ①$$

また第 5 項から第 10 項までの和を T とすると，T は初項 a_5，末項 a_{10}，公差 d, 項数 $10 - 5 + 1 = 6$ の等差数列の和であるから

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (a_5 + a_{10}) \\ &= 3(7 + a + 9d) = 27 \quad (\because \quad a_5 = 7) \\ &\therefore \quad a + 9d = 2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

① − ② より

$$-5d = 5 \qquad \therefore \quad d = -1$$

① に代入して

$$a = 7 - 4d = 7 - 4 \cdot (-1) = 11$$

ゆえに求める一般項は

$$a_n = 11 + (n-1) \cdot (-1) = \boldsymbol{-n + 12} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} n \{11 + (-n + 12)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2} n(23 - n)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【2】求める数列の初項を a，公比を r，一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とする．

(1) 条件より

$$S_5 = \frac{a\left\{1-(-2)^5\right\}}{1-(-2)} = 33$$

ゆえに

$$a(1+32) = 3 \cdot 33$$
$$\therefore \quad a = 3$$

よって一般項は

$$a_n = \mathbf{3 \cdot (-2)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

また和は

$$S_n = \frac{3\left\{1-(-2)^n\right\}}{1-(-2)} = \mathbf{1-(-2)^n} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$a_3 = a \cdot r^2 = 18 \quad \cdots ①$$
$$a_5 = a \cdot r^4 = 162 \quad \cdots ②$$

② ÷ ① より

$$r^2 = 9 \qquad \therefore \quad r = \pm 3$$

① に代入して $a = 2$.

(i) $r = 3$ のとき．一般項は

$$a_n = \mathbf{2 \cdot 3^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n = \frac{2\left(3^n - 1\right)}{3-1} = \mathbf{3^n - 1} \qquad \text{(答)}$$

(ii) $r = -3$ のとき．一般項は

$$a_n = \mathbf{2 \cdot (-3)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n = \frac{2\left\{1-(-3)^n\right\}}{1-(-3)} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{1-(-3)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 条件より

$$a_2 = ar = -52 \quad \cdots ①$$

よって $r \fallingdotseq 0$. また $r = 1$ とすると

$$S_3 = 3 \cdot a_2 = -156 \fallingdotseq 169$$

ゆえに $r \fallingdotseq 1$. よって

$$S_3 = \frac{a\left(1 - r^3\right)}{1 - r} = a\left(1 + r + r^2\right) = 169 \quad \cdots ②$$

① より $a = -\dfrac{52}{r}$. ② に代入して

$$\begin{aligned} -\frac{52}{r}\left(1 + r + r^2\right) &= 169 \\ 4r^2 + 4r + 4 &= -13r \\ 4r^2 + 17r + 4 &= 0 \\ (r+4)(4r+1) &= 0 \\ r &= -4, \quad -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって

(i) $r = -4$ のとき.
① より $a = 13$. 一般項は

$$a_n = \mathbf{13 \cdot (-4)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n = \frac{13\left\{1 - (-4)^n\right\}}{1 - (-4)} = \mathbf{\frac{13}{5}\left\{1 - (-4)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

(ii) $r = -\dfrac{1}{4}$ のとき.
① より $a = 208$. 一般項は

$$a_n = \mathbf{208 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n = \frac{208\left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \mathbf{\frac{832}{5}\left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 3 つの数を $a-d$，a，$a+d$ とすると，これらの和が 21 であるから

$$(a-d)+a+(a+d)=21 \qquad \therefore \quad a=7$$

また平方の和が 179 であるから

$$\begin{aligned}(a-d)^2+a^2+(a+d)^2&=179\\ 3a^2+2d^2&=179\\ 2d^2&=179-3\cdot 7^2=32\\ d^2&=16\\ d&=\pm 4\end{aligned}$$

ゆえにいずれの場合も，求める 3 数は

3，7，11 (答)

(2) 3 つの数を $\dfrac{a}{r}$，a，ar とすると，積が -1728 であるから

$$\begin{aligned}\frac{a}{r}\cdot a\cdot ar&=-1728\\ a^3&=-1728=-2^6\cdot 3^3\\ \therefore \quad a&=-12\end{aligned}$$

また和が 18 であるから

$$\begin{aligned}\frac{a}{r}+a+ar&=18\\ -12\cdot\left(\frac{1}{r}+1+r\right)&=18\\ 2r^2+5r+2&=0\\ (2r+1)(r+2)&=0\\ r&=-\frac{1}{2},\ -2\end{aligned}$$

ゆえにいずれの場合も，求める 3 数は

6，−12，24 (答)

【4】1 から 100 までの自然数の和は，初項 1 ，公差 1，末項 100 ，項数 100 の等差数列の和であるから

$$\frac{100}{2} \times (1 + 100) = 5050$$

(1) 4 で割り切れる数は

$$4 \times 1,\ 4 \times 2,\ 4 \times 3,\ \cdots,\ 4 \times 25$$

であり，その和は，初項 4 ，公差 4，末項 100 ，項数 25 の等差数列の和だから

$$\frac{25}{2} \times (4 + 100) = \mathbf{1300} \qquad \text{(答)}$$

(2) 6 で割り切れる数は

$$6 \times 1,\ 6 \times 2,\ 6 \times 3,\ \cdots,\ 6 \times 16$$

であり，その和は，初項 6 ，公差 6，末項 96 ，項数 16 の等差数列の和と考えて

$$\frac{16}{2} \times (6 + 96) = 816$$

よって， 6 で割り切れない数の和は

$$5050 - 816 = \mathbf{4234} \qquad \text{(答)}$$

(3) 4 で割り切れる数， 6 で割り切れる数にともに含まれる数は，

$$12 \times 1,\ 12 \times 2,\ 12 \times 3,\ \cdots,\ 12 \times 8$$

であり，その和は，初項 12 ，公差 12，末項 96 ，項数 8 の等差数列の和と考えて

$$\frac{8}{2} \times (12 + 96) = 432$$

これと，(1)(2) の結果より， 4 または 6 で割り切れる数の総和は

$$1300 + 816 - 432 = 1684$$

以上より， 4 でも 6 でも割り切れない数の総和は

$$5050 - 1684 = \mathbf{3366} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，条件より

$$a_{10} = a + 9d = 30 \quad \cdots ①$$

また

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (a_1 + a_5) = 220$$
$$\therefore \quad a + 2d = 44 \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$7d = -14 \qquad \therefore \quad d = -2$$

② に代入して

$$a = 44 - 2 \cdot (-2) = 48$$

ゆえに求める一般項は

$$a_n = 48 + (n-1) \cdot (-2) = \boldsymbol{-2n+50} \qquad (答)$$

(2) 不等式

$$a_n \geqq 0$$

を解くと

$$-2n + 50 \geqq 0 \qquad \therefore \quad n \leqq 25$$

ゆえに，公差 $d = -2 < 0$ であることを考えると

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{24} > a_{25} = 0 > a_{26} > \cdots$$

であるから，S_n が最大になるのは $n = 24$ または $n = 25$ のとき．求める最大値は

$$\begin{aligned} S_{24} = S_{25} &= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (a_1 + a_{25}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 48 \\ &= \mathbf{600} \qquad (答) \end{aligned}$$

(3) 求める和は，初項 48，公差 $2d = -4$，項数 50 の等差数列の和である．第 50 項は

$$48 + (50-1) \cdot (-4) = -148$$

であるから，求める和を S_n とすると

$$S_n = \frac{50}{2} \cdot \{48 + (-148)\} = \mathbf{-2500} \qquad (答)$$

【6】初項 3，公比 2 の等比数列の一般項は

$$3 \cdot 2^{n-1}$$

であるから，

$$3 \cdot 2^{n-1} > 1500$$

となる最小の整数 n を求める．これを整理すると

$$2^{n-1} > 500$$

となり，$2^8 = 256$，$2^9 = 512$ であるから

$$n - 1 \geqq 9 \qquad \therefore \quad n \geqq 10$$

よって，**第 10 項** ではじめて 1500 を超える．　　(答)

【7】初項 2，公比 2 の等比数列の第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{2 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

であるから

$$2^{n+1} - 2 > 510$$

をみたす最小の整数 n を求める．

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> 512 = 2^9 \\ n + 1 &> 9 \\ n &> 8 \end{aligned}$$

よって，求める n は，

9　　(答)

【8】 毎年はじめの積み立て額を x 円，年利率を r $(0 < r < 1)$ とする．

それぞれの年の積み立て額に対して，n 年後の金額は表のようになる．

	1 年後	2 年後		$(n-2)$ 年後	$(n-1)$ 年後	n 年後
x	$x(1+r)$	$x(1+r)^2$	$\cdots\cdots$	$x(1+r)^{n-2}$	$x(1+r)^{n-1}$	$x(1+r)^n$
	x	$x(1+r)$	$\cdots\cdots$	$x(1+r)^{n-3}$	$x(1+r)^{n-2}$	$x(1+r)^{n-1}$
		x	$\cdots\cdots$	$x(1+r)^{n-4}$	$x(1+r)^{n-3}$	$x(1+r)^{n-2}$
			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
				x	$x(1+r)$	$x(1+r)^2$
					x	$x(1+r)$

n 年後の元利合計 S_n は，初項 $x(1+r)$，公比 $1+r$ の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r)-1} \\ &= \frac{x(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \end{aligned}$$

である．

ここで $r = 0.04$，$n = 10$ とすると 10 年後の元利合計額は

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{x(1+0.04)\{(1+0.04)^{10} - 1\}}{(1+0.04)-1} \\ &= \frac{x \cdot 1.04 \cdot (1.48 - 1)}{0.04} = 12.48x \end{aligned}$$

これを 100 万円としたいから

$$\begin{aligned} &12.48x = 1000000 \\ &\quad \therefore\ x = \frac{1000000}{12.48} = 80128.20\ldots \end{aligned}$$

したがって，必要な積み立て額は，

80129 円　　(答)

【9】 $a_n = pn + q \quad \cdots$① より，$n$ を $n+1$ で置き換えて

$$a_{n+1} = p(n+1) + q \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$a_{n+1} - a_n = p(n+1) + q - (pn+q) = p$$

p は定数であるから，数列 $\{a_n\}$ は公差 p の等差数列である．　［証明終］

＜コメント＞
等差数列の一般項は，n の 1 次以下の整式になる．逆に，一般項が n の 1 次以下の整式で表される数列は等差数列となる．

添削課題

【1】(1)　初項は2で，3ずつ増えていくので公差は3である．よって，

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n-1$$
$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 + (3n-1)\} = \frac{1}{2}n(3n+1)$$

以上より，

初項は**2**，公差は**3**，$a_n = \mathbf{3n-1}$，$S_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n+1)}$　　(答)

(2)　初項は7で，4ずつ減っていくので公差は-4である．よって，

$$a_n = 7 + (n-1)\cdot(-4) = -4n+11$$
$$S_n = \frac{1}{2}n\{7 + (-4n+11)\} = \frac{1}{2}n(-4n+18) = -n(2n-9)$$

以上より，

初項は**7**，公差は$\mathbf{-4}$，$a_n = \mathbf{-4n+11}$，$S_n = \boldsymbol{-n(2n-9)}$　　(答)

【2】(1)　初項は3で，2倍ずつになっていくので公比は2である．よって，

$$a_n = 3\cdot 2^{n-1}$$
$$S_n = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = 3(2^n-1)$$

以上より，

初項は**3**，公比は**2**，$a_n = \boldsymbol{3\cdot 2^{n-1}}$，$S_n = \boldsymbol{3(2^n-1)}$　　(答)

(2)　初項は2で，-5倍ずつになっていくので公比は-5である．よって，

$$a_n = 2\cdot(-5)^{n-1}$$
$$S_n = \frac{2\{1-(-5)^n\}}{1-(-5)} = \frac{1-(-5)^n}{3}$$

以上より，

初項は**2**，公比は$\mathbf{-5}$，$a_n = \boldsymbol{2\cdot(-5)^{n-1}}$，$S_n = \boldsymbol{\frac{1-(-5)^n}{3}}$　　(答)

【3】(1)　$a_6 = a + (6-1)\cdot d = a + 5d = 3$　$\cdots$①

$a_{10} = a + (10-1)\cdot d = a + 9d = 23$　$\cdots$②

①，②より，$a = \mathbf{-22}$，$d = \mathbf{5}$　　(答)

(2)　$\frac{1}{2}n\{36 + (-20)\} = 120$ より，$n = \mathbf{15}$　　(答)

よって，第15項が末項だから，

$$36 + (15-1)d = -20$$
$$d = \mathbf{-4}$$　(答)

【4】(1)
$$a_2 = ar = 64 \quad \cdots ①$$
$$a_5 = ar^4 = -8 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入して，

$$ar \cdot r^3 = 64r^3 = -8$$
$$r^3 = -\frac{1}{8} \qquad \therefore\ r = -\frac{1}{2}$$

よって，① より，

$$-\frac{1}{2}a = 64 \qquad \therefore\ a = -128$$

以上より，

$$\boldsymbol{a = -128,\ r = -\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 初項を a，公比を r とおくと，題意より，$r \neq 1$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a + ar + ar^2 = 5 \quad \cdots ①$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = ar^3 + ar^4 + ar^5 = 40 \quad \cdots ②$$

② より

$$r^3(a + ar + ar^2) = 40$$

① を代入して，

$$5r^3 = 40$$
$$r^3 = 8 \qquad \therefore\ r = 2$$

よって，① より，

$$a + 2a + 4a = 5$$
$$7a = 5$$
$$a = \frac{5}{7}$$

以上より，

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{5}{7} \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{\frac{5 \cdot 2^{n-1}}{7}} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $a,\ b,\ c$ がこの順に等差数列をなすので

$$2b = a + c$$

$a + b + c = 36$ より

$$3b = 36 \qquad \therefore \quad b = 12,\ a + c = 24$$

$abc = 1536$ より

$$ac = 128$$

$a,\ c$ は 2 次方程式 $t^2 - 24t + 128 = 0$ の解であるから

$$t = 8,\ 16 \qquad \therefore \quad (a,\ c) = (8,\ 16),\ (16,\ 8)$$

よって

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (8,\ 12,\ 16),\ (16,\ 12,\ 8)} \quad \textbf{(答)}$$

(2) $a,\ b,\ c$ がこの順に等比数列をなすから

$$b^2 = ac$$

$abc = 216$ より

$$b^3 = 216$$

$$\therefore \quad b = 6$$

$a + b + c = 21$ と合わせて

$$a + c = 15,\ ac = 36$$

よって，$a,\ c$ は 2 次方程式 $t^2 - 15t + 36 = 0$ の解であるから

$$t = 3,\ 12$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (3,\ 6,\ 12),\ (12,\ 6,\ 3)} \quad \textbf{(答)}$$

２８章　数列（２）

問題

【1】(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_{k+1} = \boldsymbol{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}$　(答)

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} = \boldsymbol{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9}$　(答)

(3) $\displaystyle\sum_{k=3}^{8} a_k = \boldsymbol{a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8}$　(答)

(4)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(a_{k+1} - a_k) &= (\cancel{a_2} - a_1) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_4} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_5} - \cancel{a_4}) + (a_6 - \cancel{a_5}) \\ &= \boldsymbol{-a_1 + a_6} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= \boldsymbol{n^2} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 3k(2k-1) &= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k \\ &= 6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(4n+2-3) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)(4n-1)} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^3 - k) &= \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n-1)(n+2)} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4)
$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2 \cdot (2^n - 1)}{2-1} = \boldsymbol{2(2^n - 1)} \quad \text{(答)}$$

(5)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-2^k}{4^k}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\&=\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}\\&=3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\\&=\boldsymbol{2-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2&=\sum_{k=1}^{5}\left(k^2+2k+1\right)\\&=\sum_{k=1}^{5}k^2+2\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1\\&=\frac{1}{6}\cdot5\cdot6\cdot11+2\cdot\frac{1}{2}\cdot5\cdot6+5\\&=\mathbf{90}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

＜別解＞

$l=k+1$ とおくと

k	$1 \longrightarrow 5$
l	$2 \longrightarrow 6$

より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2&=\sum_{l=2}^{6}l^2\\&=\sum_{l=1}^{6}l^2-\sum_{l=1}^{1}l^2\\&=\frac{1}{6}\cdot6\cdot7\cdot13-1^2\\&=\mathbf{90}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【3】(1)
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)&=(0+1)(0+2)+\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)\\&=1\cdot2+\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}1\\&=2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n\\&=\frac{1}{6}\{12+n(n+1)(2n+1)+9n(n+1)+12n\}\\&=\frac{1}{6}\{n(n+1)(2n+1)+9n(n+1)+12(n+1)\}\\&=\frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+10n+12\right)\\&=\frac{1}{3}(n+1)\left(n^2+5n+6\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

<コメント>

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ である.

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= 4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\ &= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\ &= \frac{1}{3}n\left(4n^2+6n+2-6n-6+3\right)\\ &= \frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n^2}k &= \sum_{k=1}^{2n^2}k-\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2n^2\cdot\left(2n^2+1\right)-\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{2}n\left\{2n\left(2n^2+1\right)-(n+1)\right\}\\ &= \frac{1}{2}n\left(4n^3+2n-n-1\right)\\ &= \frac{1}{2}n\left(4n^3+n-1\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(2n-1)\left(2n^2+n+1\right)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1) &= (n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\\ &= (n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}k &= \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \sum_{m=1}^{l}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m(m+1)(m+2)\\ &= \frac{1}{6}\sum_{m=1}^{l}m^3+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{l}m^2+\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{l}m\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}l^2(l+1)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}l(l+1)(2l+1)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}l(l+1)\\ &= \frac{1}{24}l(l+1)\{l(l+1)+2(2l+1)+4\}\\ &= \frac{1}{24}l(l+1)\left(l^2+5l+6\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{24}l(l+1)(l+2)(l+3)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

<コメント>

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ を用いると，

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \sum_{m=1}^{l}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m(m+1)(m+2)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}l(l+1)(l+2)(l+3)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{24}l(l+1)(l+2)(l+3)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} ki\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left\{i\left(\sum_{k=1}^{i} k\right)\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\{i\cdot\frac{1}{2}i(i+1)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)\}\\ &= \frac{1}{24}n(n+1)\left(3n^2+7n+2\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【4】

$$S_n = 1 + 3x + 5x^2 + \cdots\cdots + (2n-1)x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)x^{k-1}$$

とおく.

(i) $x = 1$ のとき.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n = n^2$$

(ii) $x \fallingdotseq 1$ のとき.

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 + 3x + 5x^2 + \cdots\cdots + (2n-1)x^{n-1} \\ -)\ xS_n = & \phantom{1 +{}} x + 3x^2 + \cdots\cdots + (2n-3)x^{n-1} + (2n-1)x^n \\ \hline (1-x)S_n = & 1 + 2(x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1}) - (2n-1)x^n \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 2 \cdot \frac{x \cdot (1 - x^{n-1})}{1-x} - (2n-1)x^n \\ &= \frac{(1-x) + 2x(1-x^{n-1}) - (1-x)(2n-1)x^n}{1-x} \\ &= \frac{1 + x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{1-x} \\ \therefore\ S_n &= \frac{1 + x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

以上より，求める和は

$$S_n = \begin{cases} \boldsymbol{n^2} & \textbf{(}\boldsymbol{x = 1}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{\dfrac{1 + x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}} & \textbf{(}\boldsymbol{x \fallingdotseq 1}\ \textbf{のとき)} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【5】問題の数列の第 k 項は

$$(2k-1) \cdot (n-k+1)$$

と表される．項数は n であるから，求める和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot (n-k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \{-2k^2 + (2n+3)k - (n+1)\} \\ &= -2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (2n+3) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - (n+1) \cdot n \\ &= \frac{1}{6} n(n+1) \{-2(2n+1) + 3(2n+3) - 6\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【6】(1) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots\cdots + (\text{第 } n \text{ 項})$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)\{n(n+1) + 2(2n+1) + 4\} = \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) 第 k 項は

$$\begin{aligned}
&1\cdot 10^{k-1}+1\cdot 10^{k-2}+\cdots+1\cdot 10^0\\
&\quad=\sum_{i=1}^{k}10^{i-1}\\
&\quad=\frac{1\cdot(10^k-1)}{10-1}\\
&\quad=\frac{10^k-1}{9}
\end{aligned}$$

と表される．よって，求める和は

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{9}&=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}10^k-\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}1\\
&=\frac{1}{9}\cdot\frac{10\cdot(10^n-1)}{10-1}-\frac{1}{9}n\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right)}\qquad\textbf{(答)}
\end{aligned}$$

【7】(1)

$$\begin{aligned}
S_n&=1+(-2)+3+(-4)+5+(-6)+\cdots+(\text{第 } n \text{ 項})\\
&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot k
\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{array}{rrl}
& S_n =& 1+(-2)+3+(-4)+5+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n\\
-) & -S_n =& \qquad (-1)+2+(-3)+4+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot(n-1)+(-1)^n\cdot n\\
\hline
& 2S_n =& \{1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}\}-(-1)^n\cdot n
\end{array}$$

ここで

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}$$

は初項 1，公比 -1 の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから

$$\begin{aligned}
2S_n&=\frac{1\cdot\{1-(-1)^n\}}{1-(-1)}-(-1)^n\cdot n\\
&=\frac{1-(-1)^n}{2}-(-1)^n\cdot n\\
&=\frac{1}{2}-\frac{2n+1}{2}\cdot(-1)^n\\
\therefore\ S_n&=\boldsymbol{\frac{1}{4}-\frac{2n+1}{4}\cdot(-1)^n}\qquad\text{(答)}
\end{aligned}$$

(2) $$S_n = 1^2 \cdot 3^0 + 2^2 \cdot 3^1 + 3^2 \cdot 3^2 + \cdots + n^2 \cdot 3^{n-1}$$

とおくと

$$\begin{array}{rl}
S_n &= 1^2 \cdot 3^0 + 2^2 \cdot 3^1 + 3^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 3^3 + \cdots + n^2 \cdot 3^{n-1} \\
-)\ 3S_n &= \qquad\quad 1^2 \cdot 3^1 + 2^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^3 + \cdots + (n-1)^2 \cdot 3^{n-1} + n^2 \cdot 3^n \\
\hline
-2S_n &= 1^2 \cdot 3^0 + (2^2 - 1^2) \cdot 3^1 + (3^2 - 2^2) \cdot 3^2 \\
&\qquad + \cdots + \left\{n^2 - (n-1)^2\right\} \cdot 3^{n-1} - n^2 \cdot 3^n \\
&= 1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1} - n^2 \cdot 3^n \\
&= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot 3^{k-1} - n^2 \cdot 3^n \\
&= 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^{k-1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n^2 \cdot 3^n
\end{array}$$

ここで

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^{k-1} = 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$$

とおくと,

$$\begin{array}{rl}
T_n &= 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^{n-1} \\
-)\ 3T_n &= \qquad\quad 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + (n-1) \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^n \\
\hline
-2T_n &= 1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + \cdots + 1 \cdot 3^{n-1} - n \cdot 3^n \\
&= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{k - (k-1)\} \cdot 3^{k-1} - n \cdot 3^n \\
&= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n \cdot 3^n
\end{array}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
-2S_n &= -\left(\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n \cdot 3^n\right) - \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n^2 \cdot 3^n \\
&= -2\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - (n^2 - n) \cdot 3^n \\
&= -2 \cdot \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} - (n^2 - n) \cdot 3^n \\
&= -(n^2 - n + 1) \cdot 3^n + 1
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad S_n = \boldsymbol{\frac{(n^2 - n + 1) \cdot 3^n - 1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【8】上から k 段目，左から第 i 項の数は

$$k \cdot i$$

であるから，k 段目にある n 個の数の和は

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot i = k \sum_{i=1}^{n} i = k \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$

よって，1 段目から n 段目までの n^2 個の数の和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{2} n(n+1) &= \frac{1}{2} n(n+1) \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

＜コメント＞

左上から対角線上にある各項は，k^2 $(k = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$ の形で表される．

$1 \cdot 1$	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 3$	$\cdots\cdots$	$1 \cdot k$	$\cdots\cdots$	$1 \cdot n$
$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$\cdots\cdots$	$2 \cdot k$	$\cdots\cdots$	$2 \cdot n$
$3 \cdot 1$	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 3$	$\cdots\cdots$	$3 \cdot k$	$\cdots\cdots$	$3 \cdot n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
$k \cdot 1$	$k \cdot 2$	$k \cdot 3$	$\cdots\cdots$	$k \cdot k$	$\cdots\cdots$	$k \cdot n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$n \cdot 1$	$n \cdot 2$	$n \cdot 3$	$\cdots\cdots$	$n \cdot k$	$\cdots\cdots$	$n \cdot n$

その k にしたがって放射状に広がるまとまりを考えると，k 番目 $(k \geqq 2)$ の和は

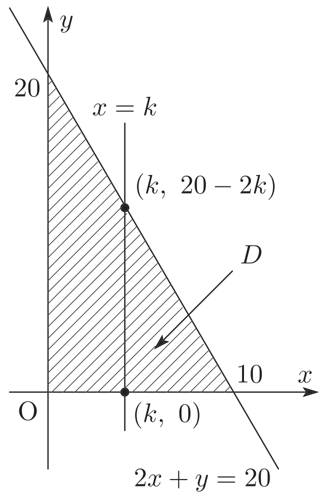
$$\begin{aligned}&2 \cdot \{k \cdot 1 + k \cdot 2 + k \cdot 3 + \cdots\cdots + k \cdot (k-1)\} + k \cdot k \\ &= 2k \sum_{i=1}^{k-1} i + k^2 \\ &= 2k \cdot \frac{(k-1) \cdot k}{2} + k^2 \\ &= (k^3 - k^2) + k^2 \\ &= k^3\end{aligned}$$

となる．これは $k = 1$ でも成り立つので，求める和は，

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \boldsymbol{\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2} \qquad \text{(答)}$$

となる．

【9】(1) 問題の領域は図のようになる．この領域を D とおく．



D 内に含まれる格子点のうち，直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$ 上にあるものは

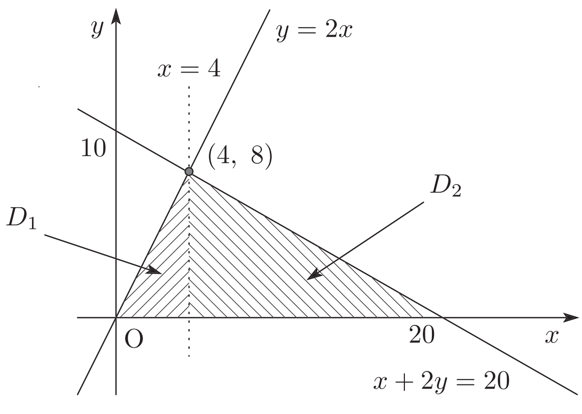
$$(k,\ 0),\ (k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ -2k+20)$$

の $-2k+20+1=-2k+21$ 個．

ゆえに求める格子点の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10}(-2k+21) &= 21+\sum_{k=1}^{10}(-2k+21)\\ &= 21-2\sum_{k=1}^{10}k+21\sum_{k=1}^{10}1\\ &= 21-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11+21\cdot 10\\ &= \textbf{121 個}\qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 問題の領域は図のようになる．



この領域を D とし，領域 D を以下のように 2 つの領域 D_1，D_2 に分ける．

$$\begin{aligned}&D_1:\ y\geqq 0,\ \ 0\leqq x<4,\ \ y\leqq 2x\\ &D_2:\ y\geqq 0,\ \ 4\leqq x\leqq 20,\ \ x+2y\leqq 20\end{aligned}$$

また D_1，D_2 に含まれる格子点の個数をそれぞれ N_1，N_2 とする．

D_1 内の格子点のうち，直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 上にあるものは

$$(k,\ 0),\ (k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ 2k)$$

の $2k+1$ 個．ゆえに

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{k=0}^{3}(2k+1) \\ &= 1+\sum_{k=1}^{3}(2k+1) \\ &= 1+2\sum_{k=1}^{3}k+\sum_{k=1}^{3}1 \\ &= 1+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4+3 = 16 \text{ 個} \end{aligned}$$

また D_2 内の格子点のうち，直線 $y=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,8)$ 上にあるものは

$$(4,\ k),\ (5,\ k),\ (6,\ k),\ \cdots,\ (-2k+20,\ k)$$

の $(-2k+20)-4+1=-2k+17$ 個．ゆえに

$$\begin{aligned} N_2 &= \sum_{k=0}^{8}(-2k+17) \\ &= 17+\sum_{k=1}^{8}(-2k+17) \\ &= 17-2\sum_{k=1}^{8}k+17\sum_{k=1}^{8}1 \\ &= 17-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9+17\cdot 8 = 81 \text{ 個} \end{aligned}$$

よって求める個数は

$$N_1+N_2 = 16+81 = \mathbf{97}\ \textbf{個} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) 初項 1，公差 3 の等差数列だから，一般項 a_n は

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = \boldsymbol{3n - 2} \qquad (答)$$

また，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(3k-2)} \qquad (答)$$

(2) 初項 2，公比 -3 の等比数列だから，一般項 a_n は

$$a_n = \boldsymbol{2 \cdot (-3)^{n-1}} \qquad (答)$$

また，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot (-3)^{k-1}} \qquad (答)$$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{5} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(k^2+1) &= (1^2+1) + (2^2+1) + (3^2+1) + (4^2+1) + (5^2+1) \\ &= 2 + 5 + 10 + 17 + 26 \\ &= \boldsymbol{60} \qquad (答)\end{aligned}$$

【2】(1) ① $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \boldsymbol{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k}$ (答)

② $\sum\limits_{k=1}^{n} ca_k = \boldsymbol{c\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$ (答)

(2) ① $\sum\limits_{k=1}^{n} c = \boldsymbol{cn}$ (答)

② $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}n(n+1)}$ (答)

③ $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$ (答)

④ $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2}$ (答)

⑤ $\sum\limits_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \boldsymbol{\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}}$ (答)

【3】(1)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(3k-2) &= 3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2 \\
&= 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n \\
&= \frac{3n^2-n}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n-1)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1) &= \sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2 \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n}k &= \sum_{k=1}^{2n}k-\sum_{k=1}^{n}k \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1) \\
&= n(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{2}n\{2(2n+1)-(n+1)\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n+1)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【4】一般項は，$a_n = n(n+1) = n^2+n$

よって

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}a_k &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\} \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【5】求める和を S とおく.

$$S = 2 + (-4) + 6 + (-8) + 10 + \cdots + 2n \cdot (-1)^{n-1} \quad \cdots ①$$

① の両辺を -1 倍して

$$-S = (-2) + 4 + (-6) + 8 + \cdots + 2(n-1) \cdot (-1)^{n-1} + 2n \cdot (-1)^n \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$2S = 2 + (-2) + 2 + (-2) + 2 + \cdots + 2 \cdot (-1)^{n-1} - 2n \cdot (-1)^n$$

よって

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot (-1)^{k-1} - 2n \cdot (-1)^n \\ &= 2 \cdot \frac{1 \cdot \{1 - (-1)^n\}}{1 - (-1)} - 2n \cdot (-1)^n \\ &= 1 - (-1)^n - 2n \cdot (-1)^n \\ &= 1 - (2n+1) \cdot (-1)^n \end{aligned}$$

$$\therefore\ S = \boldsymbol{\frac{1 - (2n+1) \cdot (-1)^n}{2}} \qquad (答)$$

２９章　数列（３）

問題

【1】(1)

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \cdots \\
&\qquad + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \\
&= \boldsymbol{\frac{n}{2(n+2)}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(2)

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{5}} \right) \right. \\
&\qquad \left. + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{3n^2 + 5n}{4(n+1)(n+2)} \\
&= \boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3) $$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}\\
&=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\cancel{\frac{1}{2\cdot3\cdot4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2\cdot3\cdot4}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot4\cdot5}}\right)+\cdots\right.\\
&\left.+\left\{\cancel{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}\right]\\
&=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}\\
&=\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)-6}{6(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&=\boldsymbol{\frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}}\qquad\text{(答)}
\end{aligned}$$

(4) $$\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\cdots+(\text{第 } n \text{ 項})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

ここで

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

であるから，求める和は

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots\right.\\
&\left.+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\cancel{\frac{1}{2n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2n+1}}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{n}{3(2n+3)}}\qquad\text{(答)}
\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)}\\
&=-\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)\\
&=-\left\{\left(\sqrt{1}-\cancel{\sqrt{2}}\right)+\left(\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\sqrt{n-1}}-\cancel{\sqrt{n}}\right)+\left(\cancel{\sqrt{n}}-\sqrt{n+1}\right)\right\}\\
&=-\left(\sqrt{1}-\sqrt{n+1}\right)\\
&=\boldsymbol{\sqrt{n+1}-1}\qquad\text{(答)}
\end{aligned}$$

(6) $$\log_2 \frac{k+1}{k} = \log_2(k+1) - \log_2 k$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{k+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \{\log_2(k+1) - \log_2 k\} \\
&= (\cancel{\log_2 2} - \log_2 1) + (\cancel{\log_2 3} - \cancel{\log_2 2}) \\
&\quad + \cdots + \{\cancel{\log_2 n} - \cancel{\log_2(n-1)}\} + \{\log_2(n+1) - \cancel{\log_2 n}\} \\
&= \log_2(n+1) - \log_2 1 \\
&= \boldsymbol{\log_2(n+1)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) \\
&\quad = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n} \big\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) - (k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\big\} \\
&\quad = \frac{1}{5}\Big[(\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - 0\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4) + (\cancel{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}) + \cdots \\
&\quad + \{\cancel{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)} - \cancel{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}\} \\
&\quad + \{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - \cancel{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}\}\Big] \\
&\quad = \boldsymbol{\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

＜コメント＞
一般に，正整数 p に対して，次のことが成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdot\cdots\cdot(k+p) = \frac{1}{p+2}n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+p+1)$$

(2) $(k+1)! = (k+1)\cdot k!$ であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! &= \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)! - k!\} \\
&= (\cancel{2!} - 1!) + (\cancel{3!} - \cancel{2!}) + \cdots\cdots + \{(n+1)! - \cancel{n!}\} \\
&= \boldsymbol{(n+1)! - 1} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3)
$$(\text{与式}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

である．ここで

$$\frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \frac{a}{(2k-1)^2} + \frac{b}{(2k+1)^2}$$

をみたす定数 a, b を求めると

$$\frac{a}{(2k-1)^2} + \frac{b}{(2k+1)^2} = \frac{4(a+b)k^2 + 4(a-b)k + (a+b)}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

上式と比較して

$$a+b=0, \quad a-b=\frac{1}{2}$$

これを解いて

$$a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{4}$$

すなわち

$$\frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right\}$$

であるから，求める和は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{1^2} - \cancel{\frac{1}{3^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3^2}} - \cancel{\frac{1}{5^2}}\right) + \cdots + \left\{\cancel{\frac{1}{(2n-1)^2}} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left\{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(4)
$$(\text{与式}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$$

であり,

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{5}}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)} \\
&= \boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(5) 一般項の分母は

$$\begin{aligned}
&1^2 + 3^2 + \cdots\cdots + (2k-1)^2 \\
&\quad = \sum_{m=1}^{k} (2m-1)^2 \\
&\quad = \sum_{m=1}^{k} (4m^2 - 4m + 1) \\
&\quad = 4 \cdot \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) - 4 \cdot \frac{1}{2}k(k+1) + k \\
&\quad = \frac{1}{3}k \cdot \{2(k+1)(2k+1) - 6(k+1) + 3\} \\
&\quad = \frac{1}{3}k(4k^2-1)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2} \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\frac{1}{3}k(4k^2-1)} \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4k^2-1} \\
&\qquad = 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} \\
&\qquad = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) \\
&\qquad = \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\} \\
&\qquad = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \\
&\qquad = \boldsymbol{\frac{3n}{2n+1}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【3】(1) 問題の数列を $\{a_n\}$，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\{a_n\}:\ -1,\ 0,\ 4,\ 11,\ 21,\ 34,\ \cdots \\
&\{b_n\}:\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \cdots
\end{aligned}$$

$\{b_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列であるから

$$b_n = 1+3(n-1) = 3n-2$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= -1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k-2) \\
&= -1 + 3\cdot\frac{1}{2}(n-1)\cdot n - 2(n-1) \\
&= \frac{1}{2}(3n^2-7n+2) \\
&= \frac{1}{2}(n-2)(3n-1)
\end{aligned}$$

$n=1$ のとき

$$\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 2 = -1 = a_1$$

より，上式は $n=1$ のときも成り立つ．

よって求める一般項は

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n-2)(3n-1)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 問題の数列を $\{a_n\}$，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$\{a_n\}:\ 1,\ 4,\ 13,\ 40,\ 121,\ 364,\ \cdots$$
$$\{b_n\}:\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \cdots$$

$\{b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(3^n - 3) = \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{aligned}$$

$n = 1$ とすると

$$\frac{1}{2} \cdot (3 - 1) = 1 = a_1$$

より，上式は $n = 1$ のときも成り立つ.

よって求める一般項は

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}(3^n - 1)} \qquad \text{(答)}$$

【4】問題の数列を $\{a_n\}$，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$\{a_n\}:\ -10,\ -4,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 4,\ 10,\ \cdots$$
$$\{b_n\}:\ 6,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 6,\ \cdots$$

また $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると

$$\{c_n\}:\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

$\{c_n\}$ は初項 -3，公差 1 の等差数列であるから

$$c_n = -3 + (n-1) \cdot 1 = n - 4$$

$\{b_n\}$ の一般項は，$n \geqq 2$ として

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 6 + \sum_{k=1}^{n-1} (k - 4) \\ &= 6 + \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n - 4(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 - 9n + 20) \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - 9 + 20) = 6 = b_1$$

であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ.

また $\{a_n\}$ の一般項は，$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= -10 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2 - 9k + 20) \\
&= -10 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot(n-1)\cdot n\{2(n-1)+1\} \\
&\quad - \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}\cdot 20(n-1) \\
&= \frac{1}{12}(2n^3 - 30n^2 + 148n - 240) \\
&= \frac{1}{6}(n^3 - 15n^2 + 74n - 120) \\
&= \frac{1}{6}(n-4)(n-5)(n-6)
\end{aligned}
$$

$n = 1$ のとき

$$\frac{1}{6}\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5) = -10 = a_1$$

より，上式は $n = 1$ のときも成り立つ.

よって求める一般項は

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{6}(n-4)(n-5)(n-6)} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 条件より

$$S_n = 2n^2 + 2n = 2n(n+1) \quad \cdots ①$$

(i) $n = 1$ のとき.

$$a_1 = S_1 = 2\cdot 1\cdot 2 = 4$$

(ii) $n \geqq 2$ のとき.
① で n を $n-1$ としたものとの差をとって

$$
\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= 2n(n+1) - 2(n-1)n \\
&= 4n
\end{aligned}
$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つ.

よって求める一般項は

$$a_n = \boldsymbol{4n \quad (n \geqq 1)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$S_n = n^2 + 3 \quad \cdots ②$$

(i) $n = 1$ のとき.

$$a_1 = S_1 = 1 + 3 = 4$$

(ii) $n \geqq 2$ のとき.

② で n を $n-1$ としたものとの差をとって

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2+3) - \{(n-1)^2+3\} \\ &= 2n-1 \end{aligned}$$

これは $n=1$ のとき成立しない.

よって求める一般項は

$$a_n = \begin{cases} \mathbf{4} & (\boldsymbol{n=1}) \\ \boldsymbol{2n-1} & (\boldsymbol{n \geqq 2}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(3) 条件より

$$S_n = n \cdot 2^{n+1} + 1 \quad \cdots ③$$

(i) $n=1$ のとき.

$$a_1 = S_1 = 1 \cdot 2^{1+1} + 1 = 5$$

(ii) $n \geqq 2$ のとき.

③ で n を $n-1$ としたものとの差をとって

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n \cdot 2^{n+1} + 1 - \{(n-1) \cdot 2^n + 1\} \\ &= n \cdot 2^{n+1} - n \cdot 2^n + 2^n \\ &= (n+1) \cdot 2^n \end{aligned}$$

これは $n=1$ のとき成立しない.

よって求める一般項は

$$a_n = \begin{cases} \mathbf{5} & (\boldsymbol{n=1}) \\ \boldsymbol{(n+1) \cdot 2^n} & (\boldsymbol{n \geqq 2}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) 等式

$$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n(n+1)}-\frac{b}{(n+1)(n+2)}$$

をみたす数 a，b を求める．右辺を通分して

$$\begin{aligned}\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}&=\frac{a(n+2)-bn}{n(n+1)(n+2)}\\&=\frac{(a-b)n+2a}{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

係数を比較して

$$a-b=5\quad 2a=6$$

これを解いて

$$a=3,\quad b=-2$$

よって

$$a_n=\frac{\boxed{\mathbf{3}}}{\boldsymbol{n(n+1)}}-\frac{\boxed{\mathbf{-2}}}{\boldsymbol{(n+1)(n+2)}}$$ (答)

(2) 求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+1)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

ここで　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{3}{k(k+1)}$　とおくと

$$\begin{aligned}S_n&=3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=3\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\ \cdots\ +\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

また　$T_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}$　とおくと

$$\begin{aligned}T_n&=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\&=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= S_n + T_n \\ &= 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 4 - \frac{3}{n+1} - \frac{2}{n+2} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(4n+7)}{(n+1)(n+2)}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【7】 (1) 数列 $\{a_n\}$ は

$$\{a_n\} :\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ \cdots$$

である．この数列の第 $2m$ 項は，3 で割って 2 余る正整数のうち，小さいほうから m 番目の数である．

3 で割って 2 余る数は，初項 2，公差 3 の等差数列であるから，

$$a_{2m} = 2 + (m-1)\cdot 3 = \boldsymbol{3m-1} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より，正整数 m に対して

$$a_{2m-1} = a_{2m} - 1 = 3m - 2$$

(i) n が偶数，すなわち $n = 2m$ のとき．

$$\begin{aligned}S_n &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2m-1} + a_{2m}) \\ &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \{(3k-2) + (3k-1)\} \\ &= \sum_{k=1}^{m} (6k-3) \\ &= 6\sum_{k=1}^{m} k - 3\sum_{k=1}^{m} 1 \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2}m(m+1) - 3m \\ &= 3m^2\end{aligned}$$

$m = \dfrac{n}{2}$ より

$$S_n = 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}n^2$$

(ii) n が奇数，すなわち $n=2m-1$ のとき．

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2m-3}+a_{2m-2})+a_{2m-1} \\ &= (a_1+a_3+\cdots+a_{2m-3}+a_{2m-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2m-2}+a_{2m})-a_{2m} \\ &= 3m^2-a_{2m} \\ &= 3m^2-3m+1 \end{aligned}$$

$m=\dfrac{1}{2}(n+1)$ より

$$S_n = 3\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}^2 - 3\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}+1 = \frac{1}{4}\left(3n^2+1\right)$$

以上より，k を正整数として

$$S_n = \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{3}{4}n^2} & \boldsymbol{(n=2k)} \\ \boldsymbol{\dfrac{1}{4}\left(3n^2+1\right)} & \boldsymbol{(n=2k-1)} \end{cases}$$

(3) (1) より $a_n>0$ は明らかなので，S_n は単調増加である．

$$\begin{aligned} S_{28} &= \frac{3}{4}\cdot 28^2 = 588 < 600 \\ S_{29} &= \frac{1}{4}\left(3\cdot 29^2+1\right) = 631 > 600 \end{aligned}$$

であるから，求める n は

$n=\mathbf{29}$　　(答)

添削課題

【1】もとの数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とする．

(1) $\{b_n\}$ は 1，3，5，7，9，$\cdots$ より，初項 1，公差 2 の等差数列となり

$$b_n = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 1$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 1 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} - (n-1) \\ &= n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$1^2 - 2\cdot 1 + 2 = 1 = a_1$ より，適する．

以上より，$a_n = \boldsymbol{n^2 - 2n + 2}$　　**(答)**

(2) $\{b_n\}$ は 1，-2，4，-8，16，$\cdots$ より，初項 1，公比 -2 の等比数列となり

$$b_n = 1\cdot(-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1} \\ &= 2 + \frac{1\cdot\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)} = 2 + \frac{1-(-2)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{7-(-2)^{n-1}}{3} \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$\dfrac{7-(-2)^0}{3} = 2 = a_1$ より，適する．

以上より，$a_n = \boldsymbol{\dfrac{7-(-2)^{n-1}}{3}}$　　**(答)**

(3) $\{b_n\}$ は 1，4，9，16，25，$\cdots$ より，$\{b_n\}$ の一般項は，$b_n = n^2$ であるので，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = -3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= -3 + \frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(2n-1) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n - 18) \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$\dfrac{1}{6}(2-3+1-18) = -3 = a_1$ より，適する．

以上より，$a_n = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n - 18)}$　　**(答)**

【2】(1) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 2n) - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} = 2n - 3$$

$n = 1$ のとき，$2 \cdot 1 - 3 = -1$ で，$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ と一致し，適する．
よって，$a_n = \boldsymbol{2n - 3}$　**(答)**

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n + 1) - (3^{n-1} + 1) = 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$n = 1$ のとき，$2 \cdot 3^0 = 2$ で，$a_1 = S_1 = 3^1 + 1 = 4$ より，適さない．
よって，$\boldsymbol{a_1 = 4}$，$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}\ (n \geqq 2)}$　**(答)**

【3】(1)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right)$$
$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{n}{3(n+3)}} \quad \text{(答)}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}} \quad \text{(答)}$$

【4】(1) 階差をとると，

$\{b_n\}$　**2, 3, 5, 9, 17**　**(答)**
$\{c_n\}$　**1, 2, 4, 8, 16**　**(答)**

(2) 初項 1，公比 2 の等比数列だから

$$c_n = 1 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^{n-1}} \quad \text{(答)}$$

(3) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 2 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$2^0 + 1 = 2$ より，$b_1 = 2$ に適する．
よって，$b_n = \boldsymbol{2^{n-1} + 1}$ **(答)**

(4) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k-1} + 1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 1 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} + (n - 1) = 2^{n-1} + n - 1 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$2^0 + 1 - 1 = 1$ より，$a_1 = 1$ に適する．
よって，$a_n = \boldsymbol{2^{n-1} + n - 1}$ **(答)**

M1T

高１難関大数学

会員番号		氏　名	